

Corso di Analisi Matematica 1
CdL triennale in Ingegneria dell'Edilizia,
Ingegneria Edile-Architettura
a.a. 2019-20

Y. Tanimoto, P. Roselli, J. Garofali

Tutorato del 10/10/19

Scegliamo di seguire la seguente notazione: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati e calcolare il loro estremo superiore e inferiore. Per ciascuno di essi stabilire poi se si tratta di massimi e minimi:

- a) $A = \{x_n = \frac{1-2n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$;
b) $B = \{x_n = (-1)^n \frac{5}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$;
c) $C = \{x_n = n + \frac{10}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. Verificare le seguenti identità per $k, n \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$:

$$a) \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}; \quad b) \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3. Dimostrare, usando il principio di induzione, le seguenti proposizioni:

$$(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{Binomio di Newton});$$

$$(b) \quad \forall n \geq 6, \quad 2^n \leq (n-1)!;$$

$$(c) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$(d) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2;$$

$$(e) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$(f) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 6^n - 1 \text{ è divisibile per } 5;$$

$$(g) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (-1, 0), (1+x)^n < 1 + nx + n^2x^2.$$

4. Risolvere le seguenti equazioni:

a) $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0;$

b) $x^4 - x^2 - 12 = 0;$

c) $\sqrt{x^2 - 4} = x + 1;$

d) $\sqrt{7 - \sqrt{x-1}} = \sqrt{x-6};$

e) $2^{x^2} = \frac{1}{4}8^x;$

f) $3^{\sqrt{2x-3}} = \frac{3^x}{27}.$

5. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2 - x};$

b) $||x| - 1| > |x - 2|;$

c) $|3x - 1| > x;$

d) $\sqrt{x^2 - 16} > |x + 1|;$

e) $\frac{9^x}{3^{x+1}} < 81;$

f) $\log_{1/2} \left(\frac{x}{2x-1} \right) \geq 0$