

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Soluzione per prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.01.19

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta (risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

(a) Stabilire, al variare di $x \in \mathbb{R}$, se la seguente serie converge, e se converge assolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n^2+1}} x^n.$$

- Si applica il criterio del rapporto per $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{n^2+1}} |x|^n$ (che dipende da x). Si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x|\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 3|x|$. Dunque se $|x| < \frac{1}{3}$, la serie converge assolutamente (dunque anche semplicemente). Se $|x| > \frac{1}{3}$ si ha $|a_n| = \left| \frac{3^n x^n}{\sqrt{n^2+1}} \right| \rightarrow \infty$, e in particolare, la serie non converge.

Se $x = \frac{1}{3}$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Si fa un confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: questa è la serie armonica che si sa che diverge, mentre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 > 0$

dunque diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Se $x = -\frac{1}{3}$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} (-1)^n$. Sappiamo già che la serie non converge assolutamente. Invece, questa è una serie alternante, e la parte non negativa soddisfa

- $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > 0$
- $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$ (decrescente)
- $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 0$ (per $n \rightarrow \infty$)

Dunque, per il criterio di Leibniz, la serie converge (semplicemente).

(b) Per una successione di funzioni f_n su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, scrivere la definizione di convergenza uniforme della serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ad un'altra funzione g .

- La serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ si dice che converge uniformemente su I a g se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per $x \in I$ e $n > N$, vale $|\sum_{k=0}^n f_k(x) - g(x)| < \epsilon$.

(c) Stabilire se la seguente successione converge uniformemente su $[-2, 2]$.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

- Per il criterio del rapporto applicato a $\frac{1}{k!} |x^k|$, si vede che la serie converge (per tutti $x \in \mathbb{R}$), a $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$. Inoltre, se $x \in [-2, 2]$, allora

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k$$

Siccome la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k$ è convergente, vale che $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k \rightarrow 0$. Quest'ultima stima non dipende da x , dunque la serie converge uniformemente: ossia, per $\epsilon > 0$ dato, per la convergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k$ esiste N tale che $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k < \epsilon$ per tutti $n > N$. Allora con lo stesso N , vale per tutti $n > N$ che $|\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k| < \epsilon$.

2. (10 punti)

(a) Per una funzione f sul dominio Ω , definire un punto di massimo locale.

- $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ si dice punto di massimo locale se esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ tale che, per tutti $\mathbf{x} \in U \cap \Omega$, vale che $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$.

(b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione e stabilire se ognuno di loro è un punto di minimo locale, massimo locale o di sella. Stabilire se alcuni di loro sono punti di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$$

- La funzione è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Dunque, se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale, vale che $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ (punto critico).

Si calcola

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 9y \\ 3y^2 - 9x \end{pmatrix}$$

Se $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 9y \\ 3y^2 - 9x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $x_0^2 = 3y_0, y_0^2 = 3x_0$. In particolare, si ha $x_0, y_0 \geq 0$. Sostituendo $y_0 = x_0^2/3$, si ottiene $x_0^4/9 = 3x_0$, ossia $x(x^3 - 27) = 0$, quindi o $x_0 = 0, 3$.

- Inserendo $x_0 = 0$ in $x^2 = 3y$, si ottiene $y_0 = 0$. Dunque $(x_0, y_0) = (0, 0)$ è un punto critico.
- Inserendo $x_0 = 3$ in $x^2 = 3y$, si ottiene $y_0 = 3$. Dunque $(x_0, y_0) = (3, 3)$ è un punto critico.

La matrice Hessiana in un punto generico è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}.$$

- In $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ che ha gli autovalori $9, -9$, dunque $(0, 0)$ è un punto di sella.
- In $(x_0, y_0) = (3, 3)$ si ha $H_f(3, 3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$ che ha sia la traccia che il determinante positivi, dunque gli autovalori sono positivi e $(3, 3)$ è un punto di minimo locale.

Inoltre, la funzione $f(x^3, 0) = x^3$ non è limitata né inferiormente né superiormente, quindi non ammette un punto di minimo globale. Da questo si conclude che $(3, 3)$ è un punto di minimo locale e non globale.

(c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y, z) = x + y + z \quad \text{vincolati all'insieme} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

e discutere se loro sono i punti di minimo o massimo globali.

- Si pone $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, e questo vettore non si annulla mai sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Dunque se ci sono punti di minimo o massimo locali di f vincolati su E , si possono trovare con il metodo di Lagrange.

Sia (x_0, y_0, z_0) un tale punto. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che, con $\lambda f(x, y, z) = (1, 1, 1)$,

$$(1, 1, 1) = \lambda(2x_0, 2y_0, 2z_0) \quad \text{e} \quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4.$$

Si nota dalla prima equazione che nessuno di λ, x_0, y_0, z_0 può essere 0. Dunque si ottiene $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{2\lambda}$, e inserendo nella seconda equazione, si ottiene $\frac{3}{4\lambda^2} = 4$.

Dunque le uniche possibilità sono $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$. Corrispondentemente,

$$\begin{aligned} - (x_0, y_0, z_0) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ In questo caso, si ha } f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}. \\ - (x_0, y_0, z_0) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ In questo caso, si ha } f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Si nota che l'insieme E è compatto (chiuso perché è il preimmagine dell'insieme $\{4\}$ rispetto alla funzione continua $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e limitato ($|x|, |y|, |z| < 2$ su E). Per il teorema di Weierstrass, f vincolato a E deve assumere sia un punto di minimo e massimo globale. Visti i valori di f , $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ è un punto di massimo globale e $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ è un punto di minimo globale.

3. (6 punti)

- (a) Stabilire se il seguente campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ è conservativo.

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y \cos(x^3y) + 2x, x^3 \cos(x^3y) + 2y)$$

- Si nota che il dominio naturale di $\mathbf{F}$, $\mathbb{R}^2$, è convesso (e anche semplicemente connesso). Dunque se $\mathbf{F}$ è irrotazionale, allora è anche conservativo. Calcolando, si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = 3x^2 \cos(x^3y) - 3x^5y \sin(x^3y) - (3x^2 \cos(x^3y) - 3x^5y \sin(x^3y)) = 0.$$

Così si conclude che $\mathbf{F}$ è conservativo.

- (b) Determinare il valore del seguente integrale di linea, dove γ parametrizza l'arco del cerchio in $\mathbb{R}^2$ di raggio 2 e con centro in $(0, 0)$ che parte da $(2, 0)$ e finisce in $(0, 2)$ e che va in senso antiorario:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

- Per calcolare l'integrale di linea, visto che $\mathbf{F}$ è conservativo, basta trovare una funzione potenziale $U(x, y)$ tale che $\nabla U = \mathbf{F}$. Una tale U ha le seguenti proprietà:

$$\partial_x U(x, y) = 3x^2y \cos(x^3y) + 2x, \quad \partial_y U(x, y) = x^3 \cos(x^3y) + 2y.$$

Integrando queste equazioni rispetto ad x e y , rispettivamente, si deduce che esistono funzioni $\varphi(y), \psi(x)$ tali che

$$U(x, y) = \int (3x^2y \cos(x^3y) + 2x) dx = \sin(x^3y) + x^2 + \varphi(y)$$

$$U(x, y) = \int (x^3 \cos(x^3y) + 2y) dy = \sin(x^3y) + y^2 + \psi(x)$$

L'unico modo per soddisfare queste equazioni allo stesso punto e porre $\varphi(y) = y^2 + C$, $\psi(x) = x^2 + C$ con qualche costante C .

Così abbiamo trovato $U(x, y) = \sin(x^3 y) + x^2 + y^2 + C$.

Per calcolare l'integrale di linea, si ricorda che

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = U(0, 2) - U(2, 0) = 0 + 4 + C - (0 + 4 + C) = 0.$$

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iiint_D z e^{-(x^2+y^2)} dx dy dz, \quad \text{dove } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

• Il dominio è normale al piano xy , riscrivendo

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq 1 - x^2 - y^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

Inoltre, per l'esistenza di un tale z , deve valere $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, o equivalentemente $x^2 + y^2 \leq 1 - x^2 - y^2$, e ancora, $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$. Dunque

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Dunque l'integrale si calcola, passando alle coordinate polari per l'ultima parte:

$$\begin{aligned} &\iiint_D z e^{-(x^2+y^2)} dx dy dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (z e^{-(x^2+y^2)}) dz \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}} [z^2]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}} (1 - 2(x^2 + y^2)) e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (1 - 2r^2) e^{-(r^2)} r dr d\theta \\ &= \pi \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} + \frac{e^{-r^2}(r^2 + 1)}{2} \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

5. (6 punti)

(a) Dare una parametrizzazione della sfera $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di raggio 3 con centro in $(0, 0, 0)$.

- Nelle coordinate sferiche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix},$$

si può prendere $r = 3$ sulla sfera di raggio 3 con centro in $(0, 0, 0)$. Dunque, con le rimanenti due variabili φ, θ , si ha

$$\sigma(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \sin \theta \\ 3 \sin \varphi \sin \theta \\ 3 \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in (0, \pi).$$

- (b) Determinare il valore del seguente integrale di superficie, dove $\mathbf{N}_e$ è il versore normale sulla sfera Σ verso l'esterno:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_e dS, \quad \text{dove } \mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$$

- Per il teorema di divergenza (di Gauss), l'integrale di superficie (di flusso) coincide con

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz$$

where $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ (la regione circondata dalla superficie Σ).
Si ha:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Per eseguire l'integrale di volume, si può passare alle coordinate sferiche: $x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta$. La regione Q che corrisponde a V nelle coordinate sferiche è $Q = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Si ricorda che il determinante della matrice Jacobiana per le coordinate sferiche è $r^2 \sin \varphi$, and note that $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Therefore,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_e dS &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz \\ &= 3 \iiint_Q r^2 \cdot r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi \\ &= 3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \\ &= \frac{2916\pi}{5}. \end{aligned}$$