Analisi Matematica 1 - Lunedì 21 Febbraio 2020
Ing. dell'Edilizia e Ing. Edile-Architettura a.a. 2019-2020

1. Calcolare, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1-x) - 2x\sqrt{1+x}}{\sin(x) - xe^x}$$

Soluzione. Usando la formula di Taylor vicino a $x_0 = 0$, si ottengono

- $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)$
- $x\sqrt{1+x} = x(1 + \frac{1}{2}x - o(x)) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
- $\sin x = x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$
- $xe^x = x(1 + x + o(x)) = x + x^2 + o(x^2)$

Dunque vicino a 0 vale

$$\frac{x - \ln(1-x) - 2x\sqrt{1+x}}{\sin(x) - xe^x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)}$$

e $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1-x)-2x\sqrt{1+x}}{\sin(x)-xe^x} = \frac{1}{2}$.

2. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n n}(x^2+1)^n.$$

Soluzione. I termini $\frac{1}{5^n n}(x^2+1)^n$ sono positivi. Per il criterio della radice, la serie converge se $R := \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{5^n n}(x^2+1)^n)^{\frac{1}{n}} < 1$ e diverge se $R > 1$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{5^n n}(x^2+1)^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5\sqrt[n]{n}}(x^2+1) = \frac{(x^2+1)}{5}.$$

Dunque $R = \frac{(x^2+1)}{5} < 1$ se e solo se $x^2 + 1 < 5$ se e solo se $-2 < x < 2$, e $R > 1$ se e solo se $x < -2$ o $x > 2$. Per $x = 2, -2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n n}(4+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che abbiamo visto che diverge.

3. Tracciare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{|x-1|}}{x+3}$$

Soluzione.

- La funzione $|x-1|, e^y$ sono definiti per tutti $\mathbb{R}$, dunque anche $e^{|x-1|}$, mentre $\frac{1}{x+3}$ è definita per $x \neq -3$. Tutto insieme, il dominio è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$.

- i limiti:

  - $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Siccome $e^{|x-1|} = e^{-x+1} = e^{-x} \cdot e$ e $\frac{1}{x+3} < 0$ per $x < 0$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
  - $\lim_{x\to-3^-} f(x)$. Siccome $e^{|x-1|}$ è continua, $\lim_{x\to-3^-} f(x) = e^4 \cdot \lim_{x\to-3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$.
  - $\lim_{x\to-3^+} f(x)$. Analogamente, $\lim_{x\to-3^+} f(x) = e^4 \cdot \lim_{x\to-3^+} \frac{1}{x+3} = \infty$.
  - $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Siccome $e^{|x-1|} = e^{x-1} = e^x \cdot e^{-1}$ e $\frac{1}{x+3} > 0$ per $x > 0$, si ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

- $e^{|x-1|}$ è sempre posistiva, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{1}{x+3}$, cioè $f(x) > 0$ se $x > -3$ e $f(x) < 0$ se $x < -3$.

- Si ha $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}}{x+3} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{e^{-x+1}}{x+3} & \text{se } x < 1 \end{cases}$, dunque

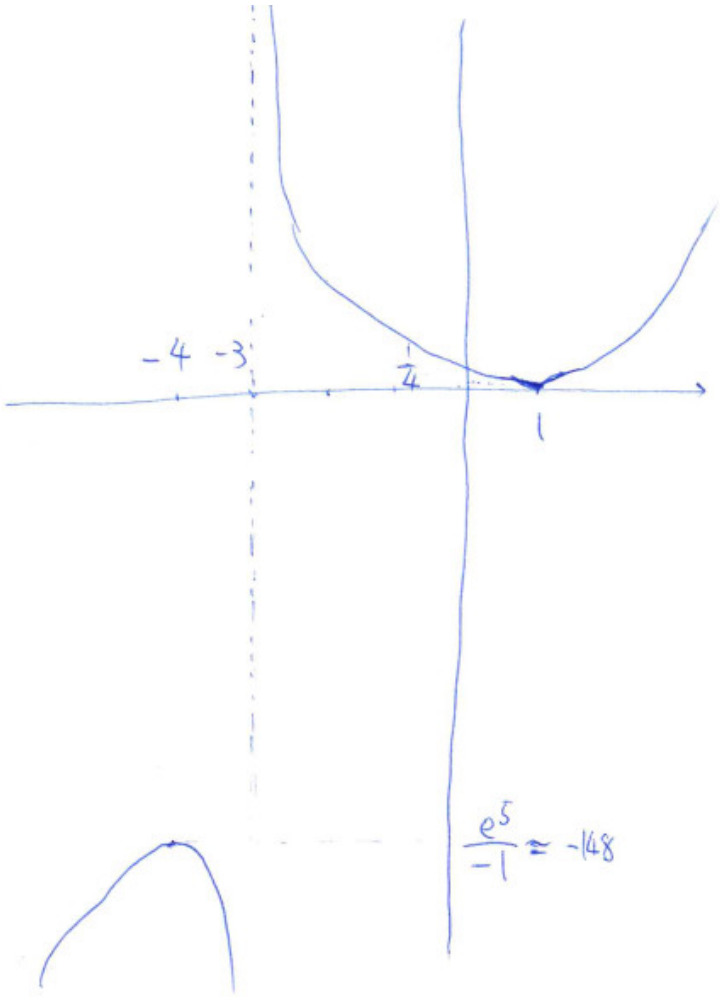
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}(x+3)-e^{x-1}}{(x+3)^2} = \frac{e^{x-1}(x+2)}{(x+3)^2} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-e^{-x+1}(x+3)-e^{-x+1}}{(x+3)^2} = -\frac{e^{-x+1}(x+4)}{(x+3)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

  Siccome la funzione esponenziale è positiva e $\frac{1}{(x+3)^2} > 0$ (per $x \neq -3$), è facile deterinare il segno di $f'(x)$.

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 \leq x$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$(per $1 < x$)

  Inoltre, c'è un punto angoloso in $x = 1$, dove la funzione $e^{|x-1|}$ cambia l'espressione in termini delle funzioni derivabili.

  Il grafico si ottiene come segue:



4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi} \cos^4\theta \, d\theta$$

Soluzione. Ci ricordiamo la formula $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, da cui seque $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, equivalentemente, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$. Usando questo, si ottiene $\cos^4 = \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4} = \frac{2+4\cos(2\theta)+(1+\cos(4\theta))}{8}$. Siccome vale $\int \cos(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a} + \text{Const.}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos^4\theta \, d\theta &= \int_0^{\pi} \frac{2+4\cos(2\theta)+(1+\cos(4\theta))}{8}\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{8}\left[2\theta + 2\sin(2\theta) + \theta + \frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

5. Calcolare il seguente (dare il valore, e non solo discutere la convergenza), basandosi sulla definizione di integrale improprio:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$$

Soluzione. Usando una sostituzione $\sqrt{x} = t$, troviamo una primitiva: $F(x) = -2e^{-\sqrt{x}}$, allora $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$. Per la definizione di integrale improprio, prendiamo $0 < \alpha < c < \beta < \infty$. Abbiamo

$$\int_\alpha^c \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_\alpha^c = 2(e^{-\sqrt{\alpha}} - e^{-\sqrt{c}}), \int_c^\beta \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_c^\beta = 2(e^{-\sqrt{c}} - e^{-\sqrt{\beta}}).$$

La funzione $\sqrt{x}$ è continua in $x = 0$, dunque $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^c \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = 2(1 - e^{-\sqrt{c}})$, mentre $\lim_{x \to \infty} e^{-\sqrt{x}} = 0$, dunque $\int_c^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_c^\beta \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = 2e^{-\sqrt{c}}$.

Visto che tutti e due limiti esistono, esiste anche l'integrale improprio in questione e

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx + \int_c^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = 2(1 - e^{-\sqrt{c}}) + e^{-\sqrt{c}} = 2.$$