Primo appello di Laboratorio di Matematica

12 giugno 2012

Problema 1. Per quali interi $n \geq 2$ esistono delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, ciascuna di rango $n-1$ tali che

$$\prod_{k=1}^{n-1} A_k = \mathbf{0}_n$$

dove $\mathbf{0}_n$ è la matrice nulla $n \times n$?

Soluzione. Per nessun intero $n \geq 2$.
Prima di tutto notiamo che se A, B sono due matrici $n \times n$ allora

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB) &= \operatorname{rank}(A_{|\operatorname{Im}(B)}) = \operatorname{rank}(B) - \dim(\operatorname{Ker}(A_{|\operatorname{Im}(B)}))\\ &\geq \operatorname{rank}(B) - \dim(\operatorname{Ker}(A)) = \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(A) - n.\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k\right) &\geq \operatorname{rank}\left(\prod_{k=1}^{n-2} A_k\right) + \operatorname{rank}(A_{n-1}) - n = \operatorname{rank}\left(\prod_{k=1}^{n-2} A_k\right) - 1\\ &\geq \operatorname{rank}\left(\prod_{k=1}^{n-3} A_k\right) - 2 \geq \cdots \geq \operatorname{rank}(A_1) - (n-2) = 1\end{aligned}$$

Quindi, dato che $\prod_{k=1}^{n-1} A_k$ ha rango almeno 1 non può essere uguale alla matrice nulla $\mathbf{0}_n$. $\square$

Problema 2. Sia $f \in C^1([0,1])$ tale che

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -1 \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 xf(x)\,dx = 1.$$

Dimostrare che esiste $t \in (0,1)$ tale che $f'(t) = 18$.

Soluzione. È facile verificare che la funzione lineare $x \to 18x - 10$ soddisfa le ipotesi. Poniamo $h(x) = f(x) - (18x - 10)$. Segue che integrando per parti otteniamo

$$0 = \int_0^1 h(x)\,dx = h(1) - \int_0^1 h'(x)x\,dx \qquad \text{e} \qquad 0 = \int_0^1 xh(x)\,dx = \frac{h(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 h'(x)\,dx.$$

Per $s \in [0,1]$ poniamo

$$G(s) = \int_0^s (x^2 - x)h'(x)\,dx$$

allora G è una funzione $C^1([0,1])$ tale che

$$G(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad G(1) = \int_0^1 x^2 h'(x)\,dx - \int_0^1 xh'(x)\,dx = h(1) - h(1) = 0.$$

Allora per il teorema di Lagrange esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$G'(t) = (t^2 - t)h'(t) = t(t-1)(f'(t) - 18) = 0$$

da cui $f'(t) = 18$. $\square$

Problema 3. Siano $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ dei numeri interi positivi. Dimostrare che

$$1 + \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \leq 2 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k + 1}\right).$$

Soluzione. Dimostriamo la disuguaglianza per induzione su n. Per $n = 1$ la disuguaglianza è equivalente alla condizione che $a_1 \geq 1$. Sia ora $n > 1$ e poniamo

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \qquad \text{e} \qquad T_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k + 1}\right).$$

Dobbiamo dimostare che

$$1 + S_n \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \leq 2T_n \left(1 + \frac{1}{a_{n+1} + 1}\right).$$

Per ipotesi induttiva $1 + S_n \leq 2T_n$ e quindi basta verificare che

$$1 + (2T_n - 1) \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \leq 2T_n \left(1 + \frac{1}{a_{n+1} + 1}\right)$$

ossia che

$$2T_n \leq 1 + a_{n+1}.$$

Dimostriamo anche questa disuguaglianza per induzione su n. Per $n = 1$ la disuguaglianza è equivalente a $2 \leq a_2$ che vale per ipotesi. Sia $n > 1$, allora per ipotesi induttiva

$$2T_{n+1} = 2T_n \left(1 + \frac{1}{a_{n+1} + 1}\right) \leq (1 + a_{n+1}) \left(1 + \frac{1}{a_{n+1} + 1}\right) = 2 + a_{n+1} \leq 1 + a_{n+2}$$

che vale in quanto per ipotesi $a_{n+2} \geq a_{n+1} + 1$. □

Problema 4. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, n)}$$

converge ad un numero irrazionale positivo minore di 1.

Soluzione. Poniamo $l(n) = \operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, n)$ e proviamo prima la convergenza.
Dato che $n \mid l(n)$, $(n-1) \mid l(n)$ e $\gcd(n, n-1) = 1$ si ha che $n(n-1) \mid l(n)$ e quindi $n(n-1) \leq l(n)$.
Così, per $N \geq 6$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{l(n)} \leq \sum_{n=2}^{5} \frac{1}{l(n)} + \sum_{n=6}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{23}{30} + \sum_{n=6}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{23}{30} + \frac{1}{5} - \frac{1}{N} < \frac{29}{30}.$$

Quindi la serie data, che è a termini positivi, converge ad un numero $s \in (23/30, 29/30] \subset (0, 1)$.
Supponiamo per assurdo che $s \in a/b \in \mathbb{Q}$ e sia $\{p_j\}$ la successione dei numeri primi in ordine crescente. Sia p_k un primo maggiore di b allora $b \mid l(p_k - 1)$ e

$$M := l(p_k - 1) \left(\frac{a}{b} - \sum_{n=2}^{p_k - 1} \frac{1}{l(n)}\right) = \sum_{n=p_k}^{\infty} \frac{l(p_k - 1)}{l(n)}$$

è un numero intero positivo. Osserviamo che per $n \geq 2$

$$\frac{l(n)}{l(n-1)} = \begin{cases} p_j & \text{se } n = p_j^r \text{ per qualche primo } p_j \text{ e qualche } r \text{ intero positivo,} \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo implica che $l(n)$ è una successione crescente che aumenta strettamente solo quando n è la potenza di un primo. Inoltre, per il postulato di Bertrand, $p_{j+1} \leq 2p_j - 1$ ossia $p_{j+1} - p_j \leq p_j - 1$.

Tenendo conto solo dei *salti* di $l(n)$ in corrispondenza dei primi p_j e non delle loro potenze successive (da cui la disuguaglianza stretta) abbiamo che

$$\begin{aligned} 1 \leq M &= \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{n=p_j}^{p_{j+1}-1} \frac{l(p_k-1)}{l(n)} < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{p_{j+1}-p_j}{\prod_{i=k}^{j} p_i} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{p_j - 1}{\prod_{i=k}^{j} p_i} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) + \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_k p_{k+1}}\right) + \left(\frac{1}{p_k p_{k+1}} - \frac{1}{p_k p_{k+1} p_{k+2}}\right) + \cdots = 1 \end{aligned}$$

ottenendo così una contraddizione. Dunque s è irrazionale. $\square$
