Matematica Discreta

Esercizi della prima settimana - Venerdì 12 marzo 2010

Esercizio 1. Ogni punto del piano è colorato di rosso o di blu. Dimostrare che esiste almeno un rettangolo tale che i suoi vertici sono tutti dello stesso colore.

Esercizio 2. Quali delle seguenti frazioni sono irriducibili per ogni $n \geq 1$

$$\frac{30n+2}{12n+1}, \quad \frac{6n^2+5}{4n+3}, \quad \frac{n!+1}{(n+1)!+1} \;?$$

Esercizio 3. Quanti elementi ha il seguente insieme

$$\{25x + 36y = 60, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cap [-100, 100]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \;?$$

Esercizio 4. Dimostrare che se a e b sono numeri interi tali che

$$a \geq b \geq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{mcd}(a, b) + \mathrm{mcm}(a, b) = a + b$$

allora b divide a.

Esercizio 5. Sia $n = 10^{100}$. Quanti sono i divisori positivi di n^2 che sono minori di n ma che non dividono n?

Esercizio 6. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ con

$$a_n = \underbrace{111\cdots 1}_{n \text{ volte}}.$$

Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tale che i suoi elementi sono a due a due primi tra loro.
