# Secondo appello di Laboratorio di Matematica

1 luglio 2011

---

**Problema 1.** Dimostrare che

$$F_p^2 \equiv 1 \pmod p \qquad \text{per ogni primo } p \neq 5,$$

dove $F_n$ è l'$n$-simo numero di Fibonacci definito dalla ricorsione

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

---

**Problema 2.** Sia $n$ un numero intero positivo e siano $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dei numeri complessi di modulo unitario (non necessariamente distinti). Dimostrare o confutare che esiste $w$ tale che

$$|w| = 1 \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{n} |w - z_i| > n.$$

---

**Problema 3.** Determinare per quali interi positivi $n$, il polinomio

$$P(z) = -1 + \prod_{k=1}^{n} (z - k)$$

è irriducibile su $\mathbb{Z}$.

---

**Problema 4.** Determinare tutte le funzioni $f \in C^1([0, +\infty))$ tali che

$$|f'(x)| \leq |f(x) - f(0)| \qquad \text{per ogni } x \in [0, +\infty).$$

---