

## Laboratorio di Matematica

Foglio n.2 - 6 marzo 2012

---

**Problema 1.** Una famiglia finita di quadrati ha area complessiva uguale a  $1/2$ . Tali quadrati possono essere disposti senza sovrapposizioni in un quadrato di lato 1?

---

**Problema 2.** Dimostrare o confutare che esiste una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che

$$f(f(f(n))) = n^3.$$

---

**Problema 3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e sia  $\{S_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottospazi vettoriali propri di  $V$ . Dimostrare che se

$$V = \bigcup_{i \in I} S_i$$

allora  $I$  è un insieme infinito.

---

**Problema 4.** Per ogni intero  $n > 1$  dire se esiste un gruppo  $G$  di cardinalità  $n$  tale che ogni suo elemento  $g \neq e$  commuta solo con  $e, g, g^{-1}$ .

---

**Problema 5.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e periodica tale che per ogni intero positivo  $n$

$$\sum_{k=1}^n \frac{|f(k)|}{k} \leq 1.$$

Dimostrare che esiste un numero reale  $x_0$  tale che

$$f(x_0) = f(x_0 + 1) = 0.$$

---