Alcuni punti importanti per la prova di teoria **(provvisorio in data 2025.12.02)** - Ingegneria Gestionale - A.A. 2025-26

Serie numeriche e di potenze

1. Definizione di convergenza semplice di una serie e convergenza assoluta. Proprietà delle serie.
2. Esempi: Dimostrare che la serie armonica è divergente, Serie telescopica è convergente, convergenza di serie geometrica, convergenza serie armonica generalizzata.
3. Mostrare, con dimostrazioni e controesempi, la relazione tra convergenza assoluta e semplice di una serie.
4. Dimostrare il criterio del confronto, confronto asintotico, del rapporto o della radice.
5. Dimostrare il criterio di Leibniz.
6. Dimostrare che una serie di potenze converge in un intervallo simmetrico intorno al centro.
7. Definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze. Dimostrazione del teorema del raggio di convergenza per serie di potenze.
8. Dimostrare che, per una serie di potenze, l'integrale e la somma si possono scambiare.
9. Dimostrare la convergenza di serie di Taylor per alcune funzioni.

Continuità e differenziabilità

1. Definizioni di insiemi aperti e chiusi. Dimostrare che gli insiemi definiti come il controimmagine di una funzione continua di un insieme aperto è aperto.
2. Definizione di limite di funzioni in più variabili, differenziabilità, derivate parziali e derivate direzionali di funzioni in più variabili.
3. Dimostrare che una funzione differenziabile è derivabile, continua e derivabile parzialmente. Mostrare la relazione tra derivata direzionale e gradiente per una funzione differenziabile. Mostrare, controesempi, che il viceversa non è vero.
4. Dimostrare che il gradiente di una funzione differenziabile in un punto individua la direzione ed il verso di massima crescenza della funzione nel punto. Definizione di piano tangente in un punto per una funzione differenziabile, formula di Taylor al primo ordine.
5. Esempio di funzione differenziabile in punto con derivate parziali non continue nel punto.
6. Enunciare la regola della catena. Presentare la regola della catena nel caso di una curva composta una funzione a valori in $\mathbb{R}$.
7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Dini in dimensione 2.
8. Dimostrare che il gradiente è ortogonale alla direzione della tangente del grafico della funzione implicita.
9. Definizione di punti critici. Dimostrare che, per una funzione differenziabili, i punti di massimo o minimo locali sono punti critici.
10. Definizione di punti estremali vincolati. Enunciato e dimostrazione del Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange.

11. Definizione di matrice Hessiana per una funzione di classe C^2 . Enunciato del Teorema di Schwarz. Formula di Taylor al secondo ordine. Discutere per una funzione di 2 e di 3 variabili di classe C^2 la relazione fra convessità, matrice Hessiana definita positiva/negativa in un punto, punti di minimo/massimo relativo (con definizioni ed enunciati).

Integrali di linea

1. Definizione di curva rettificabile. Cambio di parametrizzazione.
2. Definizione di curve equivalenti. Dimostrare che: l'integrale di linea di un campo vettoriale lungo una curva è invariante per curve equivalenti con stessa orientazione, cambia segno per curve equivalenti con orientazione opposta.
3. Campi vettoriali conservativi, irrotazionali. Rotore di un campo vettoriale, domini convessi.
4. Definizione di potenziale e campi vettoriali conservativi. Discutere la relazione fra campi vettoriali conservativi e irrotazionali (una implica l'altra? Su quali insiemi sono equivalenti? Che proprietà devono avere questi insiemi? Esempi? Dare un esempio di campi vettoriali con queste proprietà).
5. Dimostrare che l'integrale di linea di un campo vettoriale conservativo lungo un cammino dipende solo dagli estremi.
6. Costruire una funzione potenziale per un campo vettoriale irrotazionale in un dominio convesso.

Integrali multipli

1. Dare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann in un rettangolo. Dare la definizione di funzione integrabile in un insieme normale. Dare un esempio di funzione non integrabile in $\mathbb{R}^2$.
2. Spiegare la relazione fra insieme misurabile e integrabilità secondo Riemann di una funzione.
3. Dedurre e dimostrare la formula di riduzione per integrali in due dimensioni su insiemi semplici.
4. Enunciato del Teorema del cambio di variabile (in 2d coordinate polari, coordinate sferiche, ellittiche, in 3d coordinate sferiche)

Integrali di superficie

1. Dare la definizione di superficie. Presentare il caso delle superfici cartesiane e delle superfici di rotazione, fare un esempio per ciascun tipo. Dare l'espressione dei vettori tangenti alle linee coordinate per una superficie e scriverli nel caso di superfici cartesiane e superfici di rotazione.
2. Dare la definizione di vettore normale e di versore normale, calcolarli per superfici cartesiane e superfici di rotazione. Presentare degli Esempi
3. Enunciare e dimostrare il Teorema di Gauss-Green.
4. Dare la definizione di area di una superficie, di integrale di una funzione su una superficie.
5. Dare la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Dimostrare la formula del flusso del campo elettrico attraverso una sfera di raggio R con centro l'origine.
6. Enunciare il teorema della divergenza. Enunciare il teorema di Stokes, ricondursi a Gauss-Green nel caso 2-dimensionale

NOTA: Questi sono da interpretare come nozioni fondamentali per una preparazione di base per il quesito teorico nel compito scritto.