Primo appello di Laboratorio di Matematica

14 giugno 2011

Problema 1. Dimostrare o confutare che esistono tre numeri interi positivi i, j, k tali che

$$a_i^2 + a_j^2 = a_k^2$$

dove a_n è l'n-simo termine di una successione definita nel modo seguente

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0 \quad \text{e} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per } n > 2.$$

Soluzione.
La successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è positiva e strettamente crescente e quindi possiamo supporre che

$$k > i \geq j \geq 1.$$

Se $k = 2$ allora $i = j = 1$ e se $a_2 = \sqrt{2}a_1$ si ha che

$$a_2^2 = a_1^2 + a_1^2$$

e la relazione è soddisfatta. Se $k = 3$ allora

$$a_3^2 = (a_2 + a_1)^2 = a_2^2 + a_1^2 + 2a_2a_1 > a_2^2 + a_1^2$$

e quindi $i = j = 2$. In tal caso si ha che

$$a_3^2 = a_2^2 + a_2^2$$

per $a_2 = (1 + \sqrt{2})a_1$. Infine, per $k > 3$ la relazione non è mai soddisfatta. Infatti

$$2a_{k-2} > a_{k-2} + a_{k-3} = a_{k-1}$$

e

$$a_k^2 = (a_{k-1} + a_{k-2})^2 = a_{k-1}^2 + 2a_{k-1}a_{k-2} + a_{k-2}^2 > 2a_{k-1}^2 \geq a_i^2 + a_j^2.$$

□

Problema 2. Sia n un numero intero positivo. Dimostrare che

i) per ogni primo p si ha che p^a divide $n!$ se e solo se $0 \leq a \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$;

ii) $n!$ divide il numero intero $N = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)$.

Soluzione.
i) È sufficiente osservare che $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ è il numero di multipli di p^k presenti nell'intervallo $[1, n]$ e quindi il numero totale di volte che p divide i numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$ è dato proprio dalla somma di tali termini.
ii) Sia p un primo. Se p^a divide $n!$ allora, per quanto visto in i),

$$a \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \leq \frac{n}{p-1}$$

Se $p = 2$ allora $a \leq n$ e quindi 2^a divide N. Se $p > 2$ allora $\gcd(2, p) = 1$ e, per il piccolo teorema di Fermat, p divide $2^{j(p-1)} - 1$ per $j \geq 1$. Siccome $a(p-1) \leq n$, N contiene i fattori $2^{j(p-1)} - 1$ per $j = 1, \ldots, a$ e quindi N ha almeno a fattori p ossia è divisibile per p^a.

Si può quindi concludere che $n!$ divide N. $\square$

Problema 3. Per quali numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ esiste un polinomio $P(z)$ non costante, a coefficienti reali non negativi, tale che $P(w) = 0$?

Soluzione.
Se $w \in \mathbb{C}$ allora il polinomio

$$P(z) = (z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(w)z + |w|^2$$

si annulla per $z = w$ e ha i coefficienti reali e non negativi se $\mathrm{Re}(w) \leq 0$.
Se $\mathrm{Re}(w) > 0$ e $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ allora $w = |w|e^{i\theta}$ con $0 < |\theta| < \pi/2$ e quindi esiste un intero positivo n tale che $\pi/2 \leq n|\theta| < \pi$. Così

$$\mathrm{Re}(w^n) = |w|^n \cos(n\theta) \leq 0$$

e il polinomio

$$P(z) = (z^n - w^n)(z^n - \overline{w}^n) = z^{2n} - 2\mathrm{Re}(w^n)z^n + |w|^{2n}$$

si annulla per $z = w$ e ha i coefficienti reali non negativi.
D'altra parte, se $\mathrm{Re}(w) > 0$ e $\mathrm{Im}(w) = 0$ e $P(z)$ è un polinomio non costante, a coefficienti reali non negativi di grado n allora

$$P(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_0 \geq a_n w^n > 0.$$

Quindi l'insieme cercato è $\mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$. $\square$

Problema 4. Sia $f \in C^2([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$. Dimostrare che

$$\int_0^1 f''(x)^4 \, dx \geq 2304 \cdot f\left(1/2\right)^4.$$

Soluzione.
Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che

$$\int_0^1 f''(x)^4 \, dx = \int_0^1 1^2 \, dx \int_0^1 \left(f''(x)^2\right)^2 \, dx \geq \left(\int_0^1 1 \cdot f''(x)^2 \, dx\right)^2.$$

Quindi, visto che $2304 = 48^2$, basta dimostrare che

$$\int_0^1 f''(x)^2 \, dx \geq 48 \cdot f\left(1/2\right)^2.$$

Sia

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in [0, 1/2] \\ 1 - x & \text{per } x \in [1/2, 1] \end{cases},$$

allora

$$\int_0^1 g(x)^2 \, dx = \frac{1}{12}$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \int_0^1 f''(x)^2 \, dx &\geq \left(\int_0^1 f''(x) g(x) \, dx\right)^2 \\ &= \left([g(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^{1/2} f'(x)g'(x) \, dx - \int_{1/2}^1 f'(x)g'(x) \, dx\right)^2 \\ &= \left(-2f(1/2)\right)^2 = 4f(1/2)^2. \end{aligned}$$

$\square$
