

## Laboratorio di Matematica

Foglio n.3 - 14 gennaio 2011

---

**Problema 1.** Se si scelgono a caso  $n$  punti in un intervallo di lunghezza  $L$ , qual è il valore medio della somma delle distanze di tutte le possibili coppie di punti?

---

**Problema 2.** Sia  $f \in C^1([a, b])$ . Dimostrare che esistono due punti  $a < x_1 < x_2 < b$  tali che

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2.$$

---

**Problema 3.** Determinare una formula chiusa per la somma multipla

$$\sum_{\substack{A \subset \{1, \dots, n\} \\ A \neq \emptyset}} \sum_{\substack{B \subset \{1, \dots, n\} \\ B \neq \emptyset}} \sum_{x \in A \cup B} x.$$

---

**Problema 4.** Sia  $n = 2010^{100}$ . Determinare il numero di elementi dell'insieme

$$S_n = \{d \in \mathbb{N} : 1 \leq d \leq n, d \mid n^2, d \nmid n\}.$$

---

**Problema 5.** Sia  $p$  un numero primo. Dimostrare che per ogni intero  $n \geq 0$  si ha che

$$L_{pn} \equiv L_n \pmod{p}$$

dove  $L_n$  è l' $n$ -simo numero di Lucas definito dalla ricorsione

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ e } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

---