Laboratorio di Matematica

Foglio n.1 - 8 novembre 2011

Problema 1. Sia n un numero intero positivo. In quanti modi è possibile esprimere n come somma di almeno due interi dispari consecutivi? Ad esempio, se $n = 48$ tali rappresentazioni sono 3:

$$48 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 9 + 11 + 13 + 15 = 23 + 25.$$

Soluzione. Indichiamo con $d(n)$ il numero di divisori di un numero intero positivo n. Distinguiamo due casi.

(i) Se si sommano un numero pari, $2k$, di interi dispari consecutivi centrati in $2a$ con $a \geq k \geq 1$ si ottiene

$$n = (2a-(2k-1))+\cdots+(2a-1)+(2a+1)+\cdots+(2a+2k-1) = (2a)(2k) = 4ak.$$

In questo modo si possono ottenere tutti i multipli di 4 che sono maggiori di 1. Le diverse rappresentazioni dello stesso numero n dipendono dalla scelta di a e k tra i divisori di $n/4$. Se $n/4$ non è un quadrato perfetto allora $d(n/4)$ è pari e il numero di rappresentazioni è $d(n/4)/2$ altrimenti è $(d(n/4) + 1)/2$.

(ii) Se invece si sommano un numero dispari, $2k + 1$, di interi dispari consecutivi centrati in $2a + 1$ con $a \geq k \geq 1$ si ottiene

$$n = (2a-(2k-1))+\cdots+(2a-1)+(2a+1)+(2a+3)+\cdots+(2a+2k+1) = (2a+1)(2k+1).$$

In questo modo si possono ottenere tutti i numeri dispari con almeno due divisori propri ovvero tutti i numeri dispari maggiori di 1 non primi. Se n non è un quadrato perfetto allora $d(n)$ è pari e il numero di rappresentazioni è $d(n)/2 - 1$ altrimenti è $(d(n) - 1)/2$.

□

Problema 2. Per ogni intero non negativo d, dimostrare o confutare che nel piano $\mathbb{R}^2$ esiste una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio positivo tale che la cardinalità dell'insieme $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}^2$ è esattamente uguale a d.

Soluzione.

I possibili valori di d per cui esiste una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio positivo tale che $|\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}^2| = d$ sono: 0, 1 e 2.

Caso $d = 0$. Dato che $\sqrt{2}$ è irrazionale, la circonferenza

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2}$$

non contiene nessun punto di $\mathbb{Q}^2$.

Caso $d = 1$. Consideriamo la circonferenza

$$(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2.$$

Il punto $(0, 0)$ appartiene a tale circonferenza. Se ci fosse un altro punto di coordinate (x, y) entrambe razionali avremmo che $x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 = 0$. Quindi $x \neq 0$ e $\sqrt{2} = (x^2 + y^2)/(2x) \in \mathbb{Q}$. Contraddizione.

Caso $d = 2$. Consideriamo la circonferenza

$$(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 3.$$

I punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$ appartengono a tale circonferenza. Se ci fosse un altro punto di coordinate (x, y) entrambe razionali avremmo che $x^2-2\sqrt{2}x+y^2 = 1$. Quindi $x \neq 0$ e $\sqrt{2} = (x^2+y^2-1)/(2x) \in \mathbb{Q}$. Contraddizione.

Caso $d \geq 3$. Se una circonferenza $\mathcal{C}$ contiene almeno tre punti di $\mathbb{Q}^2$ allora gli assi dei segmenti che uniscono questi punti sono rette a coefficienti razionali. Questo implica che anche il centro della circonferenza, intersezione di tali rette, ha coordinate razionali. Così, a meno di traslare il centro nell'origine, possiamo supporre che la circonferenza abbia equazione $x^2 + y^2 = r^2$ con $r > 0$. Sia $(x_1, y_1) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \in \mathbb{Q}^2$ uno dei tre punti. Allora, posto per ogni intero $n > 0$

$$(\cos\beta_n, \sin\beta_n) = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2n}{n^2+1}\right) \in \mathbb{Q}^2,$$

con $\beta_n \in (0, \pi/2]$ si ha che

$$(r\cos(\alpha+\beta_n), r\sin(\alpha+\beta_n)) = (r\cos\alpha\cos\beta_n - r\sin\alpha\sin\beta_n, r\sin\alpha\cos\beta_n + r\cos\alpha\sin\beta_n) \in \mathbb{Q}^2$$

appartiene alla circonferenza data e quindi

$$|\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}^2| = \infty.$$

$\square$

Problema 3. Quante sono le funzioni $f : \{1, 2, 3, \ldots, 2011\} \to \{1, 2, 3\}$ tali che la cardinalità delle controimmagini $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(3)$ siano tutte dispari?

Soluzione.
Consideriamo il caso più generale in cui il dominio delle funzioni è l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\}$ con $n \geq 0$. Il numero delle funzioni $f : \{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\} \to \{1, 2, 3\}$ per cui

$$|f^{-1}(1)| = a, \quad |f^{-1}(2)| = b, \quad |f^{-1}(3)| = c$$

con a, b, c interi positivi tali che $a + b + c = 2n + 1$ è

$$\frac{(2n+1)!}{a!b!c!}.$$

Quindi il numero di tali funzioni per cui la cardinalità delle controimmagini di 1, 2 e 3 siano tutte dispari è dato da

$$x_n = \sum_{\substack{a+b+c=2n+1 \\ a,b,c>0 \text{ dispari}}} \frac{(2n+1)!}{a!b!c!}.$$

Notiamo che

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k>0 \text{ dispari}} \frac{z^k}{k!}$$

e dunque

$$\begin{aligned} x_n &= (2n+1)![z^{2n+1}]\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(2n+1)!}{8}[z^{2n+1}](e^{3z} - 3e^z + 3e^{-z} - e^{-3z}) \\ &= \frac{3^{2n+1} - 3 - 3 + 3^{2n+1}}{8} = \frac{3^{2n+1} - 3}{4} = \frac{3(9^n - 1)}{4}. \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si può arrivare anche nel seguente modo.
Consideriamo una funzione $f : \{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\} \to \{1, 2, 3\}$ tale che le cardinalità delle sue controimmagini siano tutte dispari. La sua restrizione a $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$ potrà essere di due tipi.

(i) Se anche per la restrizione le cardinalità delle controimmagini sono tutte dispari allora i numeri $2n$ e $2n+1$ devono stare nella stessa controimmagine (3 modi possibili).

(ii) Altrimenti le cardinalità delle controimmagini della restrizione sono due pari e una dispari e i numeri $2n$ e $2n+1$ devono stare nelle due controimmagini di cardinalità pari (2 modi possibili).

Quindi la successione x_n soddisfa per $n > 0$ la ricorrenza

$$x_n = 3x_{n-1} + 2(3^{2n-1} - x_{n-1}) = x_{n-1} + 2 \cdot 3^{2n-1}.$$

Dato che $x_0 = 0$, si ha che

$$x_n = x_0 + 2\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} = \frac{18(9^n - 1)}{3(9-1)} = \frac{3(9^n - 1)}{4}.$$

□

Problema 4. Sia $P \in \mathbb{Z}[x]$ e sia a un numero intero tale che $P(a^2P(a)) = 0$. Dimostrare che P ha almeno una radice nell'insieme $\{-2, 0, 2\}$.

Soluzione. Dato che $P(a^2P(a)) = 0$ allora esiste $Q \in \mathbb{Z}[x]$ tale che

$$P(x) = (x - a^2P(a))Q(x).$$

Posto $m = aP(a) \in \mathbb{Z}$, si ha che

$$m = aP(a) = a(a - a^2P(a))Q(a) = a^2(1-m)Q(a).$$

Quindi necessariamente $m \neq 1$ e $m/(1-m) = a^2Q(a) \in \mathbb{Z}$. Così, dato che m e $1-m$ sono primi tra loro, $1 - m = \pm 1$, ossia $m = 0$ oppure $m = 2$.

i) Se $m = 0$ allora $0 = P(a^2P(a)) = P(am) = P(0)$.

ii) Se invece $m = aP(a) = 2$ allora, dato che $P(a) \in \mathbb{Z}$, si ha che $a = \pm 2$ oppure $a = \pm 1$.

   Se $a = \pm 2$ allora $-2 = m/(1-m) = a^2Q(a) = 4Q(a)$ che è impossibile perché $Q(a) \in \mathbb{Z}$. Infine, se $a = \pm 1$ allora $-2 = m/(1-m) = a^2Q(a) = Q(a)$ e $0 = P(a^2P(a)) = P(am) = P(\pm 2)$.

Quindi in ogni caso P ha almeno una radice nell'insieme $\{-2, 0, 2\}$. □

Problema 5. Sia $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f(x) \not\equiv 0$ allora

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{-mM}{2(M-m)}$$

dove

$$m = \min_{x \in [0,1]} f'(x) \qquad \text{e} \qquad M = \max_{x \in [0,1]} f'(x).$$

Soluzione.
Siccome $f(0) = f(1) = 0$, allora integrando la derivata prima otteniamo che per $x \in [0,1]$

$$f(x) = \int_0^x f'(s)\,ds \qquad \text{e} \qquad f(x) = -\int_x^1 f'(s)\,ds$$

da cui

$$mx \leq f(x) \leq Mx \qquad \text{e} \qquad -M(1-x) \leq f(x) \leq -m(1-x).$$

Integrando ancora, si ha che per $t \in [0,1]$

$$\frac{mt^2}{2} \leq \int_0^t f(x)\,dx \leq \frac{Mt^2}{2} \qquad \text{e} \qquad -\frac{M(1-t)^2}{2} \leq \int_t^1 f(x)\,dx \leq -\frac{m(1-t)^2}{2}.$$

Quindi sommando membro a membro, abbiamo che

$$g(t) \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq h(t)$$

dove $g(t) = (mt^2 - M(1-t)^2)/2$ e $h(t) = (Mt^2 - m(1-t)^2)/2$. Così

$$\frac{mM}{2(M-m)} = \max_{t\in[0,1]} g(t) \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \min_{t\in[0,1]} h(t) = \frac{-mM}{2(M-m)}.$$

da cui la tesi. $\square$
