

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.02.02

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta (risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

(a) Stabilire se la seguente serie converge, e se converge assolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

(b) Per una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, definire (**non calcolare**) il raggio di convergenza.

(c) Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k + 1} x^k$$

e verificare che esso soddisfa la definizione precedente (della domanda (b)).

2. (10 punti)

(a) Per una funzione f sul dominio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, dare un esempio di una funzione di cui un minimo globale non è un punto critico.

(b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione e stabilire se ognuno di loro è un punto di minimo locale, massimo locale o di sella. Stabilire, per ognuno di punti di minimo o massimo locali, se è un punto di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + y^4 + 2y^2.$$

(c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \quad \text{vincolati all'insieme} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, 0 < x\}$$

e discutere se loro sono i punti di minimo o massimo globali.

3. (6 punti) Sia $\mathbf{F}(x, y)$ il campo vettoriale seguente su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + y, \frac{-x}{x^2 + y^2} + x \right)$$

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

(b) Stabilire se il campo vettoriale $\mathbf{F}$ sopra su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è irrotazionale e/o conservativo.

(c) Determinare il valore $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t + 2), t \in [0, 2\pi]$.

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iint_D y^2 \sin(xy) \, dx dy, \quad \text{dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, \pi \leq xy \leq 2\pi, 0 < x\},$$

con il cambio di variabili

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

5. (6 punti)

(a) Parametrizzare il seguente insieme come una curva che, quando proiettata sul piano xy , va nel senso antiorario:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = z\}.$$

(b) Determinare il valore del seguente integrale di linea, con lo stesso C come sopra con la stessa orientazione:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad \text{dove } \mathbf{F}(x, y, z) = (yz \exp(xyz), zx \exp(xyz) + x, xy \exp(xyz))$$