Laboratorio di Matematica

Foglio n.4 - 11 marzo 2011

Problema 1. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n tale che $P(x) \geq 0$ per ogni numero reale x. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x) \geq 0$$

per ogni numero reale x, dove $P^{(k)}(x)$ è la derivata k-sima di $P(x)$.

Problema 2. Determinare il numero di matrici $n \times n$, tali che ogni coefficiente $a(i,j) \in \{0,1\}$ e

$$a(i,j) + a(i+1,j) + a(i,j+1) + a(i+1,j+1) = 2 \qquad \text{per ogni } i,j \in [1, n-1].$$

Quante di queste matrici sono invertibili?

Problema 3. Sia f una funzione biunivoca dall'insieme dei numeri interi positivi in sé. Per quali interi $n > 0$ esistono degli interi $a > 0$ e $d > 0$ tali che

$$f(a) < f(a+d) < \cdots < f(a+nd)?$$

Problema 4. Sia c un intero positivo e sia S_c l'insieme delle soluzioni intere (x,y) dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$$

con $x > 0$ e $y > 0$. Dimostrare che

$$\sum_{(x,y) \in S_c} (x+y) = 2(c\,\tau(c^2) + \sigma(c^2))$$

dove $\tau(x)$ e $\sigma(x)$ sono rispettivamente il numero e la somma dei divisori positivi dell'intero x.

Problema 5. Sia $f(x)$ una funzione non negativa, convessa e derivabile in $[0,+\infty)$. Provare che se f è integrabile in $[0,+\infty)$ allora

$$\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx \leq \frac{2}{3} \cdot \sup_{x \in [0,+\infty)} f(x) \cdot \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$
