Laboratorio di Matematica

Foglio n.1 - 15 ottobre 2010

Problema 1. Siano A e B matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Dimostrare che se A è simmetrica e definita non negativa e $AB + BA = 0$ allora $AB = BA = 0$.

Soluzione.
Dato che A è simmetrica, A è diagonalizzabile e tutti i suoi autovalori sono reali.
Inoltre, se $Av = \lambda v$ allora $AB + BA = 0$ implica che

$$A(Bv) = -B(Av) = -\lambda(Bv)$$

Siccome A è definita non negativa, $\lambda \geq 0$ e

$$0 \leq \langle A(Bv), Bv\rangle = -\lambda||Bv||^2 \leq 0.$$

Così $\lambda||Bv||^2$=0, ossia $\lambda = 0$ oppure $Bv = 0$
Sia $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base di autovettori che diagonalizza A con $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ i relativi autovalori allora

$$A(Bv_i) = -\lambda_i(Bv_i) = 0$$

e dunque $AB = 0$ e $BA = -AB = 0$.
Si noti che le ipotesi del problema non implicano che $A = 0$ o $B = 0$. Ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

con $1 < k < n$ soddisfano le ipotesi del problema. □

Problema 2. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio unitario. Dimostrare che per ogni $P \in \mathcal{C}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |PA_k|^2$$

è un numero intero e determinarne il valore.

Soluzione.
Possiamo supporre senza perdere di generalità che i vertici del poligono siano

$$A_k = e^{ik\alpha} \text{ con } \alpha = 2\pi/n \text{ e } k = 1, \ldots, n.$$

Sia $P = e^{i\theta} \in \mathcal{C}$ allora

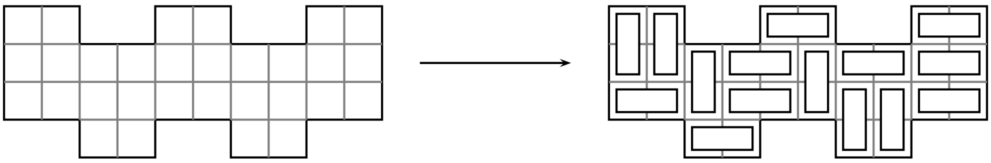
$$|PA_k|^2 = (e^{i\theta} - e^{ik\alpha})(e^{-i\theta} - e^{-ik\alpha}) = 2 - 2\mathrm{Re}(e^{i\theta - ik\alpha}).$$

Quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |PA_k|^2 = 2 - \frac{2}{n}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n} e^{-ik\alpha}\right) = 2 - \frac{2}{n}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\frac{1 - e^{-in\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}}\right) = 2.$$

□

Problema 3. Un poligono è formato da n rettangoli 3×2 uniti lungo una parte del lato lungo e disposti in modo alternato. Tale poligono deve essere ricoperto con tessere rettangolari 2×1 o 1×2. Qui sotto è rappresentato un esempio di ricoprimento per $n = 5$:



Sia a_n il numero di tali ricoprimenti. Dimostrare che $3^n \leq a_n < 4^n$ per ogni n intero positivo.

Soluzione.
Gli a_n ricoprimenti del poligono di ordine n possono essere divisi in due categorie:

- i t_n ricoprimenti che non contengono tessere che attraversano la linea di congiunzione tra i primi $n-1$ rettangoli e l'ultimo;
- i restanti s_n ricoprimenti dove tale linea viene attraversata da almeno una tessera. In questo caso una parte del poligono ha un ricoprimento forzato.

Dato che un singolo rettangolo ha 3 ricoprimenti diversi allora $t_n = 3a_{n-1}$ per $n \geq 2$.
Inoltre nei ricoprimenti del secondo tipo ogni ricoprimenti della parte non forzata può essere estesa univocamente a un ricoprimento del poligono formato da $n-1$ rettangoli e quindi $s_n \leq a_{n-1}$ per $n \geq 2$. Infine siccome $a_1 = 3$ e per $n \geq 2$

$$3a_{n-1} = t_n \leq a_n = t_n + s_n \leq 4a_{n-1}$$

si deduce facilmente per induzione che per ogni n intero positivo

$$3^n \leq a_n \leq 3 \cdot 4^{n-1} < 4^n.$$

Con un ragionamento simile si può dedurre che la successione $(a_n)_{n\geq 1}$ soddisfa la ricorrenza lineare

$$a_{n+1} = 4a_n - 2a_{n-1}$$

e quindi

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{2})^{n+1} + (2-\sqrt{2})^{n+1}}{4}.$$

$\square$

Problema 4. Sia x un numero reale non negativo. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor 2^n x \rfloor}}{2^n}.$$

Soluzione.
Sia $(a_k)_{k\geq 1}$ la rappresentazione diadica di $\{x\}$, la parte frazionaria di x, allora

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}.$$

Quindi per $n \geq 1$ si ha che

$$2^n x = (2^n \lfloor x \rfloor + 2^{n-1} a_1 + \cdots + 2a_{n-1}) + a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n-k}}{2^k}.$$

Siccome il numero tra parentesi è pari e la somma della serie è un numero non negativo minore di 1 (ogni $a_i \in \{0, 1\}$ e non sono definitivamente uguali a 1) allora

$$(-1)^{\lfloor 2^n x \rfloor} = (-1)^{a_n} = 1 - 2a_n$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor 2^n x \rfloor}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2a_n}{2^n} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 1 - 2\{x\}.$$

□

Problema 5. Dimostrare o confutare che per ogni intero positivo k esiste una potenza di due che in base dieci ha almeno k cifre uguali a 9.

Soluzione.
Dimostriamo un risultato più generale: per ogni numero intero $N \geq 1$ esiste un numero intero $m \geq 0$ tale che la rappresentazione decimale di 2^m *inizia* con N.

Basta far vedere che esistono degli interi $a, m \geq 0$ tali che

$$m \log_{10} 2 - a \in [\log_{10}(N), \log_{10}(N+1)).$$

Siccome $\log_{10} 2$ è un numero irrazionale, per il teorema di Weyl, la successione $(\{n \log_{10} 2\})_{n \geq 1}$ è densa in $[0, 1)$ e dunque esiste un intero $n_0 \geq 1$ tale che

$$0 < \{n_0 \log_{10} 2\} < \frac{1}{2}(\log_{10}(N+1) - \log_{10}(N)) = \frac{1}{2} \log_{10}(1 + 1/N).$$

Allora è possibile trovare un numero intero $k_0 \geq 1$ tale che

$$k_0 \{n_0 \log_{10} 2\} \in [\log_{10}(N), \log_{10}(N+1))$$

e basta porre $m = k_0 n_0$ e $a = k_0 \lfloor n_0 \log_{10} 2 \rfloor$. □

Una soluzione alternativa. Il numero 2 è un generatore di $\mathbb{Z}^*_{5^n}$ e quindi esiste a_n tale che

$$2^{a_n} \equiv -1 \pmod{5^n}$$

(si può prendere $a_n = \varphi(5^n)/2 = 2 \cdot 5^{n-1}$). Sia $m = 2k + a_{2k}$ allora

$$2^m \equiv 0 \equiv -2^{2k} \pmod{2^{2k}} \qquad \text{e} \qquad 2^m \equiv -2^{2k} \pmod{5^{2k}}$$

e per il Teorema Cinese dei Resti $2^m \equiv -2^{2k} \pmod{10^{2k}}$. Così

$$2^m \equiv -2^{2k} = 10^{2k} - 2^{2k} \equiv (10^k - 1)10^k + (10^k - 4^k) \pmod{10^{2k}}.$$

Questo significa che le k cifre decimali che precedono le ultime k sono tutte uguali a 9. □
