

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.02.02

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta (risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

(a) Stabilire se la seguente serie converge, e se converge assolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right)}$$

- Si considera la serie con il modulo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right)},$$

dove si nota che $1 + \frac{1}{n^3} > 1$ dunque $\log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) > 0$, $\exp \left(\frac{1}{n}\right) > 1$ perché $\exp(x)$ è (strettamente) crescente e $\exp(0) = 1$, dunque $\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right) > 1 - 1 = 0$. Inoltre, per $n \rightarrow \infty$, si ha $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ e si hanno le seguenti espansioni di Taylor

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x + o(x), & \text{per } x \rightarrow 0 \\ \exp(x) &= 1 + x + o(x), & \text{per } x \rightarrow 0 \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), & \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dunque, ponendo $a_n = \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right)}$, si ha

$$a_n = \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + o(1)}.$$

D'altra parte, con $b_n = \frac{1}{n^2}$, si sa che $\sum_n b_n$ converge, e $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \rightarrow 1 > 0$ (per $n \rightarrow \infty$). Dunque per il criterio confronto, anche $\sum_n a_n$ converge.

Ossia, la serie originale converge assolutamente. La convergenza assoluta implica convergenza semplice, dunque la serie originale converge semplicemente.

(b) Per una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, definire (**non calcolare**) il raggio di convergenza.

- Il raggio di convergenza della serie sopra è $r > 0$ tale che, se $|x| < r$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge e se $|x| > r$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ non converge. Se la serie converge per tutti $x \in \mathbb{R}$, si scrive simbolicamente $r = \infty$.

(c) Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k + 1} x^k$$

e verificare che esso soddisfa la definizione precedente (della domanda (b)).

- Il raggio di convergenza si ottiene, ponendo $a_n = \left| \frac{2^n + 3^n}{5^n + 1} \right|$, come

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2^n + 3^n)(5^{n+1} + 1)}{(5^n + 1)(2^{n+1} + 3^{n+1})} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3} \left| \frac{((\frac{2}{3})^n + 1)(1 + 5^{-(n+1)})}{(1 + 5^{-n})(\frac{2}{3})^{n+1} + 1} \right| = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Per verificare la definizione, si nota che $|\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} + 1} x^{n+1}| / |\frac{2^n + 3^n}{5^n + 1} x^n| \rightarrow |x/\frac{5}{3}|$ (per $n \rightarrow \infty$) per un conto analogo. Per il criterio del rapporto, se $|x/\frac{5}{3}| < 1$ (ossia se $|x| < \frac{5}{3}$), la serie converge (assolutamente), e se $|x/\frac{5}{3}| > 1$ (ossia se $|x| > \frac{5}{3}$), la serie non converge.

2. (10 punti)

(a) Per una funzione f sul dominio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, dare un esempio di una funzione di cui un minimo globale non è un punto critico.

- Per esempio, $f(x, y) = x$ ammette un punto di minimo globale in quanto è una funzione continua sul dominio compatto Ω , ma $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non si annulla mai.

Infatti il punto di minimo si trova sul bordo di Ω .

Alternativamente si può considerare $f(x, y) = |x|$. Sicuramente $(0, 0)$ è un punto di minimo globale perché $f(0, 0) = 0 \leq |x| = f(x, y)$ per tutti (x, y) , però il punto $(0, 0)$ non è un punto critico in quanto la funzione non è derivabile.

(b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione e stabilire se ognuno di loro è un punto di minimo locale, massimo locale o di sella. Stabilire, per ognuno di punti di minimo o massimo locali, se è un punto di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + y^4 + 2y^2.$$

- La funzione è differenziabile su tutti i punti del dominio $\mathbb{R}^2$, e dunque basta trovare i punti critici e studiare le loro nature. Per un punto critico (x_0, y_0) di f , vale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 + 3x_0^2 - x_0 \\ 4y_0^3 + 4y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dunque $4x_0^3 + 3x_0^2 - x_0 = 0, 4y_0^3 + 4y_0 = 0$. Risolvendo queste equazioni, i punti critici sono $(-1, 0), (0, 0), (\frac{1}{4}, 0)$. Corrispondentemente, $f(-1, 0) = -\frac{1}{2}, f(0, 0) = 0, f(\frac{1}{4}, 0) = -\frac{3}{256}$.

Inoltre,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 6x - 1 & 0 \\ 0 & 12y^2 + 4 \end{pmatrix},$$

dunque, per i punti critici sopra, le matrici Hessiane sono

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che hanno due autovalori positivi, autovalori con segni misti, due autovalori positivi rispettivamente, dunque sono un punto di minimo locale, un punto di sella, un punto di minimo locale rispettivamente.

Si nota che $|f(x, y)| \rightarrow \infty$ se $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Dunque f ammette almeno un minimo globale. Paragonando i valori, si conclude che $(-1, 0)$ è un punto di minimo globale mentre $(\frac{1}{4}, 0)$ non lo è.

(c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \quad \text{vincolati all'insieme} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, 0 < x\}$$

e discutere se loro sono i punti di minimo o massimo globali.

- Si pone $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$. $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$, dunque $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ su E .

Si nota che $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$. Per il metodo di moltiplicatori di Lagrange, se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 3x_0^2 \\ 3y_0^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \end{pmatrix}, x_0^2 - y_0^2 = 1.$$

Dai componenti della prima equazione, risulta che $x_0(3x_0 - 2\lambda) = 0, y_0(3y_0 + 2\lambda) = 0$.

- $x_0 = 0$ è impossibile perché implicherebbe $0 = y_0^2 + 1$.
- $y_0 = 0$ implica che $x_0^2 = 1$, ossia $x_0 = \pm 1$ (e $\lambda = \pm \frac{3}{2}$) e dalla condizione $0 < x$ si conferma solo $x_0 = 1$.
- Nel rimanente caso, si avrebbe $x_0 = \frac{2\lambda}{3}, y_0 = -\frac{2\lambda}{3}$, però questo implicherebbe $x_0^2 - y_0^2 = 0 = 1$, dunque è impossibile.

Dunque l'unico punto critico è $(1, 0)$.

Per determinare se è un punto di minimo/massimo/sella, si nota che la condizione $x^2 - y^2 = 1, 0 < x$ si può scrivere $x = \sqrt{1 + y^2}$, e $f(\sqrt{1 + y^2}, y) = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} + y^3$.

- Se $y \rightarrow \infty, (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} + y^3 \rightarrow \infty$.
- Se $y \rightarrow -\infty, y^3(- (1 + y^{-2})^{\frac{3}{2}} + 1) = y^3(-\frac{3}{2}y^{-2} + o(y^{-2})) \rightarrow \infty$.

Dunque il punto $(1, 0)$ è un punto di minimo, anche globale.

(Nota: E è una iperbole e dunque non è compatta)

3. (6 punti) Sia $\mathbf{F}(x, y)$ il campo vettoriale seguente su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + y, \frac{-x}{x^2 + y^2} + x \right)$$

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

- Si ha $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e $\mathbf{F}(\gamma(t)) = (\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \sin t, \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \cos t) = (2 \sin t, 0)$, dunque

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} -2 \sin^2 t \, dt = -2 \int_0^{2\pi} (\cos 2t - 1) \, dt = -2\pi.$$

- (b) Stabilire se il campo vettoriale $\mathbf{F}$ sopra su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è irrotazionale e/o conservativo.
- Siccome l'integrale di linea lungo una curva chiusa (a) non è 0, $\mathbf{F}$ non è conservativo. D'altra parte,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) &= \partial_x \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} + x \right) - \partial_y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + y \right) \\ &= \frac{-(x^2 + y^2) - 2x^2}{x^2 + y^2} + 1 - \frac{(x^2 + y^2) + 2y^2}{x^2 + y^2} - 1 = 0\end{aligned}$$

dunque $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

(Nota: se si prova a costruire una funzione potenziale con

$$U(x, y) = \left(\int \frac{y}{x^2 + y^2} + y \right) dx + \varphi(y) = \arctan \left(\frac{x}{y} \right) + xy + \varphi(y),$$

$U(x, y)$ non è definita se $y = 0$ (ed è impossibile estenderla in modo differenziabile), mentre una funzione potenziale deve essere C^1 per definizione. Questa impossibilità si può aspettare dal risultato di (a))

- (c) Determinare il valore $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t + 2), t \in [0, 2\pi]$.

- La curva $\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t + 2), t \in [0, 2\pi]$ è il cerchio di raggio 1 con centro in $(2, 2)$. Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ si può restringere su, per esempio, sul disco D di raggio 1.5 con centro in $(2, 2)$, che è convesso (e semplicemente connesso). Dunque su D $\mathbf{F}$ è irrotazionale e dunque conservativo, e siccome γ è incluso in D , si ha $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$.

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iint_D y^2 \sin(xy) dx dy, \quad \text{dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 2\pi \leq xy \leq 3\pi, 0 < x\},$$

con il cambio di variabili

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}.$$

- Con il cambio di variabili dato, si scrive $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$ e si calcola la matrice Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}.$$

Il determinante è $\frac{1}{2v}$.

(alternativamente, si calcola la matrice Jacobiana di $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ e il suo determinante è $\frac{2y}{x}$. Formalmente, si cambia “ $dudv = \frac{2y}{x} dx dy$ ” oppure $\frac{1}{2v} dudv = dx dy$) Inoltre si hanno le relazioni $uv = y^2$. Il dominio D nelle coordinate xy corrisponde a

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, \pi \leq xy \leq 2\pi, 0 < x \right\} \\ &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq v \leq 2, \pi \leq u \leq 2\pi \right\}\end{aligned}$$

(in D vale $0 < x \leq y$ e dunque $0 < u, v$, ma queste ultime seguono dalle altre condizioni e si può inverire la relazione con $x = \sqrt{u/v}, y = \sqrt{uv}$)

Per la formula di cambio di variabili, si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_D y^2 \sin(xy) \, dx dy &= \iint_{\Omega} uv \sin(u) \cdot 2v \, dudv \\
 &= \int_1^2 \int_{\pi}^{2\pi} uv \sin(u) \cdot \frac{1}{2v} \, dudv \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 dv \int_{\pi}^{2\pi} u \sin(u) \, du \\
 &= \frac{1}{2} [v]_1^2 \cdot [-u \cos u + \sin u]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [-u \cos u + \sin u]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

5. (6 punti)

- (a) Parametrizzare il seguente insieme come una curva che, quando proiettata sul piano xy , va nel senso antiorario:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = z\}.$$

- C è l'intersezione della sfera di raggio 2 con centro in $(0, 0, 0)$ e il piano $y = z$, e dunque è un cerchio. Per esempio, si può prendere $\gamma(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, e si può verificare facilmente che $\|\gamma(t)\|^2 = 4$, $\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t$ e la proiezione sul piano xy è $(2 \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ va nel senso antiorario.
- (b) Determinare il valore del seguente integrale di linea, con lo stesso C come sopra con la stessa orientazione:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad \text{dove } \mathbf{F}(x, y, z) = (yz \exp(xyz), zx \exp(xyz) + x, xy \exp(xyz))$$

- Visto che C è il cerchio, per il teorema di rotore, si ha con il disco $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y = z\} = \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq 4\}$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_+ dS, \quad \text{dove } \mathbf{N}_+ \text{ è il versore con la coordinate } z \text{ positiva}$$

Si nota che $(yz \exp(xyz), zx \exp(xyz), xy \exp(xyz)) = \nabla U(x, y, z)$, dove $U(x, y, z) = \exp(xyz)$, dunque usando $\text{rot } \nabla U = \mathbf{0}$,

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \text{rot } (0, x, 0) = (0, 0, 1)$$

Come la parametrizzazione di D si può prendere

$$\sigma(x, y) = (x, y, y), \quad \Omega = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + 2y^2 \leq 4\}.$$

Con questo, si ha $\sigma_x = (1, 0, 0)$, $\sigma_y = (0, 1, 1)$ e dunque $\sigma_x \times \sigma_y = (0, -1, 1)$. Si calcola (con il cambio di variabile $x = 2 \sin t$ e $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$ nel quarto passaggio)

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_+ dS \\
 &= \iint_{\Omega} (0, 0, 1) \cdot (0, -1, 1) dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} dx dy \\
&= 2 \int_{-2}^2 \sqrt{2-x^2/2} dx \\
&= 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = 2\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$