Laboratorio di Matematica

Foglio n.4 - 11 marzo 2011

Problema 1. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n tale che $P(x) \geq 0$ per ogni numero reale x. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x) \geq 0$$

per ogni numero reale x, dove $P^{(k)}(x)$ è la derivata k-sima di $P(x)$.

Soluzione.
Se P è un polinomio costante la tesi è ovvia. Supponiamo che il grado di

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

sia positivo, allora la condizione $P(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ implica che $n \geq 2$ è pari e $a_n > 0$. Poniamo

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x)$$

allora $Q(x) = a_n x^n + o(x^n)$ e quindi $\lim_{x \to \pm\infty} Q(x) = +\infty$. Dunque il polinomio $Q(x)$ ammette un punto di minimo assoluto $x_0 \in \mathbb{R}$ nel quale la derivata di Q si annulla. Siccome $Q'(x) = Q(x) - P(x)$, abbiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) \geq Q(x_0) = Q'(x_0) + P(x_0) = 0 + P(x_0) \geq 0.$$

$\square$

Problema 2. Determinare il numero di matrici $n \times n$, tali che ogni coefficiente $a(i,j) \in \{0,1\}$ e

$$a(i,j) + a(i+1,j) + a(i,j+1) + a(i+1,j+1) = 2 \qquad \text{per ogni } i,j \in [1, n-1].$$

Quante di queste matrici sono invertibili?

Soluzione.
La prima riga può essere scelta in 2^n modi. In 2 di questi modi, i numeri 0 e 1 sono esattamente alternati. In tal caso il resto della matrice può essere completato con altre righe alternate. Dato che per ogni riga si possono usare sia quelle iniziano per 0 che quelle che iniziano per 1, otteniamo 2^n matrici.
Nei restanti $2^n - 2$ modi, nella prima riga i numeri 0 e 1 non sono alternati e quindi ci sono due 0 oppure due 1 vicini. Questa condizione determina univocamente il resto della matrice, così abbiamo altre $2^n - 2$ matrici.
Dunque il numero totale delle matrici che soddisfano la condizione data sono $2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$.
È facile verificare che per $n \geq 3$ tali matrici presentano sempre almeno due righe identiche e quindi le uniche matrici invertibili si hanno per $n = 2$ e sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Problema 3. Sia f una funzione biunivoca dall'insieme dei numeri interi positivi in sé. Per quali interi $n > 0$ esistono degli interi $a > 0$ e $d > 0$ tali che

$$f(a) < f(a+d) < \cdots < f(a+nd)?$$

Soluzione.
Siano $a = f^{-1}(1)$ e $m = f(a+1) > 1$ allora necessariamente $1 = f(a) < f(a+1) = m$ e la tesi vale per $n = 1$. Per $n = 2$, consideriamo i numeri $f(a+2^k)$ per $k = 0, \ldots, m-1$. Se tali m numeri interi fossero decrescenti allora

$$2 \leq f(a+2^{m-1}) < f(a+2^{m-2}) < \cdots < f(a+2) < f(a+1) = m$$

mentre l'intervallo $[2, m]$ contiene solo $m-1$ numeri interi. Dunque esiste $0 \leq k \leq m-2$ tale che $f(a+2^k) < f(a+2^{k+1})$ e quindi per $d = 2^k$ abbiamo

$$f(a) < f(a+d) < f(a+2d).$$

Per $n > 2$ esistono delle funzioni biunivoche che non soddisfano la condizione data. Un possibile controesempio è dato da una funzione f definita come segue

$$f(n) = 4 \cdot 3^j - n - 1 \qquad \text{per } 3^j \leq n < 3^{j+1}$$

ossia una *permutazione* che inverte l'ordine dei numeri interi compresi tra due potenze consecutive di 3. Supponiamo per assurdo che esistano degli interi $a > 0$ e $d > 0$ tali che

$$f(a) < f(a+d) < f(a+2d) < f(a+3d)$$

allora se

$$3^j \leq a < 3^{j+1}, \quad 3^k \leq a+d < 3^{k+1}, \quad 3^l \leq a+2d < 3^{l+1}, \quad 3^m \leq a+3d < 3^{m+1},$$

per definizione della funzione f si ha che $0 \leq j < k < l < m$. Ma

$$2d = a+3d-(a+d) > 3^m - 3^{k+1} \geq 3^{l+1} - 3^{k+1} \geq 3^{k+2} - 3^{k+1} = 2 \cdot 3^{k+1}$$

implica la contraddizione $3^{k+1} > a+d > d > 3^{k+1}$. □

Problema 4. Sia c un intero positivo e sia S_c l'insieme delle soluzioni intere (x, y) dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$$

con $x > 0$ e $y > 0$. Dimostrare che

$$\sum_{(x,y) \in S_c} (x+y) = 2(c\,\tau(c^2) + \sigma(c^2))$$

dove $\tau(x)$ e $\sigma(x)$ sono rispettivamente il numero e la somma dei divisori positivi dell'intero x.

Soluzione.
Una coppia di interi positivi $(x, y) \in S_c$ se e solo se $xy = cx+cy$. Posto $a = x-c > 0$ e $b = y-c > 0$, tale condizione è equivalente a $(c+a)(c+b) = c(c+a) + c(c+b)$ ossia $c^2 = ab$. Quindi, dato che $\sum_{a|c^2} \frac{c^2}{a} = \sum_{b|c^2} b$, possiamo concludere che

$$\sum_{(x,y) \in S_c} (x+y) = \sum_{a|c^2} (a + c + \frac{c^2}{a} + c) = 2c \sum_{a|c^2} 1 + \sum_{a|c^2} a + \sum_{b|c^2} b = 2c\tau(c^2) + 2\sigma(c^2).$$

□

Problema 5. Sia $f(x)$ una funzione non negativa, convessa e derivabile in $[0,+\infty)$. Provare che se f è integrabile in $[0,+\infty)$ allora

$$\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx \le \frac{2}{3}\cdot \sup_{x\in[0,+\infty)} f(x)\cdot \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Soluzione.
Dato che la funzione f è convessa e non negativa e integrabile, la derivata f' è crescente e il limite $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ da cui segue che $f'(x) \le 0$ in $[0,+\infty)$. Quindi f è decrescente e non negativa e per l'integrabilità il limite $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Inoltre

$$f(0) = \sup_{x\in[0,+\infty)} f(x).$$

Per ogni $t \ge 0$ abbiamo che

$$\frac{(f(t))^2}{2} = \left[-\frac{(f(x))^2}{2}\right]_t^{+\infty} = -\int_t^{+\infty} f(x)f'(x)\,dx \le -f'(t)\int_t^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integrando rispetto a t si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(f(t))^2\,dt &\le \int_{t=0}^{+\infty}\left(-f'(t)\int_{x=t}^{+\infty} f(x)\,dx\right)dt\\ &\le \int_{x=0}^{+\infty}\left(f(x)\int_{t=0}^{x}(-f'(t))\,dt\right)dx\\ &\le \int_0^{+\infty} f(x)(-f(x)+f(0))\,dx\\ &\le -\int_0^{+\infty}(f(x))^2\,dx + f(0)\int_0^{+\infty} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}(f(t))^2\,dt \le f(0)\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

□
