Secondo appello di Laboratorio di Matematica

11 luglio 2013

Problema 1. Dimostrare che se $x_1, \ldots, x_n$ sono numeri reali positivi allora

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \geq \frac{4n}{\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k+2)+n}.$$

Soluzione. Dato che $x_k > 0$, la disuguaglianza $(\sqrt{x_k}-1)^2 \geq 0$ implica che $x_k + 1 \geq 2\sqrt{x_k}$. Inoltre, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha che

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+1)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} 2\right)^2 = 4n^2.$$

che è equivalente alla disuguaglianza data. $\square$

Problema 2. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_n$ i vertici di un poligono regolare di n lati dove n è un intero dispari maggiore di 2.

i) Quanti sono i triangoli $\triangle P_iP_jP_k$ che sono rettangoli?

ii) Quanti sono i triangoli $\triangle P_iP_jP_k$ che contengono il centro del poligono?

Soluzione. i) Non ci sono triangoli rettangoli $\triangle P_iP_jP_k$. Infatti un tale triangolo dovrebbe avere un lato che sia anche un diametro della circonferenza che circoscrive il poligono regolare e questo è in contraddizione con il fatto che il poligono regolare ha un numero dispari di lati.

ii) Per il punto precedente, il centro del poligono è interno o esterno a ciascun triangolo $\triangle P_iP_jP_k$. Enumeriamo prima i triangoli $\triangle P_1P_jP_k$ con $1 < j < k$ che si trovano dalla parte opposta alla diagonale $P_1P_{\frac{n+1}{2}}$ rispetto al centro del poligono.

Variando $k \in \{3, 4, \ldots, \frac{n+1}{2}\}$, possiamo scegliere $j \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$ e quindi il numero di tali triangoli è

$$\sum_{k=3}^{\frac{n+1}{2}}(k-2) = \frac{(n-3)(n-1)}{8}.$$

Ripetendo lo stesso calcolo per gli altri vertici $P_2, \ldots, P_n$ otteniamo che il numero totale dei triangoli che non contengono il centro del poligono è

$$\frac{n(n-3)(n-1)}{8}.$$

Quindi il numero dei triangoli che invece contengono il centro del poligono è

$$t_n = \binom{n}{3} - \frac{n(n-3)(n-1)}{8} = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n-2}{3} - \frac{n-3}{4}\right) = \frac{1}{4}\binom{n+1}{3}.$$

I termini della sequenza t_n per $n = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ sono rispettivamente $1, 5, 14, 30, 55, 91$. $\square$

Problema 3. Sia X un insieme non vuoto e sia $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che

$$A \subseteq B \subseteq X \quad \Rightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

Dimostrare o confutare che esiste $C \subseteq X$ tale che $f(C) = C$.

Soluzione. L'insieme C esiste. Sia $\mathcal{C} = \{A \,:\, A \subseteq f(A)\}$. L'insieme $\mathcal{C}$ non è vuoto perché $\emptyset \in \mathcal{C}$ e quindi è ben definito l'insieme

$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A.$$

Ora verifichiamo che $C \subseteq f(C)$ e $f(C) \subseteq C$.

i) Se $A \in \mathcal{C}$ allora $A \subseteq f(A)$ e $A \subseteq C$, da cui $f(A) \subseteq f(C)$ e quindi $A \subseteq f(C)$. Così $C = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \subseteq f(C)$.

ii) $C \subseteq f(C)$ implica che $f(C) \subseteq f(f(C))$ e dunque $f(C) \in \mathcal{C}$. Così $f(C) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = C$.

□

Problema 4. Siano $n_1, n_2, \ldots, n_r$ dei numeri interi, non primi, maggiori di 1, tali che $\gcd(n_i, n_j) = 1$ per ogni $1 \leq i < j \leq r$. Dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_j} < \frac{2}{3}.$$

Soluzione. Sia p_j il più piccolo primo che divide n_j. Per ipotesi $\gcd(n_i, n_j) = 1$ se $i \neq j$ e quindi i primi p_j per $j = 1, \ldots, r$ sono tutti distinti. Inoltre il fatto che n_j non sia primo implica che $n_j \geq p_j^2$. Così

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_j} \leq \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{p_j^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \sum_{j=5}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \int_{x=4}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{11}{18} < \frac{2}{3}.$$

□
