Primo appello di Laboratorio di Matematica

6 giugno 2013

Problema 1. Sia n un numero intero positivo. Qual è la cardinalità massima di un sottoinsieme A di $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ tale che se $x \in A$ allora $2x \notin A$.

Problema 2. Sia P un polinomio a coefficienti reali di grado $2n$ con $n \geq 1$.
Dimostrare che se P ha $2n$ zeri reali e distinti, allora P ha almeno $n + 1$ coefficienti non nulli.

Problema 3. Dimostrare che per ogni $a, b, c > 0$,

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Problema 4. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0, 1]$ tale che $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.
Dimostrare che esiste una permutazione σ di $\{1, 2, \ldots, n\}$ tale che

$$S_\sigma := a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)} + \cdots + a_{\sigma(n-1)}a_{\sigma(n)} + a_{\sigma(n)}a_{\sigma(1)} \leq \frac{1}{n}.$$
