Analisi matematica II, 2025/26 Primo semestre

Yoh Tanimoto
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
Via della Ricerca Scientifica 1, I-00133 Roma, Italy
email: `hoyt@mat.uniroma2.it`

Serie numeriche, serie di funzioni

1. (a) Studiare la convergenza di $f_n(x) = e^{-nx^2}, x \in \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{3^k}, x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente.
   (c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_0^s x^n dx$ per $s \in [0, 1)$.

2. Poniamo $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ per $n = 1, 2, \cdots$ e $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)dx.$$

3. Poniamo $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}, f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)$. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x)$.

4. Studiare la convergenza per $n \to \infty$, di $f_n(x) := \sin(x + 2\pi\sqrt{n^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

5. Determinare il raggio di convergenza.
   (a) $\sum \frac{z^n}{2^n}$
   (b) $\sum \frac{z^{2n}}{(n+1)2^n}$
   (c) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} z^n}{2n}$
   (d) $\sum (1 - (-2)^n) z^n$
   (e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$
   (f) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{3^n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$

6. Dimostrare l'espansione.
   (a) $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$ per $|x| < 1$ e $\ln(x + 1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$.
   (b) $\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}$ per $|x| < 1$ e $\arctan x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

7. Determinare il raggio di convergenza e calcolare la somma.
   (a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{3^{n+2}}$.
   (b) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}$.

8. Dimostrare l'espansione.
   (a) Con $a > 0$, $a^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$ for $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sinh x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!}$, dove $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

9. Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$ e 0 per $x \leq 0$. Dimostrare che $f^{(n)}(0) = 0$, dunque la serie di Taylor non converge a $f(x)$.