Appello3.

(1) **Q1**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Completare la formula.

$$\sin x = 0 + x + \boxed{\text{a}}x^2 - \frac{1}{\boxed{\text{b}}}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{6 \quad \checkmark}$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{\boxed{\text{c}}}x^2 + \frac{1}{\boxed{\text{d}}}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{c}}$: $\boxed{2 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{6 \quad \checkmark}$

$$\tan(2x^3) = \boxed{\text{e}} + \boxed{\text{f}}x + \boxed{\text{g}}x^2 + \boxed{\text{h}}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{e}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{f}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{g}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{h}}$: $\boxed{2 \quad \checkmark}$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x) + \alpha \sin(x) - 2}{\tan(2x^3)}.$$

Questo limite converge per $\alpha = \boxed{\text{i}}$.

$\boxed{\text{i}}$: $\boxed{-1 \quad \checkmark}$

In tal caso, il limite è $\frac{\boxed{\text{j}}}{\boxed{\text{k}}}$.

$\boxed{\text{j}}$: $\boxed{1 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{k}}$: $\boxed{6 \quad \checkmark}$

> Usare la formula di Taylor $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + o(x^3)$, ecc. Per una funzione composta come $f(x^2)$ vale $f(x^2) = f(0) + f'(0)x^2 + \frac{1}{2!}f''(0)(x^2)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x^2)^3 + o(x^6)$ oppure $f(2x) = f(0) + f'(0)(2x)^2 + \frac{1}{2!}f''(0)(2x)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(2x)^3 + o(x^3)$. . Per determinare α, paragonare il numeratore e il denominatore e scegliere α tale che abbiano lo stesso grado di infinitesimo.

(2) **Q1**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Completare la formula.

$$\sin(2x) = 0 + 2x + \boxed{\text{a}}x^2 - \frac{\boxed{\text{b}}}{6}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{8 \quad \checkmark}$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \boxed{\text{c}}x^2 + \frac{\boxed{\text{d}}}{3}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{c}}$: $\boxed{2 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{4 \ \checkmark}$

$$\tan(x^3) = \boxed{\text{e}} + \boxed{\text{f}}x + \boxed{\text{g}}x^2 + \boxed{\text{h}}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{e}}$: $\boxed{0 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{f}}$: $\boxed{0 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{g}}$: $\boxed{0 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{h}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + \cos(2x) + \alpha \sin(2x) - 2}{\tan(x^3)}.$$

Questo limite converge per $\alpha = \boxed{\text{i}}$.

$\boxed{\text{i}}$: $\boxed{-1 \ \checkmark}$

In tal caso, il limite è $\dfrac{\boxed{\text{j}}}{\boxed{\text{k}}}$.

$\boxed{\text{j}}$: $\boxed{8 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{k}}$: $\boxed{3 \ \checkmark}$

(3) **Q1**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Completare la formula.

$$\sin(-x) = 0 + \boxed{\text{a}}x + \frac{\boxed{\text{b}}}{6}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{-1 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{-1 \ \checkmark}$

$$e^{-x} = 1 - x + \boxed{\text{c}}x^2 + \frac{\boxed{\text{d}}}{6}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{c}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{-1 \ \checkmark}$

$$\tan(3x^3) = \boxed{\text{e}} + \boxed{\text{f}}x + \boxed{\text{g}}x^2 + \boxed{\text{h}}x^3 + o(x^3) \text{ vicino a } 0$$

$\boxed{\text{e}}$: $\boxed{0 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{f}}$: $\boxed{0 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{g}}$: $\boxed{0 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{h}}$: $\boxed{3 \ \checkmark}$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + \cos(-x) + \alpha \sin(-x) - 2}{\tan(3x^3)}.$$

Questo limite converge per $\alpha = \boxed{\text{i}}$.

$\boxed{\text{i}}$: $\boxed{-1 \ \checkmark}$

In tal caso, il limite è $-\dfrac{\boxed{\text{j}}}{\boxed{\text{k}}}$.

$\boxed{\text{j}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{k}}$: $\boxed{9 \ \checkmark}$

(4) **Q2**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente** 0 **o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Studiare la seguente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}-1}{n!}(3x)^n$, al variale di $x \in \mathbb{R}$.

Innanzitutto, vediamo una somma parziale. $\sum_{n=0}^{1} \frac{3^{2n}-1}{n!}(3x)^n$ con $x = 1$ si ottiene $\boxed{\text{a}}$.

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{24 \quad \checkmark}$

Per usare il criterio del rapporto, si pone $a_n = \frac{3^{2n}-1}{n!}(3x)^n$ e consideriamo $x > 0$.

Completare la formula.

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{b}} \cdot 3^{2n} - 1}{(n+1)!} \cdot \boxed{\text{c}} \cdot x^{n+1}$$

$\boxed{\text{b}}$: $\boxed{9 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{c}}$: $\boxed{3 \quad \checkmark}$

Vale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\text{d}}$.

$\boxed{\text{d}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$, e dunque la serie converge per

- tutti $x > 0$. ✓
- $0 < x < 1$.
- $x < 2$.
- $x < 9$.
- nessun $x > 0$.

Per $x \leq 0$, la serie converge per

- tutti $x \leq 0$. ✓
- $-1 < x \leq 0$.
- $-2 < x \leq 0$.
- $x > -9$.
- nessun $x \leq 0$.
- solo $x = 0$.

La somma parziale vuol dire la definizione della sommatoria: $\sum_{n=0}^{1} a_n = a_0 + a_1$, dunque basta applicare $n = 0, 1$ nella serie concreta e sommare i numeri.
Per applicare il criterio del rapporto, si considera il limite $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ricordare che $(n+1)! = (n+1)n(n-1)\cdots 2\cdot 1$, $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n = \underbrace{3\cdots 3}_{(n+1)\text{-volte}}$.
Se questo limite $R < 1$, allora la serie (per tale x) converge, mentre se $R > 1$ la serie diverge.
Il criterio si applica a serie con termini positivi. D'altra parte, se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora converge anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ (convergenza assoluta).
Se $R = 1$, bisogna studare la convergenza con altri criteri.

(5) **Q2**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Studiare la seguente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{n!}(2x)^n$, al variale di $x \in \mathbb{R}$.

Innanzitutto, vediamo una somma parziale. $\sum_{n=0}^{1} \frac{2^{2n}-1}{n!}(2x)^n$ con $x = 2$ si ottiene $\boxed{\text{a}}$.

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{12 \quad \checkmark}$

Per usare il criterio del rapporto, si pone $a_n = \frac{2^{2n}-1}{n!}(2x)^n$ e consideriamo $x > 0$.

Completare la formula.

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{b}} \cdot 2^{2n} - 1}{(n+1)!} \cdot \boxed{\text{c}} \cdot x^{n+1}$$

$\boxed{\text{b}}$: $\boxed{4 \quad \checkmark}$ $\boxed{\text{c}}$: $\boxed{2 \quad \checkmark}$

Vale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\text{d}}$.

$\boxed{\text{d}}$: $\boxed{0 \quad \checkmark}$, e dunque la serie converge per

- tutti $x > 0$. ✓
- $0 < x < 1$.
- $x < 2$.
- $x < 4$.
- nessun $x > 0$.

Per $x \leq 0$, la serie converge per

- tutti $x \leq 0$. ✓
- $-1 < x \leq 0$.
- $-2 < x \leq 0$.
- $x > -4$.
- nessun $x \leq 0$.
- solo $x = 0$.

(6) **Q3**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Considerare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{|x|e^x}{1-x}.$$

La funzione $f(x)$ non è definita su tutta la retta reale $\mathbb{R}$. Scegliere tutti i punti che non sono nel dominio naturale di $f(x)$.

- $-e$
- -1
- $-\frac{1}{e}$
- 0
- $\frac{1}{e}$
- 1 ✓
- e

Scegliere tutti gli asintoti di $f(x)$.

- $y = 0$ ✓

- $y = 1$
- $y = e$
- $x = -1$
- $x = 0$
- $x = 1$ ✓
- $x = e$
- $y = x$
- $y = -x$
- $y = ex$

Nella semiretta $x > 0$, $f(x)$ ammette un massimo locale in $x_1 = \frac{\boxed{a}}{\boxed{b}} + \frac{\sqrt{\boxed{c}}}{\boxed{d}}$ (non c'è bisogno di calcolare $f(x_1)$). Riempire gli spazi.

$\boxed{a}$: $\boxed{1\ ✓}$ $\boxed{b}$: $\boxed{2\ ✓}$ $\boxed{c}$: $\boxed{5\ ✓}$ $\boxed{d}$: $\boxed{2\ ✓}$

In totale, $f(x)$ ammette $\boxed{e}$ punti(o) estremi(o).

$\boxed{e}$: $\boxed{3\ ✓}$

Scegliere il comportamento di $f(x)$ nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- strettamente decrescente
- strettamente crescente
- nè crescente nè descrescente ✓

> Per determinare il dominio naturale di una funzione, basta osservare le componenti. Per esempio, $\sqrt{y}$ è definita solo per $y \geq 0$, $\frac{1}{y-a}$ è per $y \neq a$, $\log y$ è per $y > 0$, ecc. Basta eliminare tutti i punti dove le componenti non sono definite.
> Gli asintoti ci possono essere per i limiti $x \to \pm\infty$, e anche $x \to a$, dove a è un bordo del dominio.
> Per la derivata, utile è la regola $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. Quando c'è il valore assoluto $|y|$, bisogna separare i casi $y \geq 0$ e $y < 0$. In questo caso, $f(x) = \frac{|x|e^x}{1-x}$, $f'(x) = \frac{(e^x+xe^x)(x-1)+xe^x}{(1-x)^2}$ $(0 \leq x)$ e $= -\frac{(e^x+xe^x)(x-1)+xe^x}{(1-x)^2}$ $(x < 0)$.
> Se $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)$ pu avere un punto estremo, ma bisogna verificare che il comportamento cambia da $x < x_0$ e $x > x_0$. Ci vuole un controllo simile anche sui punti dove la definizione di $f(x)$ cambia (per esempio, $|y| = y(y \geq 0), -y(y < 0)$).
> Se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0 in tutto un intervallo, allora $f(x)$ è crescente (decrescente) lì.

(7) **Q3**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente** 0 **o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Considerare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{|x|e^{-x}}{1+x}.$$

La funzione $f(x)$ non è definita su tutta la retta reale $\mathbb{R}$. Scegliere tutti i punti che non sono nel dominio naturale di $f(x)$.

- $-e$
- -1 ✓
- $-\frac{1}{e}$
- 0
- $\frac{1}{e}$
- 1
- e

Scegliere tutti gli asintoti di $f(x)$.

- $y = 0$ ✓
- $y = -1$
- $y = -e$
- $x = -1$ ✓
- $x = 0$
- $x = 1$
- $x = -e$
- $y = x$
- $y = -x$
- $y = -ex$

Nella semiretta $x > 0$, $f(x)$ ammette un massimo locale in $x_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{a}}}}{\boxed{\text{b}}} - \frac{\boxed{\text{c}}}{\boxed{\text{d}}}$ (non c'è bisogno di calcolare $f(x_1)$). Riempire gli spazi.

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{5 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{2 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{c}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{2 \ \checkmark}$

In totale, $f(x)$ ammette $\boxed{\text{e}}$ punti(o) estremi(o).

$\boxed{\text{e}}$: $\boxed{3 \ \checkmark}$

Scegliere il comportamento di $f(x)$ nell'intervallo $[2, 3]$.

- strettamente decrescente ✓
- strettamente crescente
- nè crescente nè descrescente

(8) **Q3**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente** 0 **o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Considerare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{|x|e^{\frac{x}{2}}}{2 - x}.$$

La funzione $f(x)$ non è definita su tutta la retta reale $\mathbb{R}$. Scegliere tutti i punti che non sono nel dominio naturale di $f(x)$.

- $-e$
- -2
- -1
- $-\frac{1}{e}$
- 0
- $\frac{1}{e}$
- 1

- 2 ✓
- e

Scegliere tutti gli asintoti di $f(x)$.

- $y = 0$ ✓
- $y = 1$
- $y = e$
- $x = 0$
- $x = 1$
- $x = 2$ ✓
- $x = e$
- $y = x$
- $y = -x$
- $y = ex$

Nella semiretta $x > 0$, $f(x)$ ammette un massimo locale in $x_1 = \boxed{\text{a}} + \sqrt{\boxed{\text{b}}}$ (non c'è bisogno di calcolare $f(x_1)$). Riempire gli spazi.

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{1 \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{5 \checkmark}$

In totale, $f(x)$ ammette $\boxed{\text{e}}$ punti(o) estremi(o).

$\boxed{\text{e}}$: $\boxed{3 \checkmark}$

Scegliere il comportamento di $f(x)$ nell'intervallo $[-3, -2]$.

- strettamente decrescente
- strettamente crescente ✓
- nè crescente nè descrescente

(9) **Q4**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Completare la formula.

$$\frac{x}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{\boxed{\text{a}}}{\boxed{\text{b}}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{c}}x + 1}{x^2 + \boxed{\text{d}}} + \frac{\boxed{\text{e}}}{x + \boxed{\text{f}}} \right).$$

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{1 \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{5 \checkmark}$ $\boxed{\text{c}}$: $\boxed{2 \checkmark}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{1 \checkmark}$ $\boxed{\text{e}}$: $\boxed{-2 \checkmark}$ $\boxed{\text{f}}$: $\boxed{2 \checkmark}$

Scegliere una primitiva di $\frac{x}{x^2+1}$.

- $\arctan x$
- $\frac{x}{2} \arctan x$
- $x \arctan(x^2 + 1)$
- $\frac{1}{4} \log(x^2 + 1)$
- $\frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$ ✓
- $\log(x(x^2 + 1))$
- $\frac{1}{4} \arcsin(x^2 + 1)$
- $\frac{1}{2} \arcsin(x^2 + 1)$
- $\arcsin(x(x^2 + 1))$

Scegliere una primitiva di $\frac{2}{x^2+1}$.

- $\arctan(2x)$
- $\arctan(\frac{x}{2})$
- $2 \arctan x$ ✓

- $(\arctan x)^2$
- $\arcsin(2x)$
- $2 \arcsin x$
- $(\arcsin x)^2$
- $\arcsin(\frac{x}{2})$

Calcolare l'integrale, riempiendo gli spazi.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+2x^2+x+2}dx = \frac{\boxed{\text{g}}}{\boxed{\text{h}}}\pi - \frac{\boxed{\text{i}}}{\boxed{\text{j}}}\log 3 + \frac{\boxed{\text{k}}}{\boxed{\text{l}}}\log 2.$$

$\boxed{\text{g}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{h}}$: $\boxed{20 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{i}}$: $\boxed{2 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{j}}$: $\boxed{5 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{k}}$: $\boxed{3 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{l}}$: $\boxed{5 \ \checkmark}$

> Una frazione, per esempio, $\frac{1}{(x-a)(x^2+b)}$ si può scrivere nella forma $\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b}$. I coefficienti A, B, C si possono trovare dalla equazione $\frac{1}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b}$.
> Una primitiva di $\frac{1}{x-a}$ è $\log(x-a)$, e una primitiva di $\frac{1}{x^2+1}$ è $\arctan x$.

(10) **Q4**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Completare la formula.

$$\frac{x}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{\boxed{\text{a}}}{\boxed{\text{b}}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{c}}}{x+\boxed{\text{d}}} + \frac{\boxed{\text{e}}x+1}{x^2+\boxed{\text{f}}} \right).$$

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{5 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{c}}$: $\boxed{-2 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{2 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{e}}$: $\boxed{2 \ \checkmark}$ $\boxed{\text{f}}$: $\boxed{1 \ \checkmark}$

Scegliere una primitiva di $\frac{2}{x^2+1}$.

- $\arctan(2x)$
- $\arctan(\frac{x}{2})$
- $2 \arctan x$ ✓
- $(\arctan x)^2$
- $\arcsin(2x)$
- $2 \arcsin x$
- $(\arcsin x)^2$
- $\arcsin(\frac{x}{2})$

Scegliere una primitiva di $\frac{x}{x^2+1}$.

- $\arctan x$
- $\frac{x}{2} \arctan x$
- $x \arctan(x^2+1)$
- $\frac{1}{4} \log(x^2+1)$
- $\frac{1}{2} \log(x^2+1)$ ✓
- $\log(x(x^2+1))$
- $\frac{1}{4} \arcsin(x^2+1)$
- $\frac{1}{2} \arcsin(x^2+1)$

- $\arcsin(x(x^2+1))$

Calcolare l'integrale, riempiendo gli spazi.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^3+2x^2+x+2}dx = -\frac{\boxed{g}}{\boxed{h}}\log\boxed{i} + \frac{\boxed{j}}{\boxed{k}}\pi.$$

$\boxed{g}$: $\boxed{2 \checkmark}$ $\boxed{h}$: $\boxed{5 \checkmark}$ $\boxed{i}$: $\boxed{3 \checkmark}$ $\boxed{j}$: $\boxed{1 \checkmark}$ $\boxed{k}$: $\boxed{10 \checkmark}$

(11) **Q5**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente 0 o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio, seguendo le indicazioni.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\log x}{(x-1)^\alpha x^{\frac{1}{4}}}dx$$

.

Completare la formula.

$$\log x = \boxed{a} + \boxed{b}(x-1) + o(x-1) \text{ vicino a } 1.$$

$\boxed{a}$: $\boxed{0 \checkmark}$ $\boxed{b}$: $\boxed{1 \checkmark}$

$$x^{\frac{1}{4}} = \boxed{c} + \frac{1}{\boxed{d}}(x-1) + o(x-1) \text{ vicino a } 1.$$

$\boxed{c}$: $\boxed{1 \checkmark}$ $\boxed{d}$: $\boxed{4 \checkmark}$

Dunque, prendendo un punto intermedio $x=2$, l'integrale $\int_1^2 \frac{\log x}{(x-1)^\alpha x^{\frac{1}{4}}}dx$ converge per

- $\alpha < 1$
- $\alpha \leq 1$
- $\alpha < 2$ ✓
- $\alpha \leq 2$
- $\alpha > 1$
- $\alpha \geq 1$
- $\alpha > 2$
- $\alpha \geq 2$

Mentre, l'integrale $\int_2^\infty \frac{\log x}{(x-1)^\alpha x^{\frac{1}{4}}}$ converge per

- $\alpha < \frac{1}{4}$
- $\alpha \leq \frac{1}{4}$
- $\alpha < \frac{3}{4}$
- $\alpha \leq \frac{3}{4}$
- $\alpha > \frac{1}{4}$
- $\alpha \geq \frac{1}{4}$
- $\alpha > \frac{3}{4}$ ✓
- $\alpha \geq \frac{3}{4}$

Da questo risultato, l'integrale

- converge assolutamente per $\alpha = 1$ e 3
- converge ma non assolutamente per $\alpha = 1$, converge assolutamente per $\alpha = 3$

- diverge per $\alpha = 1$, converge assolutamente per $\alpha = 3$ ✓
- converge assolutamente per $\alpha = 1$, converge ma non assolutamente per $\alpha = 3$
- converge ma non assolutamente per $\alpha = 1$ e 3
- diverge per $\alpha = 1$, converge ma non assolutamente per $\alpha = 3$
- converge assolutamente per $\alpha = 1$, diverge per $\alpha = 3$
- converge ma non assolutamente per $\alpha = 1$, diverge per $\alpha = 3$
- diverge per $\alpha = 1$ e 3

> L'integrale $\int_1^\infty x^\alpha dx$ converge se e solo se $\alpha < -1$, e $\int_0^1 x^\alpha dx$ converge se e solo se $\alpha > -1$.
> Se $f(x)$ in $\int f(x)dx$ è un prodotto di queste funzioni, basta usare il criterio di confronto.
> Vicino a 0, si pu usare la formula di Taylor per decidere il grado di infinitesimo. Vicino all'∞, in questo esercizio, $\log x$ diverge ma $\frac{\log x}{x^\beta} \to 0$ per qualunque $\beta > 0$, e da questo si può concludere che $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha} dx$ converge per $\alpha > 1$, perché possiamo prendere β tale che $x^\alpha = x^\beta \cdot x^{\alpha-\beta}$, dove $\alpha - \beta > 1$.

(12) **Q5**

Se non è specificato altrimenti, riempire gli spazi vuoti con numeri **interi (possibilmente** 0 **o negativi)**. Quando compare una frazione, va scritta nella forma semplificata (per esempio, si accetta solo $\frac{1}{2}$ ma non $\frac{2}{4}$).

Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio, seguendo le indicazioni.

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^\alpha x^{\frac{1}{3}}} dx$$

.

Completare la formula.

$$x^{\frac{1}{3}} = \boxed{\text{a}} + \frac{1}{\boxed{\text{b}}}(x-1) + o(x-1) \text{ vicino a 1.}$$

$\boxed{\text{a}}$: $\boxed{1 \ ✓}$ $\boxed{\text{b}}$: $\boxed{3 \ ✓}$

$$\log x = \boxed{\text{c}} + \boxed{\text{d}}(x-1) + o(x-1) \text{ vicino a 1.}$$

$\boxed{\text{c}}$: $\boxed{0 \ ✓}$ $\boxed{\text{d}}$: $\boxed{1 \ ✓}$

Dunque, prendendo un punto intermedio $x = 2$, l'integrale $\int_2^\infty \frac{\log x}{(x-1)^\alpha x^{\frac{1}{3}}}$ converge per

- $\alpha > \frac{1}{3}$
- $\alpha \geq \frac{1}{3}$
- $\alpha > \frac{2}{3}$ ✓
- $\alpha \geq \frac{2}{3}$
- $\alpha < \frac{1}{3}$
- $\alpha \leq \frac{1}{3}$
- $\alpha < \frac{2}{3}$
- $\alpha \leq \frac{2}{3}$

Mentre, l'integrale $\int_1^2 \frac{\log x}{(x-1)^\alpha x^{\frac{1}{3}}} dx$ converge per

- $\alpha > 1$
- $\alpha \geq 1$
- $\alpha > 2$
- $\alpha \geq 2$
- $\alpha < 1$
- $\alpha \leq 1$
- $\alpha < 2$ ✓
- $\alpha \leq 2$

Da questo risultato, l'integrale

- converge assolutamente per $\alpha = -2$ e 1
- converge ma non assolutamente per $\alpha = -2$, converge assolutamente per $\alpha = 1$
- diverge per $\alpha = -2$, converge assolutamente per $\alpha = 1$ ✓
- converge assolutamente per $\alpha = -2$, converge ma non assolutamente per $\alpha = 1$
- converge ma non assolutamente per $\alpha = -2$ e 1
- diverge per $\alpha = -2$, converge ma non assolutamente per $\alpha = 1$
- converge assolutamente per $\alpha = -2$, diverge per $\alpha = 1$
- converge ma non assolutamente per $\alpha = -2$, diverge per $\alpha = 1$
- diverge per $\alpha = -2$ e 1