Analisi Matematica 1 - Lunedì 27 Gennaio 2020
Ing. dell'Edilizia e Ing. Edile-Architettura a.a. 2019-2020

Cognome (stampatello):
Nome (stampatello):
N° di matricola:
Indirizzo e-mail (facoltativo):

Firma:

`Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta (risposte non motivate valgono 0 punti).`

1. Calcolare, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)-\ln(1+x^2)}{e^{\frac{1}{x}}-\frac{x}{x-1}}$$

2. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{n^2+1} x^n.$$

3. Tracciare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x^3}{x+2}}$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 2x \log(x^2+1)\, dx$$

5. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{1+x}-1)^{\alpha}}{e^{x^2}-1} dx$$

1. $N(x) = \ln(x^2+2) - \ln(1+x^2) = \ln \dfrac{1+1+x^2}{1+x^2} = \ln\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

$D(x) = e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{x}{x-1} = e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{x-1+1}{x-1} = e^{\frac{1}{x}} - 1 - \dfrac{1}{x-1}$

Se $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{x-1}$ sono grandezze infinitesime;

essendo $\ln(1+t) \sim t$ se $t \to 0$, si ha che

$$N(x) = \ln\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right) \sim \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty$$

Inoltre

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty); \text{ per cui}$$

$$D(x) = \cancel{1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \cancel{-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x(x-1)+x-1-2x^2}{2x^2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{x+1}{2x^2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{1}{2x^2} \quad (x \to +\infty)$$

Per cui $\dfrac{N(x)}{D(x)} \sim \underbrace{-2}_{\text{è il limite cercato}} \quad (x \to +\infty)$

---

2. Studiamo l'assoluta convergenza col criterio della radice

$$\sqrt[n]{\frac{3^n n |x|^n}{n^2+1}} = \frac{3|x| \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 3|x|$$

Per cui, se $|x| < \dfrac{1}{3}$ la serie converge assolutamente

se $x > \dfrac{1}{3}$ la serie diverge

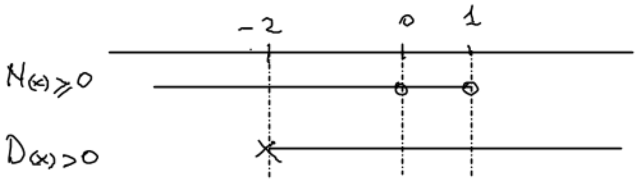
Se $x = \dfrac{1}{3}$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, che diverge, essendo $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$ $(n \to \infty)$

Se $x = -\dfrac{1}{3}$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)\frac{n}{n^2+1}$, che converge per il criterio di LEIBNIZ.

Se $x < -\dfrac{1}{3}$ la serie non converge perché $\dfrac{3^n n}{n^2+1} x^n$ diverge in valore assoluto e cambia segno con la parità di n.

3. La funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-x^3}{x+2}}$ è definita se $\dfrac{x^2-x^3}{x+2}\geq 0$

$$N(x)=x^2-x^3=x^2(1-x)\geq 0 \iff \begin{cases}1-x\geq 0\\ \text{o } x=0\end{cases} \iff \begin{cases}x\leq 1\\ \text{o } x=0\end{cases}$$



Quindi, il dominio di $f(x)$ è l'intervallo $(-2,1]=D$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2(1-x)}{x+2}}=|x|\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}\begin{cases}>0 & \text{se} \quad x\in D\setminus\{0,1\}\\ =0 & \text{se} \quad x=0 \text{ o } x=1\end{cases}$$

La funzione è continua nel suo dominio perché composizione di funzioni continue.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2(1-x)}{x+2}}}\left(\frac{x^2-x^3}{x+2}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2(1-x)}}\;\frac{(2x-3x^2)(x+2)-x^2+x^3}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2(1-x)}}\;\frac{2x^2+4x-3x^3-6x^2-x^2+x^3}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2(1-x)}}\;\frac{-2x^3-5x^2+4x}{(x+2)^2}=$$

$$=-x\sqrt{\frac{x+2}{x^2(1-x)}}\;\frac{2x^2+5x-4}{(x+2)^2}\quad ;$$

Per studiare il segno di $f'(x)$, cerchiamo gli zeri di $2x^2+5x-4$

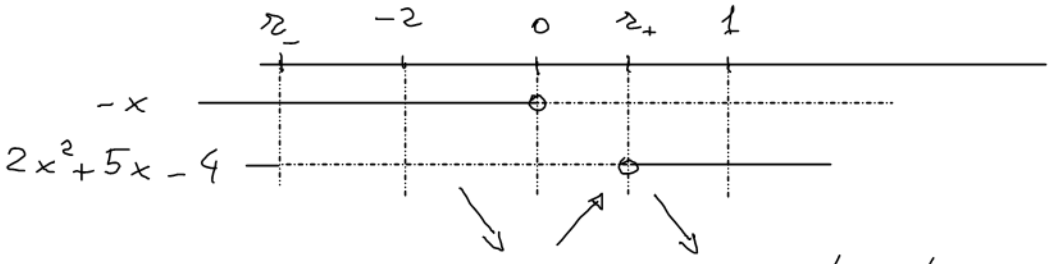
$$r_-=\frac{-5-\sqrt{57}}{4}<0 \qquad r_+=\frac{-5+\sqrt{57}}{4}>0$$

Per valutare la loro posizione rispetto agli estremi di D, scriviamo

$$-2\;\boxed{?}\;\frac{-5-\sqrt{57}}{4} \iff -8\;\boxed{?}\;-5-\sqrt{57} \iff \sqrt{57}\;\underset{>}{\boxed{?}}\;3$$

per cui $r_-<-2$; analogamente, si ottiene che $r_+<1$

Studiamo i segni di alcuni fattori di $f'(x)$ per studiare la monotonia

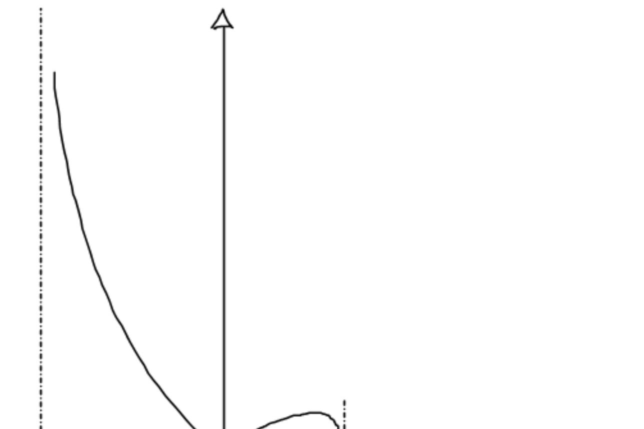


Essendo f continua, $x=0$ è un punto di minimo (assoluto, essendo $0=f(0)\geq 0$) e $x=r_+$ è un punto di massimo (locale, essendo f illimitata superiormente).

Essendo $f(x)\sim|x|$ se $x\to 0$ si ha che in $x=0$ f non è derivabile $f'(0^-)=-1$ $\quad f'(0^+)=1$

essendo $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$,

un grafico qualitativo è il seguente



---

4. $$\frac{1}{2}\int_0^2 2x\left[\log(x^2+1)\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+1)'\left[\log(x^2+1)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\left[\log(x^2+1)\right]\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \cancel{(x^2+1)}\,\frac{1}{\cancel{x^2+1}}\,(2x)\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\log 5 - \int_0^2 x\,dx = \frac{5}{2}\log 5 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{5}{2}\log 5 - 2$$

5. $$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 + \lim_{b\to\infty}\int_1^b$$

La funzione integranda f è positiva e continua, per cui posso usare il criterio del confronto asintotico.

Essendo $$\left(\sqrt{1+x}-1\right)^\alpha \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \quad (x\to 0^+)$$

$$e^{x^2}-1 \sim \frac{x^2}{2} \quad (x\to 0^+)$$

$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{2^\alpha}\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}\frac{1}{x^{2-\alpha}} \quad x\to 0^+$ per cui $\int_0^1$ esiste finito se

$2-\alpha<1$, ossia $\alpha>1$.

Essendo $$\left(\sqrt{1+x}-1\right)^\alpha \sim x^{\frac{\alpha}{2}} \quad (x\to +\infty)$$

$$e^{x^2}-1 \sim e^{x^2} \quad (x\to +\infty)$$

$f(x) \sim \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{x^2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x\to+\infty)$ per cui $\int_1^{+\infty}$ esiste finito qualunque sia $\alpha\in\mathbb{R}$.

Riassumendo, l'integrale dato

converge se $\alpha>1$

e diverge se $\alpha\le 1$.