Corso di Analisi Matematica 1
CdL triennale in Ingegneria dell'Edilizia,
Ingegneria Edile-Architettura
a.a. 2019-20

Y. Tanimoto, P. Roselli, J. Garofali

Integrazione - Soluzioni

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti immediati

a) $\int (1 - \sqrt[3]{x})^3 dx;$	e) $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx;$
b) $\int \sin(4x) \cos(4x) dx;$	f) $\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx;$
c) $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx;$	g) $\int (\tan^2(x) - x) dx;$
d) $\int \frac{1}{\sin^2(2x) \cos^2(2x)} dx;$	h) $\int \sin(x) \cos(2x) dx;$

Soluzione. Ricordiamo che per integrale (indefinito) di una funzione f , denotato con $\int f(x) dx$, intendiamo l'insieme delle primitive di f . Ricordiamo inoltre che, dato un intervallo I in cui f sia definita e data F tale che $F' = f$ su I , una qualunque primitiva di f su I è della forma $F + c$, con c costante reale arbitraria. Nelle soluzioni utilizzeremo il classico abuso di notazione scrivendo $\int f(x) dx = F(x) + c$.

a) Si ha $(1 - \sqrt[3]{x})^3 = 1 - 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - x$, dunque

$$\int (1 - \sqrt[3]{x})^3 dx = x - \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^2}{2} + c.$$

b) Ricordando che $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, si ha:

$$\sin(4x) \cos(4x) = \frac{1}{2} \sin(8x) = -\frac{1}{16}(-8 \sin(8x)), \text{ dunque si trova}$$

$$\int \sin(4x) \cos(4x) dx = -\frac{1}{16} \cos(8x) + c.$$

c) Osserviamo che $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, dunque l'integrale cercato è $x - \arctan(x) + c$.

d) Osserviamo che

$$\frac{1}{\sin^2(2x) \cos^2(2x)} = \frac{\cos^2(2x) + \sin^2(2x)}{\sin^2(2x) \cos^2(2x)} = \frac{1}{\sin^2(2x)} + \frac{1}{\cos^2(2x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sin^2(2x)} + \frac{2}{\cos^2(2x)} \right), \text{ dunque concludiamo che}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(2x) \cos^2(2x)} dx = \frac{1}{2} (-\cotg(2x) + \tan(2x)) + c.$$

e) Osserviamo che $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$, dunque si trova

$$\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)).$$

f) Poiché $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, si ha $\frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1$, dunque l'integrale cercato è $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$.

g) Ricordando che la derivata di $f(x) = \tan(x)$ è $f'(x) = \tan^2(x) + 1$, si ha $\tan^2(x) - x = f'(x) - (x+1)$. Concludiamo che

$$\int (\tan^2(x) - x) dx = \tan(x) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + c.$$

h) Ricordando che $\sin(x) \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$, troviamo che

$$\int \sin(x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) + \cos(x) \right) + c.$$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti con il metodo di sostituzione

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

f) $\int \frac{e^x - 1}{1 + xe^x} dx;$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x}} dx;$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

c) $\int \sqrt{\cos(x)} \sin(x) dx;$

h) $\int \cotg(x) dx;$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}} dx;$

i) $\int \frac{\tan(x)}{\log(\cos(x))} dx;$

e) $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx;$

j) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx.$

Soluzione. Nelle soluzioni seguenti scegliamo di non menzionare la nuova variabile (i.e. $y = g(x)$) nel caso in cui l'integrale sia già nella forma $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(g(x)) d(g(x)) = F(g(x)) + c$, nella notazione di cui sopra.

- a) Abbiamo $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2} + c$.
- b) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -2 \int \frac{1}{1-\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = -2 \int \frac{1}{1-\sqrt{x}} d(1-\sqrt{x}) = -2 \log|1-\sqrt{x}| + c$.
- c) $\int \sqrt{\cos(x)} \sin(x) dx = - \int \sqrt{\cos(x)} d(\cos(x)) = -\frac{2}{3}(\cos(x))^{\frac{3}{2}} + c$.
- d) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2/3}} dx$, quindi posto $y = \sqrt{\frac{2}{3}}x$, si ha $dy = \sqrt{\frac{2}{3}} dx$ e l'integrale diventa

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(y) + c,$$

dunque l'integrale cercato è $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + c$.

- e) Abbiamo $\frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$, dunque $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx = 2 \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1} = 2 \arctan(e^x) + c$.
- f) Posto $y = 1 + xe^x$, abbiamo $dy = (e^x + xe^x)dx$. Aggiungendo e sottraendo xe^x al numeratore dell'integrando, $\frac{e^x - 1}{1 + xe^x} = \frac{e^x + xe^x}{1 + xe^x} - 1$, dunque integrando troviamo $\int \frac{e^x - 1}{1 + xe^x} dx = \int \frac{e^x + xe^x}{1 + xe^x} dx - x = \int \frac{1}{y} dy - x$, che è immediato. Concludiamo quindi che $\int \frac{e^x - 1}{1 + xe^x} dx = \log|1 + xe^x| - x + c$.
- g) Considerando l'identità $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$, possiamo intuire che la sostituzione buona in questo caso è $x = \sinh(y)$, così che $dx = \cosh(y)dy$. Andando a sostituire troviamo $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\cosh(y)}{\sqrt{\cosh^2(y)}} dy = \int dy = y + c$. Concludiamo che $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$.

Osservazione: l'ultima identità è contenuta nella *Proposizione 5*

delle note del corso. Per ricavarla basta risolvere nella variabile y l'equazione $2x = e^y - e^{-y}$ che diventa una semplice equazione di secondo grado nella variabile ausiliaria $t = e^y$.

$$h) \int \cotg(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{1}{\sin(x)} d(\sin(x)) = \log |\sin(x)| + c.$$

$$i) \text{ Posto } y = \log(\cos(x)), \text{ si ha } dy = \frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))dx = -\tan(x)dx.$$

Dunque l'integrale nella nuova variabile è $-\int \frac{1}{y} dy$ che è immediato.

Dunque l'integrale cercato è $-\log |\log(\cos(x))| + c$.

j) Qui si usa una sostituzione di notevole importanza: $t = \tan(\frac{x}{2})$. Con questa variabile possiamo parametrizzare il seno e il coseno nel seguente modo:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Lo studente può facilmente ricavare le formule precedenti usando l'identità

$$1+t^2 = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{2}{1+\cos(x)}$$

Tornando all'integrale, conviene invertire il cambio di variabili per trovare il differenziale dx . Abbiamo $x = 2 \arctan(t)$, dunque

$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Sostituendo nell'integrale

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + c.$$

Dunque l'integrale cercato è $\log \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c$, che può (o meglio dovrebbe) essere riscritto utilizzando una forma migliore. Dalle formule di bisezione

del seno e coseno si trova $\tan \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{|\sin(x)|}{1+\cos(x)}$, dove

nell'ultima identità abbiamo moltiplicato e diviso per $\sqrt{1+\cos(x)}$.

Dunque la soluzione riscritta in questo modo diventa

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \log \left| \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \right| + c.$$

3. Calcolare i seguenti integrali indefiniti tramite integrazione per parti

$$a) \int x^2 \cos(2x) dx;$$

$$d) \int x \log^2(x) dx;$$

$$b) \int \sin(x)e^{-x} dx;$$

$$e) \int \arctan(x) dx;$$

$$c) \int x^2 \log(x) dx;$$

$$f) \int x \arctan(x) dx;$$

Soluzione.

a) Integrando il coseno otteniamo

$$I = \int x^2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - \int x \sin(2x) dx \text{ e ripetendo l'integrazione}$$

$$\text{per parti } \int x \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx.$$

$$\text{Dunque concludiamo che } I = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2}x \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + c.$$

b) Qui è indifferente chi scegliamo di integrare, ad esempio il seno, e poi il coseno:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(x)e^{-x} dx = -\cos(x)e^{-x} - \int \cos(x)e^{-x} dx = \\ &= -\cos(x)e^{-x} - (\sin(x)e^{-x} + \int \sin(x)e^{-x} dx) = \\ &= -\cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x} - I \end{aligned}$$

Otteniamo quindi $2I = -\cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x}$, ovvero

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) + c.$$

c) Qui conviene integrare la potenza di x , ottenendo

$$I = \int x^2 \log(x) dx = \frac{x^3}{3} \log(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \log(x) - \frac{x^3}{9} + c.$$

d) Come prima integriamo x , ottenendo

$$\begin{aligned} I &= \int x \log^2(x) dx = \frac{x^2}{2} \log^2(x) - \int x \log(x) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2(x) - \left(\frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{1}{2} \int x dx \right) = \frac{x^2}{2} \left(\log^2(x) - \log(x) + \frac{1}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

e) Qui si usa il trucco "usuale" di scrivere $\arctan(x) = 1 \cdot \arctan(x)$ e integrare la costante 1, così che

$$\begin{aligned} I &= \int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c. \end{aligned}$$

f) Integrando x otteniamo $I = \int x \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2}$.

L'ultimo integrale è stato svolto in precedenza, concludiamo quindi che

$$I = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan(x) + c.$$

4. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, dimostrare la seguente identità:

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

Soluzione. Osserviamo che abbiamo ommesso, con ulteriore abuso di notazione, la costante arbitraria, ovvero abbiamo richiesto soltanto di dimostrare che il secondo membro è una primitiva di $x^n e^{\alpha x}$.

Sia $I_n = \int x^n e^{\alpha x} dx$, vogliamo dimostrare la formula per induzione su n (in alternativa potremmo semplicemente dimostrare che la derivata del secondo membro è $x^n e^{\alpha x}$, ma questo non sarebbe un esercizio sull'integrazione!).

Il caso $n = 0$ è immediato, $I_0 = \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$.

Assumiamo l'identità vera per n e dimostriamola per $n + 1$ procedendo ad un'integrazione per parti in modo tale da abbassare il grado del monomio:

$$I_{n+1} = \int x^{n+1} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^{n+1} e^{\alpha x} - \frac{n+1}{\alpha} \int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^{n+1} e^{\alpha x} - \frac{n+1}{\alpha} I_n.$$

Per ipotesi induttiva

$$I_n = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \binom{n}{k} x^{n-k} = e^{\alpha x} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha^k} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo effettuato un cambio di indice della sommatoria $k \mapsto k + 1$. Dunque

$$I_{n+1} = e^{\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{(n+1)(k-1)!}{\alpha^{k+1}} \binom{n}{k-1} x^{(n+1)-k} \right).$$

Per concludere la dimostrazione osserviamo che

$(n+1)(k-1)! \binom{n}{k-1} = k! \binom{n+1}{k}$ e che $\frac{1}{\alpha} x^{n+1}$ corrisponde al termine per $k = 0$ nella sommatoria.

5. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali

- a) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$;
- b) $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$;
- c) $\int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$;
- d) $\int \frac{1}{x(x+2)^2} dx$.

Soluzione.

$$\text{a) } \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx = x + 2 \int \frac{1}{x^2 - 1} dx.$$

$$\text{Ora } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right), \text{ dunque}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx &= x + 2 \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= x + (\log|x-1| - \log|x+1|) + c = x + \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c. \end{aligned}$$

- b) Osserviamo che $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ e che il secondo fattore è irriducibile. Cerchiamo A, B, C tali che

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Risolviendo il sistema che ne deriva troviamo $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}$.

Ora $\frac{A}{x - 1}$ si integra immediatamente, $\int \frac{A}{x - 1} dx = A \log|x - 1| + c$, mentre il secondo addendo va manipolato come segue:

$$\frac{Bx}{x^2 + x + 1} = \frac{B}{2} \left(\frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) - \frac{B}{2} \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right).$$

Il primo addendo si integra immediatamente,

$$\int \frac{B}{2} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \frac{B}{2} \log(x^2 + x + 1) + c,$$

mentre il secondo va trattato insieme al restante $\frac{C}{x^2 + x + 1}$.

Con il completamento del quadrato troviamo

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right)^2 + 1 \right),$$

quindi

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right),$$

dove all'ultimo abbiamo usato la variabile $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right)$. Troviamo infine che l'integrale cercato è

$$A \log|x - 1| + \frac{B}{2} \log(x^2 + x + 1) + \left(C - \frac{B}{2} \right) \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right)$$

Andando a sostituire i valori di A, B, C trovati sopra otteniamo

$$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \log|x - 1| - \frac{1}{6} \log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right).$$

- c) Abbiamo $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x + 1)(x + 2)$. Dobbiamo trovare A, B, C tali che $\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}$. Risolvendo il sistema si trova $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. Dunque

$$\int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} \log|x| - \log|x + 1| + \frac{1}{2} \log|x + 2| + c = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|x^2 + 2x|}{(x + 1)^2} \right) + c.$$

6. Calcolare i seguenti integrali definiti

- a) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$;
- b) $\int_1^e \frac{\sqrt{\log(1 + \log(x))}}{x + x \log(x)} dx$;
- c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx$;
- d) $\int_{-3}^3 x \sin^2(x) dx$.

Soluzione.

- a) Dall'esercizio 4) sappiamo che una primitiva di $x^2 e^{-x}$ è $f(x) := -e^{-x} (x^2 + 2x + 2)$, dunque

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = f(1) - f(0) = -\frac{5}{e} + 2.$$

- b) Posto $y = \log(1 + \log(x))$, $dy = \frac{1}{x + x \log(x)} dx$, dunque

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\log(1 + \log(x))}}{x + x \log(x)} dx = \int_0^{\log(2)} \sqrt{y} dy = \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\log(2)} = \frac{2}{3} (\log(2))^{\frac{3}{2}}.$$

- c) Siccome la funzione integranda è pari

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1 + x^6} dx = \frac{2}{3} [\arctan(x^3)]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

- d) Siccome la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a $x \leftrightarrow -x$, concludiamo che $\int_{-3}^3 x \sin^2(x) dx = 0$.