Laboratorio di Matematica

Foglio n.2 - 8 marzo 2013

Problema 1. Siano $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ degli interi positivi con $n \geq 1$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{lcm}(x_{k-1}, x_k)} \leq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Problema 2. Per quali valori interi di $n \geq 2$, il numero

$$\left\lfloor \frac{n!}{n+1} \right\rfloor$$

è divisibile per n?

Problema 3. Siano A, B delle matrici reali $n \times n$ tali che esiste un vettore non nullo u per cui $Au = 0$ e esiste un vettore v per cui $Av = Bu$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \det(A_k) = 0$$

dove A_k è la matrice A dove la k-sima colonna è stata sostituita con la la k-sima colonna di B.

Problema 4. È possibile determinare una famiglia di circonferenze $\{C_i\}_{i \in I}$, ciascuna di raggio positivo, tale che per ogni punto $P \in \mathbb{R}^2$ esistono esattamente 4 circonferenze della famiglia che passano per P?

Problema 5. Dato un polinomio a coefficienti interi f si definisca l'insieme

$$I_f := \bigcap_{n \geq 1} f^n(\mathbb{Z})$$

dove f^n indica il polinomio f composto n volte.

i) Per quali polinomi $f \in \mathbb{Z}[x]$, l'insieme I_f è finito?

ii) Dato un insieme finito $S \subset \mathbb{Z}$, è possibile trovare un polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $I_f = S$?
