

## Matematica Discreta

Esercizi della seconda settimana - Venerdì 19 marzo 2010

---

**Esercizio 1.** Dimostrare che:

- (a)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$  per  $n \geq 0$ ;
  - (b)  $2! 4! 6! \cdots (2n)! > (n!)^n$  per  $n \geq 1$ ;
  - (c)  $\det(M_n) = (-1)^{n-1} (n-1)!$  per  $n \geq 2$  dove  $M_n$  è la matrice quadrata  $n \times n$  con 0 sulla diagonale principale e 1 altrove.
- 

**Esercizio 2.** Quali dei seguenti numeri sono divisibili per 13?

$$2^{2002} + 3^{2002}, \quad 4^{2004} + 5^{2004}, \quad 6^{2003} + 7^{2003}.$$

---

**Esercizio 3.** Determinare il più piccolo intero positivo  $x$  che risolve il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 7x \equiv 10 & (\text{mod } 37) \\ 4x \equiv 21 & (\text{mod } 33) \\ 3x \equiv 5 & (\text{mod } 25) \end{cases}$$

---

**Esercizio 4.** Quali sono i quadrati perfetti che hanno tutte le cifre dispari?

---

**Esercizio 5.** Sia  $N$  un numero intero positivo e sia  $P$  il prodotto delle sue cifre. Dimostrare che

- (a)  $N \geq P$ ;
  - (b)  $N \geq \frac{10^d - 1}{9} P$  dove  $d$  è il numero di cifre di  $N$ .
- 

**Esercizio 6.** Determinare il massimo numero positivo  $m$  tale che esiste un numero  $N$  di 10 cifre con tutte le cifre diverse che sia divisibile per tutti i numeri interi positivi minori o uguali a  $m$ .

---