# AM2 Lezione 1. Presentazione del corso, serie 2025.09.22

Dispense, esercizi: Yoh Tanimoto $\to$ Didattica $\to$ AM2.
Testo: Epsilon 2 (+ una parte di Epsilon 1) Bertsch, Dall'Aglio, Giacomelli
Ricevimento: su appuntamento (hoyt@mat.uniroma2.it) or Teams (codice: hwdwj8v)
<u>Programma</u> Serie numeriche e di funzioni, Funzioni di più variabili
Integrali multipli, curve e integrali curvilinei, superficie e integrali superficiali.
Applicazioni: serie di Taylor, (serie di Fourier), equazioni differenziale alle derivate parziali (equazioni di Maxwell, Navier-Stokes, Black-Scholes), ottimizzazione, elettrostatistica/dinamica.

In AM 1, abbiamo studiato funzioni di una variabile $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Nelle applicazioni concrete, $f(x)$ può essere la posizione di una macchina a tempo $x$. In tal caso, $f'(x)$ rappresenta la velocità.

In AM2, studieremo funzioni (o a volte chiamate "campi") da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.
Per esempio, se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ rappresenta un punto nell'aula e $T(x, y, z)$ la temperatura di quel punto, $T$ è una funzione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$.
Nella elettrodinamica si considera il campo elettrico $\mathbb{E}(x, y, z, t)$ a tempo $t$.
$\mathbb{E} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Impareremo "derivate" $\nabla \cdot T$, $\nabla \cdot \mathbb{E}$, $\nabla \times \mathbb{E}$ ...

In AM1, abbiamo studiato successioni numeriche. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
Formula di Taylor $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(n)$. $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + o(n)$.
$e \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

<u>Serie numeriche</u> (Epsilon 1 Capitolo 3)
Consideriamo una successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
Allora possiamo costruire una nuova successione $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$.
Simbolicamente, $\sum_{k=1}^1 a_k$, $\sum_{k=1}^2 a_k$, ... $\sum_{k=1}^n a_k$, ...
<u>Esempi.</u> $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, ... $a_n = \frac{1}{2^n}$. $\sum_{k=1}^n a_k = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$.

In questo caso, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

$0.333\dots = \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} = 3 \cdot \dfrac{\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} \to 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

Def(inizione) Per una successione $\{a_k\}$, $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ è detta la somma parziale (n-esima) della serie. Se $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge, si dice che la serie converge e $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è detta la somma della serie. Se $\sum_{k=1}^{n} a_k \to \pm\infty$, la serie è della divergente. Altrimenti "irregolare" o "non convergente".

Oss(ervazione) Si possono considerare serie che cominciano con $a_m$. $\sum_{k=m}^{n} a_k$. $m=0$.

Serie geometrica.

Sia $r \in \mathbb{R}$ e consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$.

Teo(rema) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ (1) converge se $-1<r<1$ (2) diverge se $r \geq 1$ (3) irregolare se $r \leq -1$

dim(ostrazione)). Sappiamo che $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. (1) Se $-1<r<1$, allora $r^{n+1} \to 0$, dunque $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$. (2) se $r>1$, allora $r^n \to \infty$ e $\sum_{k=0}^{n} r^k \to \infty$. (3) se $r \leq -1$, allora $r^{n+1}$ è irregolare e anche $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$.

Serie telescopiche

Consideriamo la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdots = 1 - \frac{1}{n+1}$. Dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

In generale, una serie della forma $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ è detta una serie telescopica.

Si ha $\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}$.

Prop(osizione) Se $\{b_n\}$ converge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

dim). $\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1} \to b_0 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}$.

Prop. (1) Siano $\sum a_k$, $\sum b_k$ convergenti, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} (-a_k) = -\infty$. Se $\lambda > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \infty$.

dim) (1). Per definizione, $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Analogo per $\sum \lambda a_k$.

(2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, allora per ogni $A<0$ esiste $N$ t.c. $\sum_{k=0}^{n} a_k > A$ per $n > N$. Allora $\sum_{k=0}^{n} a_k < A$. Significa che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$.

Oss $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n = a_1 + \cdots a_m + \cdots a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{n} a_k$.

In particolare, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ converge.

Esempio $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + 1 = 2$.

AM2 Lezione 2 Serie a termini non negativi 2025.09.23

Per una successione $\{a_n\}$, abbiamo considerato la serie $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}$.

<u>Teo</u> Se $\sum_k a_k$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

dim) Sia $\sum_k a_k$ convergente. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N$ t.c. $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ per $m, n > N$. In particolare, se $n > N+1$ allora $m := n-1 > N$ e $|a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right| < \varepsilon$. Significa che $a_n \to 0$.

<u>Oss</u> Anche se $a_n \to 0$, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ non è detto che converga. Es. $a_n = \frac{1}{n}$.

<u>Serie a termini non negativi</u>

$\sum a_k$ si dice una serie a termini non negativi se $a_n \geq 0$ per tutti $n \in \mathbb{N}$.

<u>Teo</u> Siano $a_n \geq 0$. In questo caso, (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\iff \{\sum_{k=0}^{n} a_k\}$ è limitata superiormente. (2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\iff \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k\}$ non è limitata superiormente.

dim) Siccome $a_n \geq 0$, la successione $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è crescente (non decrescente). Dunque segue (1) (Oss 2100 di Epsilon 1). (2) è simile.

<u>Teo</u> (Criteri del confronto)

Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente per $n \to \infty$. In questo caso,
(1) $\sum_k b_k$ converge $\Rightarrow \sum_k a_k$ converge. (2) $\sum_k a_k$ diverge $\Rightarrow \sum_k b_k$ diverge.

dim) Basta considerare il caso $0 \leq a_n \leq b_n$ per tutti $n$.
(1) Segue che $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$. Se $\sum_{k=0}^{n} b_k$ converge, è limitata superiormente. $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_n \leq S$ per tutti $n$. Per Teo precedente, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ converge.
(2) è analogo.

<u>Esempi</u> $\sum \frac{1}{k^2}$. Si ha che $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$, perché $k(k+1) \leq 2k^2$ per $k \in \mathbb{N}$. per il teorema del confronto, siccome $\sum \frac{2}{k(k+1)} = 2 \cdot \sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge (telescopico), converge pure $\sum \frac{1}{k^2}$.

Sia $\alpha > 2$. Allora vale $\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k^2}$ per tutti $k \in \mathbb{N}$. Sappiamo che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. dunque per il teorema di confronto, converge pure $\sum \frac{1}{k^\alpha}$. "Serie armonica generalizzata"

<u>Teo</u> (confronto asintotico)

Siano $0 < a_k, b_k$ definitivamente, e supponiamo $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0$.
In questo caso, $\sum a_k$ converge $\iff \sum b_k$ converge.

dim). Siccome $\ell \neq 0$, si ha $\frac{\ell}{2} < \ell < 2\ell$, e $\frac{\ell}{2} < \frac{a_k}{b_k} < 2\ell$ definitivamente.
Ossia $\frac{\ell}{2} b_k < a_k < 2\ell b_k$. Per confronto, se $\sum a_k$ converge, converge pure $\frac{\ell}{2} \sum b_k$ e ulterior

Teo (Criterio del rapporto).
Sia $a_k > 0$ definitivamente, e $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$. In questo caso,
(1) Se $1 < \ell$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge. (2) Se $\ell < 1$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
dim) (1) Sia $1 < \ell$. Prendiamo $r$ t.c. $1 < r < \ell$. Allora definitivamente $r < \frac{a_{k+1}}{a_k}$, ovvero $r a_k < a_{k+1}$. Dunque $r^{k-1} a_1 < r^{k-2} a_2 < \cdots < a_k$.
Sappiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} a_1$ diverge. Per il criterio del confronto, diverge $\sum_1 a_k$.
(2) Sia $\ell < 1$. Prendiamo $r$ t.c. $\ell < r < 1$. Definitivamente $\frac{a_{k+1}}{a_k} < r$.
Vale che $a_{k+1} < r a_k$, quinque $a_{k+1} < r^k a_1$. Sappiamo che $\sum_1 r^k a_1$ converge.
Per il confronto, converge pure $\sum_1 a_k$.

Oss. Se $\ell = 1$, il criterio non può concludere nulla.

Esempi • Si considera $\sum_1 \frac{1}{k!}$. $a_k = \frac{1}{k!}$ $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} / \frac{1}{k!} = \frac{1}{k+1} \to 0$.
Per il criterio del rapporto, $\sum_1 \frac{1}{k!}$ converge.

Teo (Criterio della radice).
Sia $a_k \geq 0$ definitivamente, e $\lim_{k\to\infty} (a_k)^{\frac{1}{k}} = \ell$. In questo caso,
(1) Se $1 < \ell$, allora $\sum_1 a_k$ diverge. (2) Se $\ell < 1$, allora $\sum_1 a_k$ converge.
dim) Dimostriamo (2) ((1) è analogo) Sia $\ell < 1$. Dunque possiamo prendere $r$ t.c. $\ell < r < 1$. Definitivamente $(a_k)^{\frac{1}{k}} < r$, ovvero $a_k < r^k$.
Sappiamo che $\sum_1 r^k$ converge. Per il confronto, converge pure $\sum_1 a_k$.

Esempi • $\sum_1 \frac{1}{n 3^n}$ è convergente.
$\sum_1 \frac{n 2^n}{3^n}$ è convergente.
• $\sum_1 \frac{n}{2^n}$ è convergente

Oss. Anche qua, se $\ell = 1$, il criterio non conclude nulla.
Vedremo che $\sum_1 \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\sum_1 \frac{1}{n^2}$ converge, anche se
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

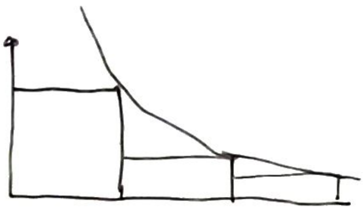
AM2 Lezione 3 Il criterio integrale, esercizi 2025.09.25

## Il criterio integrale

Si ricorda il criterio del confronto per serie a termini non negativi:
Siano $0 \le a_n \le b_n$ (definitivamente). Se $\sum_n b_n$ converge, converge pure $\sum a_n$.
Se diverge $\sum_i a_n$, diverge pure $\sum_i b_n$.

Esempio $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge. Infatti,
$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}$. Si prende $a_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$, $b_k = \frac{1}{k}$.
$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{n+1} = (\log(n+1) - 0)$.
Dunque $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \infty$. Per il confronto, diverge pure $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Analogamente, se $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. Infatti, se $\alpha < 1$, allora $\frac{1}{k} < \frac{1}{k^\alpha}$, dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.



D'altra parte, se $\alpha > 1$, allora $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
In questo caso, si nota che $\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dx \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx$

Si ha $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \int_1^n x^{-\alpha} dx$
$= 1 + \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \xrightarrow{n\to\infty} 1 - \frac{1}{1-\alpha}$.
per il confronto, converge pure $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$.
(Queste serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ sono dette serie armoniche generalizzate).

Prop. Sia $r \ne 1$. Vale $\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$.
dim). Si dimostra con l'induzione.
caso $n=1$. Il lato sinistro: $\sum_{k=1}^{1} r^k = r$.
Il lato destro: $\frac{r - r^{1+1}}{1-r} = \frac{r(1-r)}{1-r} = r$ ✓.
caso $n+1$. Supponiamo che la formula sia corretta per $n$.
Dobbiamo dimostrare $\sum_{k=1}^{n+1} r^k = \frac{r - r^{(n+1)+1}}{1-r}$.
Abbiamo $\sum_{k=1}^{n+1} r^k = \sum_{k=1}^{n} r^k + r^{n+1} = \frac{r - r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1}$
$= \frac{r - r^{n+1} + r^{n+1}(1-r)}{1-r} = \frac{r - r^{n+2}}{1-r}$ ✓
Per l'induzione, la formula è corretta per tutti $n \in \mathbb{N}$.

Esercizi  calcolare le somme.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5}{2^n}. \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^4}{\pi^{2n}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}.$$

Determinare convergenza/divergenza.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n+1}}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}.$$

Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k x^k. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

# AM2 Lezione 4 Serie a termini di segno variabile 2025.09.29

Siano $\{a_n\}$ una successione, $a_n \in \mathbb{R}$. Si dice che la serie $\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge **assolutamente** se converge $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

**Teo** Se $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge pure $\sum a_k$ (nel senso normale).
Inoltre, vale $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

dim) Si considera la serie $\sum (|a_k| - a_k)$, che ha i termini non negativi.
Si ha che $|a_k| - a_k \leq 2|a_k|$, e $\sum 2|a_k| = 2\sum |a_k|$, quella serie converge per il confronto e l'ipotesi.
Vale per ogni $n$ che $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ per la disuguaglianza triangolare.
Entrambe le serie convergono, e dunque vale $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

**Esempio** $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ converge perché $\left|\frac{\cos k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$. Sappiamo che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, dunque converge $\sum \left|\frac{\cos k}{k^2}\right|$ per il confronto, e $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ converge per il teorema.

**Teo** Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (oppure $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$)
Se $\ell < 1$, allora $\sum a_k$ converge assolutamente. Se $1 < \ell$, la serie non converge.

dim). Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ e $\ell < 1$. Si considera la serie $\sum |a_k|$, con i termini non negativi. Per l'ipotesi e il criterio del rapporto, la serie $\sum |a_k|$ converge. Questo significa che la serie $\sum a_k$ converge assolutamente.
Il caso $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$ è simile. Se $\ell > 1$, significa che $|a_k| \to \infty$, dunque la serie $\sum a_k$ non può convergere ($a_k \to 0$ è una condizione necessaria).

**Esempi** • Sia $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
La serie converge assolutamente. Infatti, poniamo $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \text{ per qualunque } x \in \mathbb{R}.$$

Dunque, per il teorema precedente con $\ell = 0 < 1$, la serie converge assolutamente.

• Sia $A > 0$. Consideriamo $\sum \left(\frac{-2k}{1+Ak}\right)^k$. Per il criterio della radice, ponendosi $a_n = \left(\frac{-2n}{1+An}\right)^n$.
$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1+An} = \frac{2}{A}$. Dunque se $A > 2$, la serie converge assolutamente.
Se $A < 2$, la serie non converge. Se $A = 2$, $\left(\frac{-2k}{1+2k}\right)^k = 1 / \left(\frac{1+2k}{-2k}\right)^k = (-1)^k \cdot 1/\left(1+\frac{1}{2k}\right)^k$
e $\left(1+\frac{1}{2k}\right)^k \to \sqrt{e}$. In particolare, $a_n \not\to 0$, e dunque la serie non converge.

## Serie a termini di segno alterno

Siano $0 \le a_k$ e consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Esempio $\sum (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Teo (criterio di Leibniz)
Siano $0 \le a_k$, e supponiamo che (i) $a_k \to 0$ per $k \to \infty$. (ii) $a_k \ge a_{k+1}$ per $k \in \mathbb{N}$. (decrescente). Allora $\sum (-1)^k a_k$ converge.

dim). Poniamo $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k = S_n$. Si osserva:

(1) La sotto successione $\{S_{2n}\}$ è decrescente.
Infatti, $S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k - a_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2})$,
e siccome $a_{2n+1} \ge a_{2n+2}$, segue che $S_{2(n+1)} \le S_{2n}$.

(2) $\{S_{2n+1}\}$ è crescente.
Infatti, $S_{2(n+1)+1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k + a_{2n+2} - a_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3}$
e siccome $a_{2n+2} \ge a_{2n+3}$, segue che $S_{2(n+1)+1} \ge S_{2n+1}$.

(3) Vale $S_{2n} \ge S_{2n+1}$. Infatti, $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ e $a_{2n+1} \ge 0$.

(4) $\{S_{2n}\}$ è limitata inferiormente (da $S_1$) Infatti, $S_{2n} \ge S_{2n+1} \ge S_{2n-1} \ge \cdots \ge S_1$.
$\{S_{2n+1}\}$ è limitata superiormente (da $S_2$) Infatti, $S_{2n+1} \le S_{2n} \le S_{2n-2} \le \cdots \le S_2$.

Siano $S_{2n} \to S''$, $S_{2n+1} \to S'$.

(5) $S' = S''$. Infatti, $S' - S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ per l'ipotesi.

Dunque tutta la successione $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ converge a $S' = S''$.

Esempi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge per il criterio di Leibniz.
Infatti, basta verificare che (i) $\frac{1}{k} \to 0$ per $k \to \infty$ (ii) $\frac{1}{k}$ è decrescente.
Si nota che, anche se $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.
La convergensa di $\sum a_k$ non implica la convergenza assoluta (di $\sum |a_k|$).

La condizione (ii) può essere verificata solo definitivamente.
(ii) può essere verificata usando derivata.
$\sum (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}$. Si pone $f(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$. $f'(x) = \frac{-4(x^2+1) - 2x(x-4)}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) < 0$ per $x$ grande. Si conclude che $\frac{k-4}{k^2+1}$ è decrescente. è chiaro che $\frac{k-4}{k^2+1} \to 0$
Dunque $\sum (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}$ converge per il criterio di Leibniz.

AM2 Lezione 5 Serie di potenze 2025.09.30.

Consideriamo serie della seguente forma, detta serie di potenze.
Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ una successione. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$
per vari $x \in \mathbb{R}$.

Esempi
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+1}$ $x_0 = 3$, $a_k = \frac{1}{k+1}$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k!}$

Il primo esempio converge se $|x-3|<1$, per il confronto con la serie geometrica, $\frac{(x-3)^k}{k+1} < (x-3)^k$, ma se $|x-3|>1$, la serie non converge perché $\left|\frac{(x-3)^k}{k+1}\right| \to \infty$.

Il secondo esempio converge per tutti $x \in \mathbb{R}$, per il criterio del rapporto.

Teo una serie di potenze (i) o converge per tutti $x \in \mathbb{R}$ (ii) o esiste $r \in [0,\infty)$ t.c. la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<r$ e non converge se $|x-x_0|>r$.

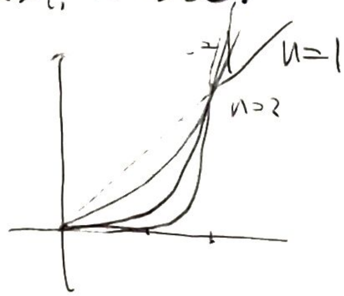
dim). Supponiamo che la serie converge per alcuni $x$ e non per altri.
Sostituendo $x-x_0$ con $x$, basta considerare la serie $\sum a_k x^k$.
Supponiamo che la serie converga per un $x_1 \in \mathbb{R}$.
Allora la serie converge anche per $x$ t.c. $|x|<|x_1|$. Infatti, siccome la serie converge per $x_1$, $a_k(x_1)^k \to 0$. In particolare, $\{|a_k x_1^k|\}$ è limitata, da $C>0$.
Ora sia $|x|<|x_1|$. Applichiamo il criterio della radice a $\sum a_k x_1^k$.
Abbiamo $\lim_{k\to\infty} (a_k x^k)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} (a_k x_1^k)^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{|x|}{|x_1|} = \frac{|x|}{|x_1|} < 1$. Dunque $\sum a_k x^k$ converge.
D'altraparte, sia $x_2 \in \mathbb{R}$ per cui la serie non converge. Se $|x|>|x_2|$, la serie $\sum a_k x^k$ non converge, infatti, se $\sum a_k x^k$ dovesse convergere, per l'argomento precedente, dovrebbe convergere pure $\sum a_k x_2^k$, contraddizione.
Sia $r = \sup\{s \in \mathbb{R} : \text{per tutti } x \in \mathbb{R}, |x|<s, \sum a_k x^k \text{ converge}\}$.
L'insieme non è vuoto (c'è 0) è limitato superiormente (da $|x_2|$).
Ripetendo gli argomenti analoghi, si dimostra che la serie converge assolutamente se $|x|<r$ e non converge se $|x|>r$. (si prende $|x|<|x_1|<s$).
$r$ è detto il raggio di convergenza.

Esempio $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+1}$. Il raggio $r$ di convergenza è 1.

Si nota che, quando una serie di potenze converge, si può definire una funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. Che proprietà ha $f$?

Successioni e serie di funzioni (Epsilon 2, sezioni 8.3 in poi).

Si considera, per $n \in \mathbb{N}$, una successione $\{x^n\}$ su $[0,\infty)$.
Ossia, per ogni $x \in [0,\infty)$, si considera la successione numerica $\{x^n\}$.
Se $x \in [0,1)$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Se $x=1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$. Se $x>1$, $x^n \to \infty$.




Come in questo esempio, quando c'è una successione di funzioni, su alcuni punti può convergere, su altri può non convergere.
Anche sull'insieme $[0,1]$ della convergenza, il limite
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$
è discontinua.
Quando il limite è "buona"?

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni su $X$ e $f$ una funzione su $X$, $E \subset X$.

Def Si dice che $\{f_n\}$ converge puntualmente in $E$ a $f$ se per ogni $x \in E$ $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$. Ossia, per ogni $x$, $\varepsilon > 0$, esiste $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per tutti $n \ge N_{x,\varepsilon}$.

Def Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformemente in $E$ a $f$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. per tutti $x \in E$ e $n \ge N_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Esempi
- Sia $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f(x) = 0$.
  Infatti, siccome $|\sin x| \le 1$, $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n}|\sin x| \le \frac{1}{n} \to 0$.
- Sia $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.
  $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f$, ma non uniformemente.
  Infatti, siano $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Per $x = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, $f_n(x) - f(x) = 1 - \varepsilon > \varepsilon$ se $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

# AM1 Lezione 6 Convergenza uniforme 2025.10.02

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni. $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

<u>Teo</u> Supponiamo che $\{f_n\}$ sono continue su $X$ e converge a $f$ uniformemente. Allora $f$ è continua su $X$.

dim) Siano $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Siccome $\{f_n\}$ converge a $f$ uniformemente, esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. per tutti $x \in X$, $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Siccome $f_{N+1}$ è continua, esiste $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ora, con lo stesso $\delta$, se $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0) + f_{N+1}(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| + |f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

<u>(Non)esempio</u> • $\{x^n\}$. $X = [0,1]$ converge a $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ puntualmente ma non uniformemente. Infatti, anche se $f_n(x) = x^n$ sono continue, il limite $f(x)$ non è continua.

• $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Per ogni $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = [-nxe^{-nx}]_0^1 - \int_0^1 (-ne^{-nx})dx = -ne^{-n} + [-e^{-nx}]_0^1 = 1 - (n+1)e^{-n}$
$\to 1$ per $n \to \infty$. D'altra parte, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

<u>Teo</u> Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\{f_n\}$ converga a $f$ uniformemente. Allora $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

dim) Sia $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme, esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c., per tutti $x \in [a,b]$ e $n > N$, vale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Allora, con lo stesso $N$, per $n > N$,
$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx$
$= \varepsilon$. Questo dimostra che $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

## Serie di funzioni

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Come serie numeriche, si può considerare la successione $\{\sum_{k=1}^n f_k\}$ delle funzioni, che si chiama serie (di funzioni).

Si definisce convergenza puntuale/uniforme per la serie come la convergenza di $\{\sum_{k=0}^n f_k\}$.

<u>Teo</u> Siano $\{f_n\}$ funzioni continue su $X$. Supponiamo che $\{\sum f_k\}$ converga uniformemente. Allora $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ è continua su $X$ e $\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty f_k(x)dx$.

Esercizi Studiare la convergenza

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \log k}$ (confronto con l'integrale)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (rapporto)

Studiare la convergenza semplice/assoluta

- $\sum (-1)^k \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)$

Dire per quali valori di $x$ la serie converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^x + 1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2+3k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k$$

AM2 Lezione 7 Serie di Taylor. 2025. 10. 06

Per una successione $\{a_k\}$. $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie di potenze è $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$.
Abbiamo definito il raggio $r$. In realtà, vale

Teo $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (se il limite esiste).

dim) Per il criterio del rapporto, applicato a $\sum a_k (x-x_0)^k$, ossia si calcola
$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|\,|x-x_0|^{k+1}}{|a_k|\,|x-x_0|^k} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Se il limite $< 1$, ossia se $|x-x_0| < \lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, la serie converge e se $|x-x_0| > \lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, la serie diverge. Per definizione, si ha $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

Teo Per $\sum a_k (x-x_0)^k$ con il raggio di convergenza $r$, $0<\rho<r$, la serie converge uniformemente in $[x_0-\rho, x_0+\rho]$, e assolutamente.

dim) Sia $x \in [x_0-\rho, x_0+\rho]$, allora $|x-x_0| \le \rho$ e sappiamo che $\sum_{k}^{\infty} |a_k| \rho^k$ converge.
Sia $\varepsilon>0$. Allora esiste $N$ t.c. per $n>N$ vale $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k - \sum_{k=0}^{n} |a_k|\rho^k$
$= \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \rho^k < \varepsilon$. Allora per tutti $x \in [x_0-\rho, x_0+\rho]$, si ha
$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x-x_0)^k| - \sum_{k=0}^{n} |a_k(x-x_0)^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,|x-x_0|^k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\rho^k < \varepsilon$.
Ossia, $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ converge uniformemente e assolutamente.

Per il teorema di venerdì scorso, possiamo integrare serie termini per termini.
Poniamo $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$.

Teo Se $|x-x_0| < r$, allora $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$.

dim) La serie converge uniformemente $[x_0-|x-x_0|, x_0+|x-x_0|]$. Consideriamo il caso $x-x_0 \ge 0$, allora è $[2x_0-x, x] \supset [x_0, x]$. Dunque
$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_k (t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left[(t-x_0)^{k+1}\right]_{x_0}^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$!

Notiamo che, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ ha lo stesso raggio di convergenza.
$\lim_{k\to\infty} \frac{|(k-1) a_{k-1}|}{|k\, a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$..

Poniamo $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$. $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)a_{k+1}}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^{k+1}$
$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k - a_0$.
Questo dimostra che, se $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k - a_0 = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, allora
$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k = f(x)$.
Ossia, la serie di potenze si può differenziare termine per termine.

Sia $f$ una funzione definita in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, e differenziabile infinite volte.
Allora possiamo considerare la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

<u>Teo</u> Supponiamo che esista $A>0$ t.c. $|f^{(k)}(x)| < A^k$ per $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$.
Allora si ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

dim). Per la formula di Taylor con il resto di Lagrange (Epsilon 1, pag 6.(9)).
esiste $c$ tra $x_0, x$ t.c. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
Per l'ipotesi, $\left|f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{(A|x|)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ per $n \to 0$, ossia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

<u>Esempi</u> $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$. $\left|f^{(n)}(x)\right| < e^\rho \leq \underbrace{(e^\rho)^k}_{A}$. $x_0 = 0$.

Dunque $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \qquad (|x|<1).$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

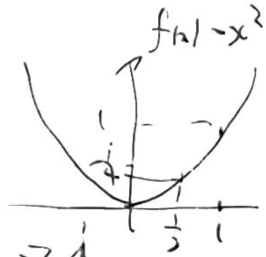
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

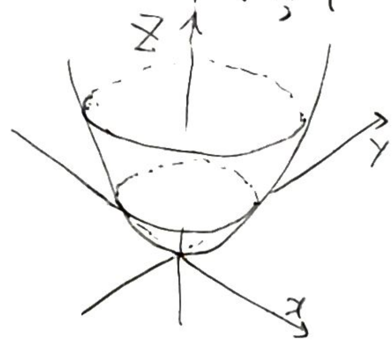
AM2 Lezione 8 Funzioni di più variabili 2025.10.07

## Funzioni di più variabili (Capitolo 1 di Epsilon 2)

In AM1, si è studiata la teoria di funzioni di una variabile $f(x)$.
In AM2, si considerano funzioni di più variabili.
$f(x, y)$ (quando ci sono 2 variabili) $f(x, y, z)$ (3 variabili). $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n$ variabili).
$(x, y)$ si può considerare come un punto in $\mathbb{R}^2$, $(x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$, $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$.
Dunque $f(x,y)$ è una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.
(Più avanti studiamo funzioni da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$).




Ricordiamoci che il grafico di una funzione di una variabile $f(x)$ è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$.
Per una funzione di due variabili, bisogna considerare l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$.
Per esempio, il grafico di $z = x^2 + y^2$ è un paraboloide.



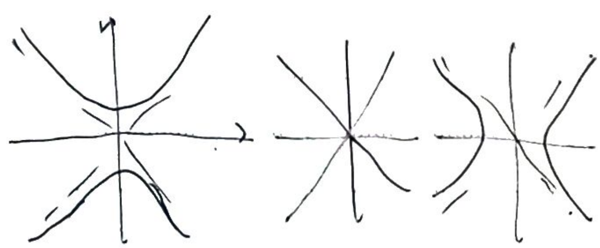

In generale, non è possibile disegnare il grafico di una funzione di più variabili sul piano.
Ciò nonostante possiamo fare il calcolo (derivate, integrale) e studiare le proprietà, generalizzando le idee di AM1.

## Gli insiemi di livelli

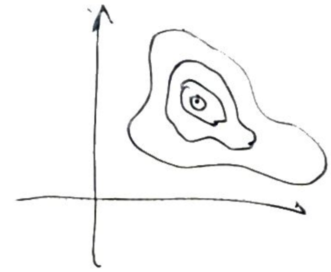
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f$ una funzione definita in $\Omega$ ($\Omega$ è detto il dominio). $f: \Omega \to \mathbb{R}$.
Sia $c \in \mathbb{R}$. L'insieme $\{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$ è detto l'insieme di livello $c$ di $f$.

Esempi
- $f(x,y) = x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sia $c \in \mathbb{R}$.
  se $c > 0$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$ è un cerchio.
  $c = 0$ $\{x^2 + y^2 = 0\}$ è $\{(0,0)\}$.
  $c < 0$, $\{x^2 + y^2 = c\}$ è vuoto.

- $f(x,y) = x^2 - y^2$. Sia $c \in \mathbb{R}$.
  Se $c > 0$ $\{(x,y) : x^2 - y^2 = c\}$ è due iperbole
  $c = 0$ $\{x^2 - y^2 = 0\}$ è due rette
  $c < 0$ $\{x^2 - y^2 = c\}$ è due iperbole



Se $f(x,y)$ rappresenta la pressione atmosferica, gli insiemi di livello sono noti come isobare. Se $f(x,y)$ rappresenta l'altezza dal mare, si chiamano isoipse.

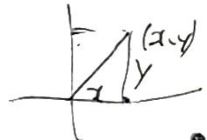


## $\mathbb{R}^n$ e la sua topologia

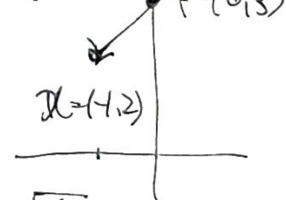
Si scrive $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, ecc.
$\mathbb{R}^n$ si può considerare come uno spazio vettoriale.
Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, si definiscono $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, $a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots ax_n)$.
Si può prendere la base canonica. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j\text{-esimo}}{1}, 0, 0, \dots, 0)$.
Per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$.

Siano $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}$. Il loro prodotto scalare è
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{j=1}^n v_j w_j$. $(= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle)$.
Gode delle seguente proprietà • $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$, • $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2$,
• $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ • $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. $= 0$ se è solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Si dice la norma/lunghezza di $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ il numero $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \left(\sum_{j=1}^n v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Se $n = 2$, $\mathbf{v} = (x, y)$. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ è infatti la lunghezza del vettore $\mathbf{v}$.




Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. La distanza di due punti è definita da $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Si nota che $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è il vettore che va da $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$.



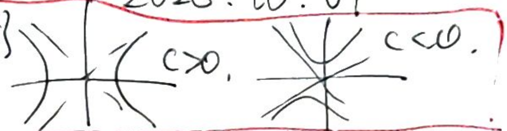

Esempi. In $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (-1, 2)$, $\mathbf{y} = (0, 3)$. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$.
In $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{y} = (0, 3, -1)$. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2-3)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{6}$.

Lemma (Cauchy-Schwarz). Per $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, vale $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.
dim) Sia $t \in \mathbb{R}$. Vale $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + t\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + t\,\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + t^2 \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$
$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$. Come la funzione di $t$, si ha $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$.

Lemma (disuguaglianza triangolare) $\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
dim). $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$.
Per questo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ si può usare come la distanza in $\mathbb{R}^n$.

AM2 Lezione 9 Topologia in $\mathbb{R}^n$ 2025.10.09

$\{(x,y) : x^2 - y^2 = c\}$




<u>Insiemi aperti e chiusi</u>

Siano $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si dice l'intorno sferico di $x$ di raggio $r$, l'insieme $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$.


Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$. $x$ è detto un punto interno di $\Omega$ se esiste $r > 0$ t.c. $B_r(x) \subset \Omega$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice insieme aperto se tutti $x \in \Omega$ sono punti interni.


<u>Esempi/lemma</u> Siano $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Allora $B_r(a)$ è aperto.

dim). Sia $x \in B_r(a)$. Per definizione, $\|x - a\| < r$.

Prendiamo $0 < r_1 < r - \|x - a\|$. Allora $B_{r_1}(x) \subset B_r(a)$.

Infatti, per ogni $y \in B_{r_1}(x)$, vale che $\|y - x\| < r_1$. Allora segue che $\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \le \|y - x\| + \|x - a\| < r_1 + \|x - a\| < r$. Dunque $y \in B_r(a)$.

Questo dimostra che ogni $y \in B_r(a)$ è interno.

<u>Def</u> Sia $\{x^{(k)}\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. Ossia, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Sia $a \in \mathbb{R}^n$.

Si dice che $\{x^{(k)}\}$ converge a $a$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per $k > K$ $\|x^{(k)} - a\| < \varepsilon$. Si scrive $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, oppure $x^{(k)} \to a$ per $k \to \infty$.

Equivalentemente, $\{x^{(k)}\}$ converge a $a$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, $x^{(k)} \in B_\varepsilon(a)$ definitivamente.

Ricordiamo che $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. $\|x^{(k)}\|^2 \to 0$ (per $k \to \infty$) se e solo se per tutti $j = 1, \dots, n$, vale che $x_j^{(k)} \to 0$ (per $k \to \infty$). (Infatti, $x_j^{(k)2} \le \|x^{(k)}\|^2$. viceversa, il limite della somma è la somma del limite).

In particolare, $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ converge a $a \in \mathbb{R}^n$ se e solo se per tutti $j = 1, \dots, n$ $x_j^{(k)}$ converge a $a_j$ per $k \to \infty$.

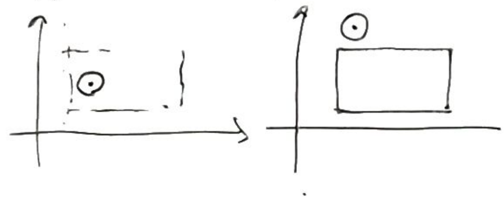
<u>Def</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\Omega$ è detto chiuso se, per tutte le successioni $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$ convergente a $a \in \mathbb{R}^n$, vale che $a \in \Omega$.

<u>Teo</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\Omega$ è aperto se e solo se $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è chiuso.

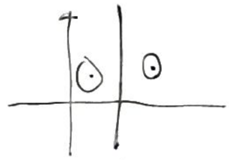
dim) Supponiamo che $\Omega$ è dimostriamo che $\Omega^c$ è chiuso per assurdo.

Dunque supponiamo che esista $\{x^{(k)}\} \subset \Omega^c$, $x^{(k)} \to a \notin \Omega^c$, ossia $a \in \Omega$.
Siccome $\Omega$ è aperto, esiste $r > 0$ t.c. $B_r(a) \subset \Omega$. Esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per $k > K$ vale $\|x^{(k)} - a\| < r$. Significa che $x^{(k)} \in B_r(a) \subset \Omega$, contraddizione.
D'altra parte, supponiamo che $\Omega^c$ sia chiuso e dimostriamo che $\Omega$ è aperto, per assurdo.
Dunque supponiamo che, esiste $a \in \Omega$ t.c. per tutti $r > 0$ non vale che $B_r(a) \subset \Omega$, ossia $B_r(a) \setminus \Omega$ non è vuoto. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si può prendere un punto $x^{(k)} \in B_{\frac{1}{k}}(a) \setminus \Omega \subset \Omega^c$. Siccome $\|x^{(k)} - a\| < \frac{1}{k}$, si ha che $x^{(k)} \to a$, $k \to \infty$
D'altra parte, siccome $\{x^{(k)}\} \subset \Omega^c$, segue che $a \in \Omega^c$ per l'ipotesi. Contraddizione.

Esempi In $\mathbb{R}^2$, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1 \text{ e } a_2 < x_2 < b_2\}$ è aperto.
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \le x_1 \le b_1 \text{ e } a_2 \le x_2 \le b_2\}$ è chiuso
$(a_1, b_1) \times [a_2, b_2]$ non è né aperto né chiuso



In $\mathbb{R}^2$, $\{(x_1, x_2) : x_1 = a\}$ è chiuso



Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^n$ si dice un punto di accumulazione se esiste $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$ t.c. $x^{(k)} \to x$ (per $k \to \infty$). Non necessariamente $x \in \Omega$.. $(0,0)$ per $(0,1) \times (0,1)$.

Limiti di funzioni e continuità

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ un punto di accumulazione di $\Omega$. $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Def Si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite di $f$ per $x$ che tende a $x_0$ se per ogni successione $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$ t.c. $x^{(k)} \neq x_0$, $x^{(k)} \to x_0$, vale che $f(x^{(k)}) \to \ell$ per $k \to \infty$.
(si considerano anche i casi in cui $\ell = \pm\infty$ con una definizione analoga).
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Esempi $f(x, y) = x^2 y$. $\Omega = \mathbb{R}^2$. Si ha $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 y = 0$. Infatti, sia $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\}$ t.c. $(x^{(k)}, y^{(k)}) \to (0,0)$.
Allora $x^{(k)} \to 0$, $y^{(k)} \to 0$ Dunque $(x^{(k)})^2 y^{(k)} \to 0$.
- $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Non ha il limite per $x \to (0,0)$.
Infatti, $(\frac{1}{k}, 0) \to (0,0)$ e $f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \to 0$, mentre $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$,
$f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1/k^2}{2/k^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

Def $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice continua in $x_0 \in \Omega$ se, o $x_0$ non è un punto di accumulazione, o $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.