

Analisi Matematica I, 2019/20 Primo semestre

Yoh Tanimoto

Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
Via della Ricerca Scientifica 1, I-00133 Roma, Italy
email: hoyt@mat.uniroma2.it

Seguiamo il libro “Corso di analisi: prima parte” di Luigi Chierchia, McGraw Hill, ma i numeri dei teoremi e degli esempi ecc. non coincidono.

Diario del corso:

<http://www.mat.uniroma2.it/~tanimoto/teaching/2019AM1/>

Sintesi del corso (finora):

- la teoria degli insiemi
- numeri reali, naturali, interi e razionali
- funzioni su $\mathbb{R}$ e i limiti, successioni
- continuità delle funzioni
- polinomi, radici, funzioni esponenziali, logaritmo

Nov. 7. Logaritmo, funzioni iperboliche e alcuni limiti notevoli

Logaritmo e funzioni iperboliche

Sia $a > 0, a \neq 1$. Abbiamo definito la funzione esponenziale $f(x) = a^x$, e abbiamo visto che è continua, e strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

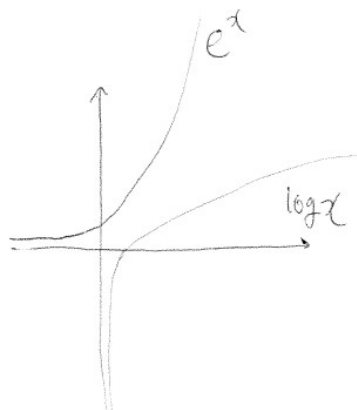
Sia $a > 1$. Per Propositione 3.4(vi) del testo, $\text{Im } a^x = \mathbb{R}_+$. Dunque possiamo definire (perché è strettamente crescente) la funzione inversa. Analogamente anche per $0 < a < 1$.

Definizione 1. Il logaritmo in base a di x è l'inversa di $f(y) = a^y$: $\log_a : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ e vale

$$\log_a a^x = x = a^{\log_a x}.$$

$\log x = \log_e x$.

Example: $\log_2 8 = 3, \log_9 3 = \frac{1}{2}$.



Proposizione 2. Siano $a, b > 0, a \neq 1 \neq b, x, y > 0, t \in \mathbb{R}$. Allora

- (i) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.
- (ii) $\log_{a^{-1}} x = -\log_a x$.
- (iii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- (iv) $\log_a(x^t) = t \log_a x$.
- (v) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$.
- (vi) Sia $a > 1$. Then $f(x) = \log_a x$ è strettamente crescente e continua. $\log_a x > 0$ se e solo se $x > 1$.
- (vii) Sia $a > 1, \alpha > 0$. Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$.

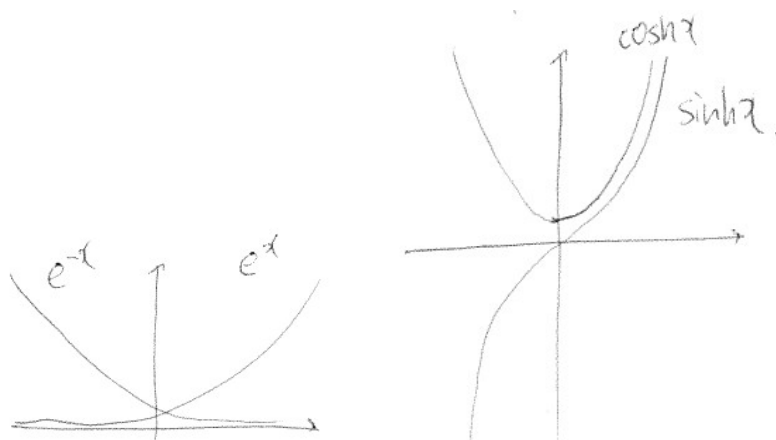
Dimostrazione.

- (i) $a^1 = a, a^0 = 1$.
- (ii) $(1/a)^{-\log_a x} = 1/a^{-\log_a x} = a^{\log_a x} = x$.
- (iii) $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.
- (iv) $a^{t \log_a x} = (a^{\log_a x})^t = x^t$.
- (v) $a^{\log_a b \cdot \log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$.
- (vi) Segue da Teorema 2.66 del libro.
- (vii) $\frac{(a^y)^\alpha}{\log_a a^y} = \frac{(a^\alpha)^y}{y} \rightarrow \infty$ e il cambio di variabile.

□

Definizione 3. • $\sinh x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$



Proposizione 4. (i) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

(ii) $\sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$.

(iii) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.

Dimostrazione.

$$(i) \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) = \frac{1}{4}(2e^{x+y} + 2e^{-x-y}) = \cosh(x+y).$$

(ii) analogo.

(iii) analogo.

□

Proposizione 5. (i) $\sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$$(ii) \cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Dimostrazione.

(i)

$$\begin{aligned} \sinh(\log(x + \sqrt{x^2 + 1})) &= \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{2} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = x. \end{aligned}$$

(ii) analogo.

□

Definizione 6. (i) $\operatorname{Arcsinh} x = \sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$$(ii) \operatorname{Arccosh} x = \cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Alcuni limiti notevoli

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Sappiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$. Sia $n = [x]$, allora $n \leq x < n + 1$ e

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Per il teorema di confronto, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Dall'esempio precedente e il cambio di variabile, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (analogamente si dimostra $\lim_{x \rightarrow 0-}$). Siccome $\log y$ è continua,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1.$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\frac{x}{t}}\right)^t = e^t$ per la continuità di $g(a) = a^t$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Con $y = e^x - 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$.

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + e^{-x}(e^x - 1)}{2x} = \frac{2}{2} = 1$.

Nov. 13. Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione. Abbiamo considerato una serie $\sum_{k=1}^n a_k$, che è una nuova successione e la sua convergenza o divergenza.

Quando tutti i termini sono non-negativi: $a_n \geq 0$, ci sono alcuni criteri che si possono usare spesso per decidere la convergenza/divergenza.

Proposizione 7. • Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni, $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che esiste $c > 0$ e $a_n \leq cb_n$ per n sufficientemente grandi. Allora, se $\sum b_n$ converge, allora converge anche $\sum a_n$. Se $\sum a_n$ diverge, diverge anche $\sum b_n$.

- Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni, $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che $a_n/b_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$. Allora $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum b_n$ converge.

Abbiamo inoltre visto che, per $0 < \theta < 1$, $\sum_{n=1}^N \theta^n$ converge a $\frac{1}{1-\theta}$.

Sia $a_n > 0$ una successione positiva.

Proposizione 8 (criterio della radice). (i) Se $a_n^{\frac{1}{n}} \leq \theta < 1$ per n sufficientemente grandi, allora $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $a_n^{\frac{1}{n}} \geq \theta > 1$ per n sufficientemente grandi, allora $\sum a_n$ diverge.

(iii) Sia $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \theta$. Se $\theta < 1$, $\sum a_n$ converge. Se $\theta > 1$, $\sum a_n$ diverge.

Dimostrazione. La serie $\sum \theta^n$ converge se $\theta < 1$ (serie geometrica) e diverge se $\theta > 1$ (θ^n non tende a 0). Per il teorema di confronto e $a_n < \theta^n$ or $a_n > \theta^n$, seguono le prime due affermazioni.

Se $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \theta < 1$, allora $a_n^{\frac{1}{n}} < \tilde{\theta} < 1$ per n sufficientemente grande. Il caso $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \theta > 1$ è analogo. $\square$

Esempio 9. • $\sum \frac{1}{n3^n}$ è convergente.

- $\sum \frac{2^n \lfloor n/5 \rfloor}{3^n}$ è convergente.
- $\sum \frac{n}{2^n}$ è convergente.

Quando $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = 1$, questo criterio non dà informazioni. $\sum \frac{1}{n}$ è divergente, ma $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente ma tutti e due $\lim(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = \lim(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} = 1$.

Proposizione 10 (criterio del rapporto). (i) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \theta < 1$ per n sufficientemente grandi, allora $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \theta > 1$ per n sufficientemente grandi, allora $\sum a_n$ diverge.

(iii) Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \theta$. Se $\theta < 1$, $\sum a_n$ converge. Se $\theta > 1$, $\sum a_n$ diverge.

Dimostrazione. Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \theta < 1$ per $n \geq N$. Allora,

$$a_{N+m} \leq a_{N+m-1}\theta \leq a_{N+m-2}\theta^2 \leq \dots \leq a_N\theta^m.$$

Ora $\sum_n a_m\theta^n$ è convergente, quindi per il teorema di confronto, $\sum_n a_n$ è convergente. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \theta > 1$, allora a_n è crescente, e non converge a 0.

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \theta < 1$ oppure > 1 , allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \tilde{\theta} < 1$ oppure > 1 per n sufficientemente grande, quindi segue da (i), (ii). $\square$

Esempio 11. • $\sum \frac{n}{2^n}$ è convergente.

- $\sum \frac{n^2}{n!}$ è convergente.
- $\sum \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ è convergente.

Quando $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$ oppure $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, dobbiamo studiarla meglio.

Proposizione 12 (criterio di condensazione). *Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente di numeri positivi. Allora $\sum a_n \approx \sum 2^n a_{2^n}$.*

Dimostrazione. Siccome a_n è decrescente e positivo, $a_{2^n} \geq a_{2^n+1} \geq \dots \geq a_{2^{n+1}}$, dunque

$$2^n a_{2^n} \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \geq 2^n a_{2^{n+1}}.$$

Sommando rispetto ad n ,

$$\sum_{n=1}^N 2^n a_{2^n} \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k = \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} a_k \geq \sum_{n=1}^N 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N+1} 2^n a_{2^n} - a_1 \right).$$

Quindi $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_n 2^n a_{2^n}$ converge per il teorema di confronto. $\square$

Esempio 13. • Sia $s > 0$. $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Per il criterio di condensazione, basta studiare $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum \frac{2^n}{2^{ns}} = \sum \frac{1}{2^{(s-1)n}}$. Questa è una serie geometrica, ed è convergente se $2^{(s-1)} > 1$ e divergente se $2^{(s-1)} \leq 1$, ovvero, converge se e solo se $s > 1$.

$\zeta(s)$ si chiama la funzione di zeta di Riemann.

- $\sum \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$. Per il criterio di condensazione, basta studiare $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum \frac{1}{(n \log 2)^\alpha} = \frac{1}{\log 2^\alpha} \sum \frac{1}{n^\alpha}$. Quindi converge se e solo se $\alpha > 1$.

Proposizione 14. *Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente con i termini positivi e $a_n \rightarrow 0$. Allora $\sum (-1)^n a_n$ converge.*

Dimostrazione. Sia $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$. Allora $s_{2n} = \sum_{k=1}^n (-a_{2k-1} + a_{2k})$ è decrescente. Analogamente, $s_{2n+1} = -a_1 + \sum_{k=1}^n (a_{2k} - a_{2k+1})$ è crescente. Inoltre, $s_{2n} - s_{2n+1} = -(-a_{2n+1}) = a_{2n+1} \geq 0$. Dunque s_{2n} e s_{2n+1} convergono a $\bar{s}$ e $\underline{s}$, rispettivamente, e $\bar{s} \geq \underline{s}$. Ma $s_{2n+1} \leq \underline{s} \leq \bar{s} \leq s_{2n}$ e $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0$, quindi $\bar{s} = \underline{s}$. $\square$

Esempio 15. • $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente.

- $\sum (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$ è convergente.

Nov. 14. Serie esponenziali e funzioni trigonometriche

Proposizione 16. *Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ è convergente, allora $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0$.*

Dimostrazione. $\sum_{k=1}^m a_k \rightarrow a$, quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = a - \sum_{k=1}^m a_k \rightarrow 0$. $\square$
Avevamo definito $e = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$, e abbiamo visto che $e^x = \lim_n (1 + \frac{x}{n})^n$.
C'è un'altra espressione per e^x :

$$\text{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots$$

Per il criterio del rapporto, per ogni $x \in \mathbb{R}$ questa serie converge assolutamente: infatti, il rapporto è $(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}) / (\frac{x^n}{n!}) = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$. In particolare, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$.

Teorema 17. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\text{Exp}(x) = e^x$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{x^k}{k!}.$$

Poniamo $a_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}$, dunque $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n a_{nk} \frac{x^k}{k!}$.

Vale che

$$a_{n0} = 1, \quad a_{n1} = 1, \quad a_{nk} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} < 1 \text{ per } 1 < k \leq n$$

e per k fisso, $a_{nk} \rightarrow 1$.

Sia $1 \leq m < n$, allora

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^m a_{nk} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \left| \sum_{k=m+1}^n a_{nk} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n a_{nk} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|x|^k}{k!}$$

Ora, siccome $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$ e $a_{nk} \rightarrow 1$, otteniamo $\left| e^x - \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$. Il lato destro tende a 0 quando $m \rightarrow \infty$, quindi $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. $\square$

Corollario 18. $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Dimostrazione. Abbiamo $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$. Dunque

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} - \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

$\square$

Definizione 19. Per $x \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots \end{aligned}$$

Le serie sono assolutamente convergenti per il criterio del rapporto.

Vogliamo dimostrare che $\cos x$ e $\sin x$ soddisfano le proprietà che ci aspettiamo: per esempio, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Perciò servono serie doppie:

Proposizione 20. Per $n, k \in \mathbb{N}_0$, sia $a_{nk} \in \mathbb{R}$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}|$ nel senso che se uno è finito allora l'altro è pure finito e coincidono. Se questa somma è finita, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}$.

Dimostrazione. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = a < \infty$. Allora in particolare $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^K |a_{nk}| \leq a < \infty$, $\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq a < \infty$. Sia $\varepsilon > 0$. Esiste N tale che $a - \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2}$, e per ogni n esiste k_n tale che $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| - \sum_{k=0}^{k_n} |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$, allora $\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{\max k_n} |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$a - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\max\{k_n\}} |a_{nk}| \leq a - \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{\max\{k_n\}} |a_{nk}| < \varepsilon.$$

L'altro caso è analogo.

Supponiamo che la somma $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}|$ sia finita. Allora in particolare $A_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ è assolutamente convergente, quindi, con $a_{nk}^{\pm} = |a_{nk}|$ se $a_{nk} > 0$ oppure < 0 , e con $A_n^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^{\pm}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk}^+ - a_{nk}^-) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ - A_n^-) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} A_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^- \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^- = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^- \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{nk}^+ - a_{nk}^-) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}. \end{aligned}$$

□

In particolare, sempre se la somma dei moduli è finita, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk}.$$

Teorema 21. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Dimostrazione. Consideriamo la somma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{0 \leq j \leq 2k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!},$$

che è assolutamente convergente perché, con $M = \max\{|x|, |y|\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{0 \leq j \leq 2k} \frac{|x|^j}{j!} \frac{|y|^{2k-j}}{(2k-j)!} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} M^{2k} \sum_{0 \leq j \leq 2k} \frac{1}{j!} \frac{1}{(2k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} M^{2k} \sum_{0 \leq j \leq 2k} \frac{(2k)!}{j!(2k-j)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} M^{2k} 2^{2k} < \infty \end{aligned}$$

per il criterio del rapporto, e abbiamo usato $(1+1)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j}$.

Ora

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+y)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0}^{2k} \frac{(2k)!}{j!(2k-j)!} x^j y^{2k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0, j \text{ pari}}^{2k} \frac{(2k)!}{j!(2k-j)!} x^j y^{2k-j} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0, j \text{ dispari}}^{2k} \frac{(2k)!}{j!(2k-j)!} x^j y^{2k-j} \end{aligned}$$

e per il primo termine

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{h=0}^k \frac{(2k)!}{(2h)!(2k-2h)!} x^{2h} y^{2k-2h} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k (-1)^k \frac{x^{2h}}{(2h)!} \frac{y^{2(k-h)}}{2(k-h)!} \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=h}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2h}}{(2h)!} \frac{y^{2(k-h)}}{2(k-h)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+h} \frac{x^{2h}}{(2h)!} \frac{y^{2k}}{2k!} \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{2k!} = \cos x \cos y.
\end{aligned}$$

Analogamente, il secondo termine si può riscrivere come $-\sin x \sin y$. □

Nov. 14 (16:00-18:00). Funzioni trigonometriche

Abbiamo definito

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots
\end{aligned}$$

e dimostrato che $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Queste formule ci permettono di calcolare i valori. $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, \cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \dots$. Se sommiamo 10 termini, l'errore è al massimo $|\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k!}| \leq \frac{1}{9!} \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{10^k} \approx 0.000003$.

Se usiamo il fatto che le serie $\cos x, \sin x$ sono alternanti, otteniamo da $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \frac{1}{40320} \dots$ e l'errore della somma $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720}$ dal vero valore di $\cos 1$ è minore di $\frac{1}{40320} \approx 0.000025$. Dunque, siccome $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} = 0.540277\dots$ otteniamo che $\cos 1 \in (0.5402778 - 0.000025, 0.540277 + 0.000025)$.

Lemma 22. Per ogni $x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1$, si ha

- $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{3}$
- $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{|x|^4}{12}$. In particolare, $\sin x$ e $\cos x$ sono continue in $x = 0$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
|\sin x - x| &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \frac{|x|^3}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2(k-1)}} < \frac{|x|^3}{3}. \\
\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| &= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{|x|^4}{24} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(k-1)}} < \frac{|x|^4}{12}.
\end{aligned}$$

□

Segue che

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Infatti $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq \frac{|x|^2}{3}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Dalla formula di addizione, con $y = -x$ segue che $\sin(-x) = -\sin x$ e dunque $1 = \cos 0 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$. In particolare, $|\cos x| \leq 1, |\sin x| \leq 1$.

Si scrive spesso $(\cos x)^2 = \cos^2 x$. Bisogna distinguerlo da $\cos(\cos x)$.

$\cos x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Infatti, sia $x \in \mathbb{R}$, allora $\cos(x+z) = \cos x \cos z - \sin x \sin z$, e $\lim_{z \rightarrow 0} \cos(x+z) = \cos x - 0 = \cos x$.

Proposizione 23. Esiste $\beta \in (1, 2)$ tale che $\cos \beta = 0$.

Dimostrazione. $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \cdots > \frac{1}{2}$, $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} - \frac{2^6}{720} + \frac{2^8}{8!} \cdots < -\frac{1}{8}$. Poi si applica il teorema del valore intermedio. $\square$

Da Lemma 22 segue che per $|x| \geq 1$ $|\cos x - 1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$, dunque $|\cos x| > \frac{5}{12}$.

Definizione 24. Chiamiamo il doppio del primo zero positivo del coseno π , **pi greco**. Ossia, $\pi = 2\beta$, dove $\cos \beta = 0$, $\beta \in (1, 2)$ e β è il minimo di tali valori.

Proposizione 25. $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \pi = -1, \sin \pi = 0$.

Dimostrazione. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ per definizione.

Da $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ segue che $|\sin \frac{\pi}{2}| = 1$. Dall'altra parte, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \sin \frac{\pi}{2} \sin(-x) = \sin \frac{\pi}{2}$. Sia x sufficientemente piccolo, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, siccome $\frac{\pi}{2}$ è il primo zero di $\cos$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) > 0$, mentre $\sin x > 0$, dunque $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$$\cos \pi = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1.$$

$$\cos^2 \pi + \sin^2 \pi = 1, \text{ e dunque } \sin^2 \pi = 0.$$

$\square$

Proposizione 26. $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x, \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$. In particolare, $\sin x$ è continua.

Dimostrazione. $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin(-\frac{\pi}{2}) = \sin x$.

Il resto è immediato. $\square$

Teorema 27. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Dimostrazione. $\sin(x + y) = \cos(x + y - \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos(y - \frac{\pi}{2}) - \sin x \sin(y - \frac{\pi}{2}) = \cos x \sin y + \sin x \cos x$. $\square$

Proposizione 28. • $\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x, \sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

$$\bullet \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$\bullet \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\bullet \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)).$$

Dimostrazione.

$$\bullet \text{ segue da } \sin \pi = 0, \cos \pi = -1.$$

$$\bullet \text{ si usa } \sin 2x = \sin(x + x).$$

• abbiamo

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \sin y &= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} \end{aligned}$$

e si sommano i lati.

- abbiamo

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\end{aligned}$$

e si sottraggono o sommano i lati.

□

Definizione 29. Una funzione $f(x)$ su $\mathbb{R}$ ha **periodo** $T \neq 0$ se $f(x+T) = f(x)$.

$\sin x$ e $\cos x$ hanno periodo 2π .

Definizione 30. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$ per $x \neq k\pi$.

Proposizione 31. • $\sin x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

• $\cos x$ è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$.

• $\tan x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Dimostrazione. Consideriamo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Abbiamo $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$. Siano $x > y, 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$. Allora $\cos \frac{x+y}{2} > 0$ perché $\frac{\pi}{2}$ è il primo zero di $\cos$. Da $\sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2})$, segue che $0 \leq \sin z \leq 1$ per $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$. Dunque $\sin \frac{x-y}{2} \geq 0$ e $\sin x - \sin y \geq 0$. Inoltre $\sin \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi-(x-y)}{2}$ non assume 0 perché $\frac{\pi}{2}$ è il primo zero di $\cos$.

Il resto segue immediatamente: per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. □

Nov. 21. Il teorema di Weierstrass. Derivate.

Il teorema di Weierstrass

Definizione 32. Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ è detto compatto (per successioni) se per ogni successione in K esiste una sottosuccessione convergente in K .

Abbiamo visto che un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Proposizione 33. Un insieme compatto K non vuoto ha massimo e minimo.

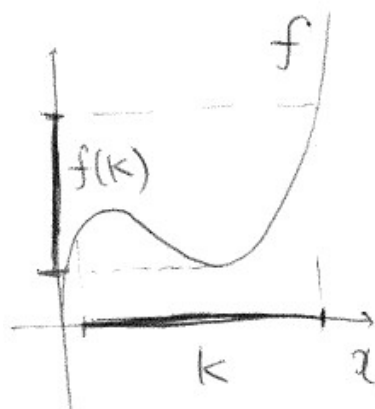
Dimostrazione. Siccome K è compatto, è limitato (superiormente e inferiormente). Dunque esiste $\sup K = M$. Per Proposizione 2.39 (del libro), per ogni n esiste $x_n \in K$ tale che $M - x_n < \frac{1}{n}$. Allora $x_n \rightarrow M$. Ma K è chiuso, dunque $M = \lim x_n \in K$, cioè K ammette il massimo. Il minimo è analogo. □

Si denota con $C(K)$ l'insieme delle funzioni continue su K (in $\mathbb{R}$).

Proposizione 34. Se $K \subset \mathbb{R}$ è compatto e $f \in C(K)$, allora $f(K)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $y_n \in f(K)$ una successione. Allora esistono $x_n \in K$ tali che $f(x_n) = y_n$. Siccome K è compatto, esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in K . Ora $f(x_{n_k})$ è una sottosuccessione di $\{y_n\}$, mentre $x_{n_k} \rightarrow x \in K$, e dunque $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(K)$. Cioè ogni successione $y_n = f(x_n)$ ammette una sottosuccessione convergente $f(x_{n_k})$ in $f(K)$. Dunque $f(K)$ è compatto. □

Definizione 35. Sia f una funzione da A in $\mathbb{R}$. f è detto di assumere il massimo (globale) in $x \in A$ se $f(x) \geq f(y)$ per tutti $y \in A$. Il minimo (globale) è definito analogamente.

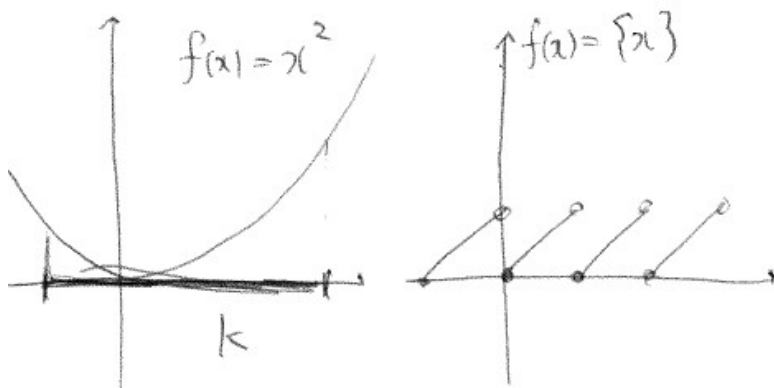


Teorema 36 (Weierstrass). Se $K \subset \mathbb{R}$ è compatto e $f \in C(K)$, allora f assume massimo e minimo su K .

Dimostrazione. Per Proposizione 34, $f(K)$ è compatto, e per Proposizione 33 $f(K)$ ammette il massimo y . Questo vale a dire che esiste $x \in K$ tale che $f(x) = y \geq z$ per tutti $z \in f(K)$, cioè f assume il massimo in x . $\square$

Esempio 37. (e non esempi)

- $f(x) = x^2$ è continua, dunque su ogni K compatto ammette il massimo e il minimo, ma non su $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \{x\}$ non è continua, e infatti non ammette il massimo su $[0, 1]$ anche se $[0, 1]$ è compatto.



Derivate

- Supponiamo che f rappresenti il moto di una particella: $f(t)$ è la posizione della particella a tempo t . Che vuol dire la velocità a tempo t ?
- Sia f l'altezza di una montagna. Che vuol dire che la montagna è ripida o piana?

Definizione 38. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- sia $x \in I$ e h piccolo tale che $x + h \in I$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si chiama il rapporto incrementale tra x e $x + h$.

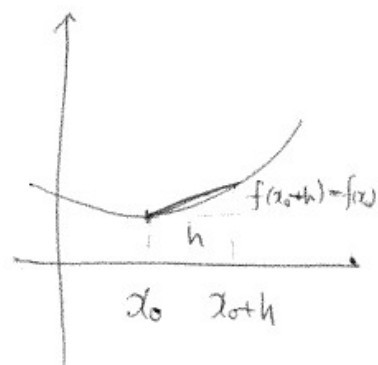
- la funzione f è detta **derivabile in** x_0 se esiste il limite in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se esiste un tale limite, esso si chiama la **derivata di f in x_0** e si denota $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $Df(x_0)$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Osservazione 39. • la derivata in x rappresenta la pendenza di f in x .

- se f rappresenta la posizione di una particella, la velocità è definita da $f'(t)$.



Derivate delle funzioni elementari.

- Sia $f(x) = c$ per $x \in \mathbb{R}$ (costante). Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$, dunque $f'(x) = 0$.
- Siano $A \in \mathbb{R}$ e $f(x) = Ax$ per $x \in \mathbb{R}$ (retta). Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{A(x+h)-Ax}{h} = \frac{Ah}{h} = A$, dunque $f'(x) = A$.
- Siano $A \in \mathbb{R}$ e $f(x) = Ax^2$ per $x \in \mathbb{R}$ (parabola). Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{A(x+h)^2 - Ax^2}{h} = \frac{A(2xh + h^2)}{h} = A(2x + h)$, dunque $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} A(2x + h) = 2Ax$.
- Siano $n \in \mathbb{Z}$ e $f(x) = x^n$ per $x \in \mathbb{R}$. Vale che $(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots \end{aligned}$$

dunque $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots) = nx^{n-1}$.

- Siano $n \in \mathbb{Z}$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

dunque $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$.

- Sia $f(x) = \log x$, $x > 0$. Allora

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \log \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}},$$

dunque $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+y)^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x}$ (limite notevole)

- Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h},$$

dunque $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$ (limite notevole).

- $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora, $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$, dunque

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} = \cos x$$

(si usano $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$).

- $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora, $\sin(x+h) = \cos x \cos h - \sin h \sin x$, dunque

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin h \sin x - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin h \sin x}{h} = -\sin x$$

Osservazione 40. Se $f(x)$ è derivabile in x_0 , allora è continua in x_0 . Infatti,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Definizione 41. Sia $f : [x_0 - \delta, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ dove $\delta > 0$. Se esiste il limite $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (da sinistra), f è detta derivabile in x_0 da sinistra, e il limite si denota con $D_- f(x_0)$, la derivata sinistra. Analogamente si definisce la derivata destra.

Esempio 42. Sia $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. $D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$, mentre $D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$.

Nov. 27. Derivate. Valori estremi.

Le regole di derivazione:

- $D(af(x) + bg(x)) = aDf(x) + bDg(x)$ (linearità).
- $D(f(x)g(x)) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x)$ (Leibniz).
- $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}$.
- $D(f(g(x))) = Dg(x)Df(g(x))$ (catena).
- $D(f^{-1}(y)) = \frac{1}{Df(x)}$, dove $y = f(x)$.

Esempio 43. • Sia $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Per linearità, $D(\sin x + x^2) = \cos x + 2x$. Prendiamo $\sin(x^2) = f(g(x))$. Per la regola della catena, $D(\sin(x^2)) = D(x^2) \cdot (D \sin)(x^2) = 2x \cdot \cos(x^2)$. Per $(\sin x)^2 = g(f(x))$, $D((\sin x)^2) = D(\sin x) \cdot 2(\sin x) = 2 \sin x \cos x$.

- Per la regola della catena $D(\exp(-x)) = D(-x) \cdot (D \exp)(-x) = -\exp(-x)$. Per linearità, $D \sinh x = D\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$. Analogamente $D \cosh x = \sinh x$.
- Si ha $a^x = (e^{\log a})^x = e^{\log a \cdot x}$. Per la regola della catena,

$$D(a^x) = D(\exp(\log a \cdot x)) = D(\log a \cdot x) \cdot (D \exp)(\log a \cdot x) = \log a \cdot \exp(\log a \cdot x) = \log a \cdot a^x.$$

- Sia $a > 0$ e $f(x) = x^a$ per $x > 0$. $f(x) = \exp(\log x \cdot a)$, e per la regola della catena,

$$Df(x) = D(\log x \cdot a)D(\exp)(\log x \cdot a) = \frac{a}{x} \cdot \exp(\log x \cdot a) = \frac{a}{x} \cdot x^a = ax^{a-1}.$$

Per $a < 0$, si considera $f(x) = x^a = \frac{1}{x^{-a}}$ e si ottiene la stessa formula $f'(x) = ax^{a-1}$. Ma non vale per $a = 0$.

- $D \tan x = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$
- $f(x) = \arctan x$. Ovvero, $f(x) = g^{-1}(x)$, dove $g(x) = \tan x$. Per la regola per l'inversa, abbiamo $Df(y) = \frac{1}{Dg(x)} = \cos^2 x$, dove $y = g(x) = \tan x$. Dunque $y^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$, e $\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$. Sostituendolo nel risultato precedente, $D \arctan y = Df(y) = \frac{1}{1+y^2}.$
- $f(x) = \tanh x$. $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}.$
- $f(x) = \arcsin x$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Definizione 44. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$.

- x_0 è detto un massimo locale (stretto) se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x) (> f(x))$ per $x \in U \cap A$.
- x_0 è detto un minimo locale (stretto) se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x) (< f(x))$ per $x \in U \cap A$.
- x_0 è detto un punto estrema se è un minimo locale o un massimo locale.



Proposizione 45 (Fermat). Sia I un intervallo aperto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è crescente (decrescente) in I ed è derivabile in $x_0 \in I$, allora $f'(x_0) \geq 0$ (≤ 0).

Dimostrazione. Se f è crescente, allora $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ (se $x_0+h \geq x_0$ se $h > 0$, $x_0+h \leq x_0$ se $h < 0$). Allora $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$.

Il caso decrescente è analogo. □



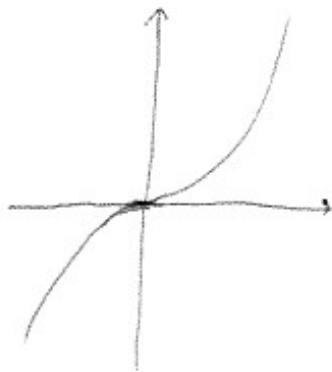
Proposizione 46. Sia I un intervallo aperto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se x_0 è un minimo (massimo) locale e f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia x_0 un minimo locale. Se $h > 0$, allora $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$, dunque si ha $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$. Analogamente, se $h < 0$, allora $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, dunque $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$. Siccome f è derivabile in x_0 , due limiti coincidono al limite $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$.

è analogo per massimo. $\square$

x_0 è detto un punto critico se $f'(x_0) = 0$.

Anche se $f'(x_0) = 0$, non è detto che x_0 sia un minimo o massimo locale: $f(x) = x^3, x_0 = 0$.

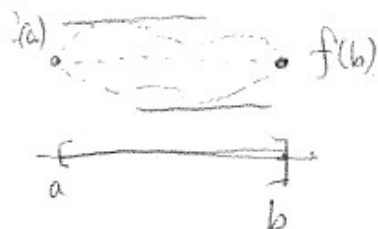


Proposizione 47 (Rolle). Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Se f è costante, allora $f'(x) = 0$ per tutti $x \in (a, b)$.

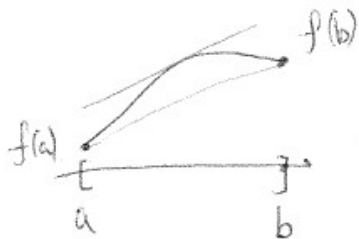
Sennò, per il teorema 36 di Weierstrass, f ammette un minimo e un massimo x_0 e in questo caso $x_0 \neq a, b$. Prendiamo un intervallo aperto intorno a x_0 . Ora per Proposizione 46 $f'(x_0) = 0$.

$\square$



Proposizione 48. Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Dimostrazione. Sia $F(x) = f(x) - \frac{(f(b)-f(a))x}{b-a}$. Allora $F(a) = \frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} = F(b)$, e per Proposition 47 esiste x_0 tale che $F'(x_0) = 0$. Cioè $f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. $\square$



Corollario 49. Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $f'(x) = 0$ per tutti $x \in (a, b)$, allora f è costante.

Dimostrazione. Siano $x < y \in [a, b]$. Per Proposition 48, esiste $x_0 \in (x, y)$ tale che $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x_0) = 0$, dunque $f(x) = f(y)$. $\square$

Corollario 50. Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

- Se $f'(x) \geq 0 (> 0)$ per tutti $x \in (a, b)$, allora f è crescente (strettamente).
- Se $f'(x) \leq 0 (< 0)$ per tutti $x \in (a, b)$, allora f è decrescente (strettamente).

Dimostrazione. Sia $x < y \in (a, b)$. Per Proposition 48, esiste $x_0 \in (x, y)$ tale che $\frac{f(y)-f(x)}{(y-x)} = f'(x_0)$. Se $f'(x_0) \geq 0 (> 0)$, allora $f(y) - f(x) \geq 0 (> 0)$, cioè f è crescente (strettamente).
Il caso $f'(x) \leq 0 (< 0)$ è analogo. $\square$

Esempio 51. • $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$, dunque f è decrescente se $x < 0$, $x = 0$ è un punto critico, è crescente se $x > 0$.

- $f(x) = \sin x$. $f'(x) = \cos x$, dunque f è crescente se $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ sono punti critici, e f è decrescente se $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

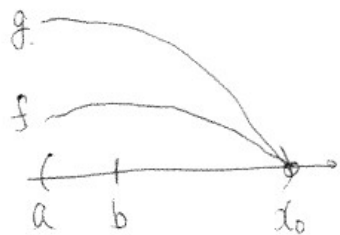
Nov. 28. Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital. I simboli di Landau.

Proposizione 52 (Teorema del valor medio di Cauchy). Siano $a < b$, f, g continue in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste un $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$.

Dimostrazione. Sia $F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$, allora $F(x)$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . $F(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = F(b)$. Per il teorema di Rolle, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $0 = F'(x_0) = f'(x_0)(g(b) - g(a)) - g'(x_0)(f(b) - f(a))$. $\square$

Teorema 53 (Bernoulli-de l'Hôpital, caso 1). Sia $a < x_0$, f, g derivabili in (a, x_0) tali che $g'(x) \neq 0$ vicino a x_0 , $x \neq x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$. Allora $g(x) \neq 0$ vicino a x_0 , $x \neq x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Dimostrazione. Possiamo estendere f, g a $(a, x_0]$ ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$, così sono continue. Per l'ipotesi, possiamo assumere che $g'(x) \neq 0$ in (b, x_0) . Sia $x \in (b, x_0)$, per il teorema del valor medio, esiste $y \in (x, x_0)$ tale che $g(x) - g(x_0) = g'(y)(x - x_0) \neq 0$, in particolare, $g(x) \neq 0$.



Per il teorema di valor media di Cauchy, per x come sopra, esiste $y \in (x, x_0)$ tale che $f'(y)(g(x) - g(x_0)) = g'(y)(f(x) - f(x_0))$, ovvero,

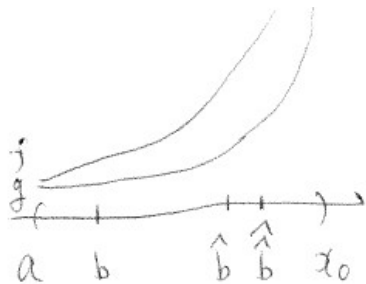
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Quando $x \rightarrow x_0$, tale y tende a x_0 . Siccome $\lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$ per l'ipotesi, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. $\square$

Esempio 54. Consideriamo $\frac{e^x - 1}{\sin x}$. Il limite $x \rightarrow 0$ è della forma $\frac{0}{0}$. Vale che $(\sin x)' = \cos x \neq 0$ vicino a $x_0 = 0$. Inoltre $(e^x - 1)' = e^x$. Dunque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

Analogamente, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{\cos x} = 2$.

Teorema 55 (Bernoulli-de l'Hôpital, caso 2). Sia $a < x_0$, f, g derivabili in (a, x_0) tali che $g'(x) \neq 0$ vicino a x_0 , $x \neq x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$. Allora $g(x) \neq 0$ vicino a x_0 , $x \neq x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.



Dimostrazione. Consideriamo il caso $L \in \mathbb{R}$ ($L = \pm\infty$ è analogo). $\varepsilon > 0$. Per le ipotesi, esiste b tale che $|\frac{f(x)}{g(x)} - L| < \frac{\varepsilon}{3}$. Inoltre esiste $b < \tilde{b} < x_0$ tale che in $(\tilde{b}, x_0)$ $f(x) > 2f(b) > 0, g(x) > 2g(b) > 0$. Allora la funzione $h(x) = \frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}}$ è continua. Inoltre vale che

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \cdot h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$. Sia $\tilde{\tilde{b}}$ tale che $|h(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{3L+1}$ per $x \in (\tilde{\tilde{b}}, x_0)$. Per il teorema del valore medio di Cauchy, esiste $y \in (b, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \cdot h(x) = \frac{f'(y)}{g'(y)} h(x).$$

Ora $|\frac{f(x)}{g(x)} - L| = |\frac{f'(y)}{g'(y)} h(x) - L| < |\frac{f'(y)}{g'(y)} - L|(1 + \frac{\varepsilon}{3L+1}) + L|h(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. $\square$

Teorema 56 (Bernoulli-de l'Hôpital, caso 3). Sia $a < x_0$, f, g derivabili in (a, ∞) tali che $g'(x) \neq 0$ vicino a ∞ , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ o 0 , $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$. Allora $g(x) \neq 0$ vicino a ∞ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Dimostrazione. Consideriamo $\tilde{f}(y) = f(\frac{1}{1-y}), \tilde{g}(y) = g(\frac{1}{1-y})$. Siccome $\frac{1}{1-y} \rightarrow \infty$ quando $y \rightarrow 1^-$, e $D(\tilde{f}(y)) = \frac{Df(\frac{1}{1-y})}{(1-y)^2}, D(\tilde{g}(y)) = \frac{Dg(\frac{1}{1-y})}{(1-y)^2}$ possiamo applicare i teoremi precedenti e $L = \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{\tilde{f}(y)}{\tilde{g}(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. $\square$

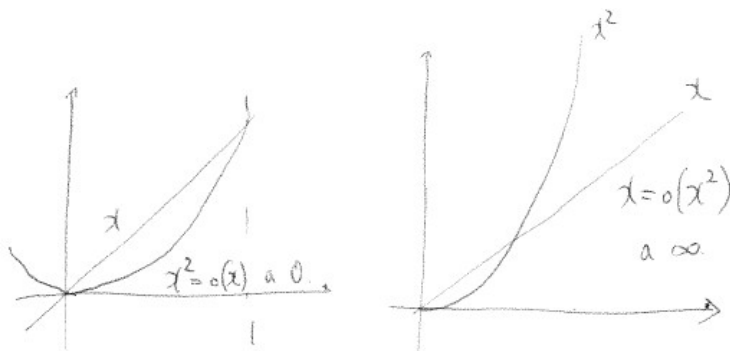
Esempio 57. • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{\cos x} = 2$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{1/\sin^2 x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \cosh x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x / \cosh x}{1} = 1$.

Definizione 58. Sia $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathcal{D}^*(A)$ oppure $x_0 = \pm\infty$ e $f, f_1, f_2, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, e supponiamo che $g(x) \neq 0$ vicino a $x_0, x \neq x_0$. Si scrive:

- $f(x) = O(g)$ (vicino a x_0) se esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M|g(x)|$ vicino a x_0 .

- $f(x) = o(g)$ (vicino a x_0) se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $f_1(x) = f_2(x) + O(g)$ o $f_1(x) = f_2(x) + o(g)$ se $f_1(x) - f_2(x) = O(g)$ o $= o(g)$, rispettivamente.



Esempio 59. • se $n > 1$, $x^n = o(x)$ vicino a $x_0 = 0$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} \rightarrow 0$).

- $x^n = o(x^m)$ vicino a $x_0 = 0$ se $n > m$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} \rightarrow 0$).
- $x^m = o(x^n)$ vicino a $x = \infty$ se $n > m$ (perché $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{x^n} \rightarrow 0$).
- $\log x = o(\frac{1}{x})$ vicino a $x = 0$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x \rightarrow 0$).
- $\log x = o(x)$ vicino a $x = \infty$ (perché $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \rightarrow 0$).
- $\sin x = O(x)$ vicino a $x = 0$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$).
- $\sin x = o(x)$ vicino a $x = \infty$ (perché $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$).
- $\cos x = O(1)$ vicino a $x = 0$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \rightarrow 1$).
- $\cos x - 1 = O(x^2)$ vicino a $x = 0$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$).

Lemma 60. Si considera vicino a $x_0 = 0$.

- (a) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = O(x), g(x) = O(x)$, allora $af(x) + bg(x) = O(x)$.
- (b) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = o(x), g(x) = o(x)$, allora $af(x) + bg(x) = o(x)$.
- (c) Se $f(x) = o(x)$, allora $f(x) = O(x)$.
- (d) Siano $f(x) = o(x)$ e $g(x) = O(x)$ e $f(0) = 0, g(0) = 0$. Allora $f(g(x)) = o(x)$ e $g(f(x)) = o(x)$.

Dimostrazione.

- (a) Abbiamo $|f(x)| \leq M_1|x|, |g(x)| \leq M_2|x|$, dunque $|af(x) + bg(x)| \leq |a||f(x)| + |b||g(x)| \leq (|a|M_1 + |b|M_2)|x|$.
- (b) analogo.
- (c) Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, allora $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < M$ per x vicino a 0, dunque $|f(x)| < Mx$.
- (d) Siano $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ e $|g(x)| \leq M|x|$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(g(x))}{g(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(g(x))}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq 0 \cdot M = 0$. L'altra affermazione è analoga.

□

Dic. 4. Analisi qualitativa di grafici.

Sia f derivabile in (a, b) . Allora per ogni $x \in (a, b)$ esiste il numero $f'(x)$. In altre parole, $f'(x)$ definisce una nuova funzione, detta la **derivata di $f(x)$** .

Definizione 61. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}A$. Se $\lim_{x \rightarrow \xi_0 \pm} f(x) = \infty$ o $-\infty$, la retta $x = x_0$ è detto un asintoto verticale. Se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, allora la retta $y = ax + b$ è detta un asintoto obliquo.

Esempio 62. • $f(x) = \frac{1}{x}$ ha un asintoto verticale $x = 0$ e un asintoto obliquo $y = 0$.

• $f(x) = \log x$ ha un asintoto verticale $x = 0$.

• $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ha asintoti obliqui $y = x, -x$.

Definizione 63. Sia I un intervallo aperto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile due volte e f'' cambia segno in x_0 , x_0 è detto un **punto di flesso**.

Esempio 64. • $f(x) = x^3$. $f''(x) = 6x$, dunque $x = 0$ è un punto di flesso.

• $f(x) = \sin x$. $f''(x) = -\sin x$, dunque $x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso.

Procedure per il grafico. Il grafico di una funzione f si può ottenere come segue.

(0) Determinare il dominio A di definizione (naturale).

(1) Vedere se f ha una simmetria o un periodo.

(2) Studiare dove $f(x) > 0, = 0, < 0$.

(3) Studiare i limiti a $\mathcal{D}^*A \setminus \mathring{A}$ (dove $\mathring{A}$ è la parte interna di A) e determinare gli asintoti

(4) Studiare il segno della derivata f' e trovare punti critici (dove $f'(x) = 0$).

(5) Studiare il segno della derivata seconda f'' e determinare se i punti critici sono massimi o minimi locali, e gli intervalli di convessità e concavità.

Esempio 65. • $f(x) = e^{-(2x-1)^2}$.

(0) $f(x)$ è definito per tutti $x \in \mathbb{R} = A$ in maniera naturale.

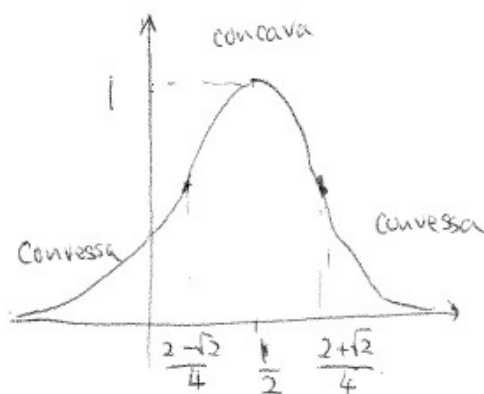
(1) $f(x + \frac{1}{2}) = f(-x + \frac{1}{2})$, cioè $f(x)$ è pari rispetto a $x = \frac{1}{2}$.

(2) $e^{-(2x-1)^2} > 0$ per tutti $x \in \mathbb{R}$.

(3) $\mathcal{D}^*A = \pm\infty$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Gli asintoti sono $y = 0$.

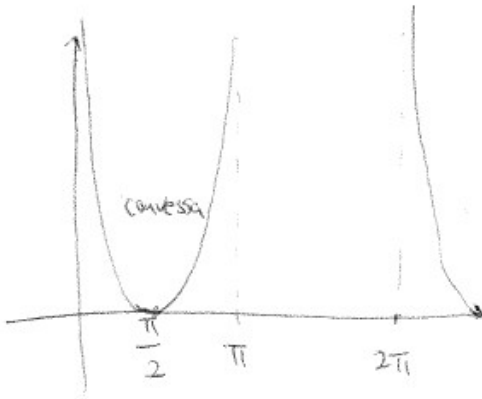
(4) $f'(x) = -4(2x-1)e^{-(2x-1)^2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. $f(\frac{1}{2}) = 1$.

(5) $f''(x) = (16(2x-1)^2 - 8)e^{-(2x-1)^2} = (64x^2 - 64x + 8)e^{-(2x-1)^2}$. I punti di flesso sono le soluzioni di $8x^2 - 8x + 1 = 0$, cioè $x = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{2})$.



- $f(x) = \log\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

- (0) $\log y$ è definito per $y > 0$, dunque $\frac{1}{\sin x} > 0$, ovvero $\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ per $n \in \mathbb{Z}$.
- (1) $\sin(x+2\pi) = \sin x$, dunque $f(x+2\pi) = f(x)$. Basta fare il grafico per $(0, 2\pi)$. Siccome $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(-x + \frac{\pi}{2})$, $f(x)$ è pari rispetto a $x = \frac{\pi}{2}$.
- (2) $0 < \sin x \leq 1$, dunque $\frac{1}{\sin x} \geq 1$ e $\log\left(\frac{1}{\sin x}\right) \geq 0$.
- (3) $\mathcal{D}(0, \pi) = \{0, \pi\}$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \infty$. Gli asintoti sono $x = 0, \pi$.
- (4) $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. $f'(x) < 0$ se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, e $f'(x) > 0$ se $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- (5) $f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$.

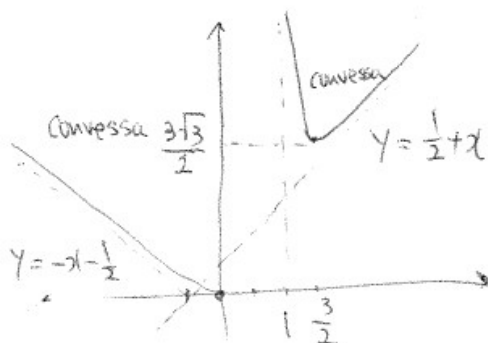


- $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

- (0) $\sqrt{y}$ è definito per $y \geq 0$, dunque $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$, ovvero $x > 1$ o $x \leq 0$.
- (1) Simmetria non c'è.
- (2) $f(x) \geq 0$ per definizione. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (3) $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = |x| \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = |x| + o(|x|)$ vicino a $\pm\infty$.
 - $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x = \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} \rightarrow -\frac{1}{2}$ quando $x \rightarrow -\infty$. L'asintoto obliquo è $y = -x - \frac{1}{2}$.
 - $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $x \rightarrow \infty$. L'asintoto obliquo è $y = x + \frac{1}{2}$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$. L'asintoto verticale è $x = 1$.
- (4) $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)-x^3}{2(x-1)^2 f(x)} = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2 f(x)}$. $f'(x) > 0$ se $x > \frac{3}{2}$ e $f'(x) < 0$ se $x < \frac{3}{2}$. $f(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{27}{4}}$.
- (5) Abbiamo $f''(x) = \frac{(2x(2x-3)+2x^2)(2(x-1)^2 f(x)) - x^2(2x-3)(4(x-1)f(x)+2(x-1)^2 f'(x))}{4(x-1)^4 f(x)^2}$. Vale che

$$\begin{aligned}
 4(x-1)f(x) + 2(x-1)^2 f'(x) &= \frac{8(x-1)^3 f(x)^2 + 2(x-1)^2 x^2 (2x-3)}{2(x-1)^2 f(x)} \\
 &= \frac{4x^3 + x^2(2x-3)}{f(x)} = \frac{(x-1)(6x-3)f(x)}{x}
 \end{aligned}$$

Dunque $f''(x) = \frac{(2x(2x-3)+2x^2)(2(x-1)^2 f(x)) - x(2x-3)(x-1)(6x-3)f(x)}{4(x-1)^4 f(x)^2} = \frac{3x}{4(x-1)^3 f(x)}$. Segue che $f''(x) > 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 1$. $f(x)$ è convessa.



Applicazione: numero di soluzioni. Possiamo fare i grafici delle funzioni $f(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = e^x - 1$. Si può dimostrare che ci sono due soluzioni $f(x) = g(x)$.

Infatti, consideriamo $g(x) - f(x)$ e basta trovare tutti x tale che $g(x) - f(x) = 0$. Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) - f(x) = \infty$ e $g(0) - f(0) = (1-1) - 1 = -1$. Per il teorema di valore intermedio, ci sono soluzioni in $x > 0$ e $x < 0$. Inoltre, $g'(x) - f'(x) = e^x + 2x$, che ha una sola soluzione (perché in $x > 0$ la funzione è positiva e negativa per x sufficientemente piccolo, mentre $g''(x) - f''(x) = e^x + 2$ è positiva, cioè $g'(x) - f'(x)$ è strettamente crescente). Dunque $g(x) - f(x)$ è decrescente in una semiretta ed è crescente nel resto, ed e può avere al massimo due zeri.

Dic. 5. Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor.

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora la prima derivata f' definisce una funzione su (a, b) . Può capitare che f' sia di nuovo derivabile, e così via. In questo caso, si scrive $f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f$. Analogamente, $f''' = f^{(3)} \dots$ Si pone anche $f^{(0)} = f$.

Definizione 66. Sia $n \in \mathbb{N}$, (a, b) un intervallo aperto.

- Si dice che f è derivabile n volte in $x_0 \in (a, b) = I$ se $f^{(k)}$ è derivabile per $1 \leq k \leq n-2$ e $f^{(n-1)}$ è derivabile in un intorno di x_0 .
- Si denota con $C^n(I)$ l'insieme delle funzioni derivabili n volte su I e le derivate n -ma sono continue.

Esempio 67. • $f(x) = x^m$. $Df(x) = mx^{m-1}$, $D^2 f(x) = m(m-1)x^{m-2}$, $\dots$ $D^n f(x) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$ se $m \geq n$, $D^n f(x) = 0$ se $m < n$.

- $f(x) = \sin x$. $Df(x) = \cos x$, $D^2 f(x) = -\sin x$, $D^3 f(x) = -\cos x$, $D^4 f(x) = \sin x, \dots$
- $f(x) = e^x$. $Df(x) = e^x$, $D^2 f(x) = e^x, \dots$
- $f(x) = \log x$ su $(0, \infty)$. $Df(x) = \frac{1}{x}$, $D^2 f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\dots$ $D^n f(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \dots$

- $f(x) = |x|x = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$. $f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$ dunque $f'(x) = 2|x|$, non è più

derivabile. Dunque $f \in C^1(\mathbb{R})$ ma $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Proposizione 68. Siano f, g derivabili n volte in $x_0 \in (a, b)$

- (i) $f + g, f \cdot g$ sono derivabili n volte in x_0 .
- (ii) Se $f(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 , allora $\frac{1}{f}$ è n volte derivabile in x_0 .
- (iii) Se h è derivabile in $g(x_0)$, allora $f(g(x))$ è derivabile n volte in x_0 .
- (iv) Se $f'(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 e f è iniettiva e continua, allora $f^{-1}(y)$ è derivabile n volte in $y_0 = f(x_0)$.

Dimostrazione.

- (i) $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$. Per $f \cdot g$, vale $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, e f, g, f', g' sono $n - 1$ volte derivabili, dunque per induzione fg è n volte derivabile.
- (ii) $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$, ed f' e $\frac{1}{f^2}$ sono $n - 1$ volte derivabili per (i), dunque per induzione $\frac{1}{f}$ è n volte derivabile.
- (iii) $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$, e $g' \circ f' \circ g$ sono $n - 1$ volte derivabili per l'ipotesi di induzione, dunque $f \circ g$ è n volte derivabile.
- (iv) $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ con $x = f(y)$, ovvero, $f^{-1}(y) = \frac{1}{f' \circ f(y)}$. Per (ii) e (iii) è $n - 1$ volte derivabile in $y_0 = f(x_0)$.

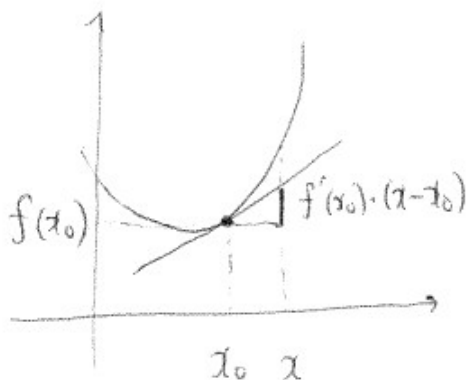
□

Formula di Taylor

Sia f derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Per definizione, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, ovvero, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$. Con i simboli di Landau,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

vicino a x_0 (**Formula di Taylor al primo grado**). In altre parole, f si può approssimare con $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ fino al primo ordine di $x - x_0$.



Proposizione 69 (Formula di Taylor al secondo ordine). Sia f derivabile due volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + o((x - x_0)^2)$ vicino a x_0 .

Dimostrazione. Poniamo $P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0)$. Allora $P_2'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0)$. Inoltre, vale la formula di Taylor al primo grado per f' : $f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + o(x - x_0)$ vicino a x_0 . Cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D(f(x) - P_2(x))}{D((x - x_0)^2)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - (x - x_0)f''(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2}(f''(x_0) - f''(x_0)) = 0.$$

Per il teorema di Bernoulli-de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Ovvero, $f(x) = P_2(x) + o((x - x_0)^2)$. □

Formula di Taylor-Peano al grado n

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + o((x - x_0)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

Lemma 70. Siano f, g derivabili n volte in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$. Assumiamo che $g^{(k)}(x) \neq 0$ per $x \neq x_0, 0 \leq k \leq n$ ma $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n - 1$. Allora per ogni $x \neq x_0, x \in (a, b)$ esiste ξ tra x, x_0 tale che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}$.

Dimostrazione. Per Proposition 52,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \frac{f^{(2)}(\xi_2)}{g^{(2)}(\xi_2)} = \cdots = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}$$

e poniamo $\xi = \xi_n$. □

Proposizione 71. Siano F derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora $F(x) = o((x - x_0)^n)$ vicino a x_0 se e solo se $F^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n$.

Dimostrazione. Sappiamo la tesi per $n = 0$ per definizione. Dimostriamo la tesi per induzione.

Sia $F(x) = o((x - x_0)^{n+1})$. Allora $F^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n$ per l'ipotesi di induzione. $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$. D'altra parte, $\frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{F^n(\xi)}{n!(\xi - x_0)}$ per qualche ξ tra x, x_0 per Lemma 70. Se $x \rightarrow x_0, \xi \rightarrow 0$, cioè $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{F^n(\xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{n!}$, dunque $F^{(n+1)}(x_0) = 0$.

Siano $F^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n$. Allora per il teorema di Bernoulli-de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(n)}(x) - F^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(n)}(x)}{(n+1)!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(n-1)}(x)}{\frac{(n+1)!}{2}(x - x_0)^2} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

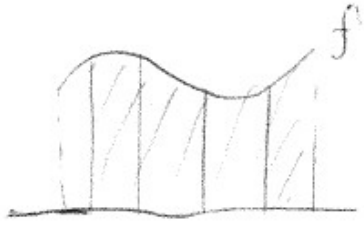
Ovvero, $F(x) = o((x - x_0)^{n+1})$. □

Sia $f(x)$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora, con $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $D^k(f(x) - P_n(x)) = 0$ per $0 \leq k \leq n$. Per Proposizione 71, $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$.

Dic. 11. L'integrale nel senso di Riemann.

Data una funzione f , consideriamo l'integrale. È un concetto che estende l'area delle figure famigliari come triangoli e dischi. Se $f(t)$ rappresenta la velocità di una macchina a tempo t , l'integrale di f ci dà la distanza che la macchina fa in un intervallo di tempo. Oppure se f rappresenta la densità di un filo di ferro, l'integrale ci dà il peso.

L'area di una regione definita da una funzione si potrebbe approssimare con rettangoli.



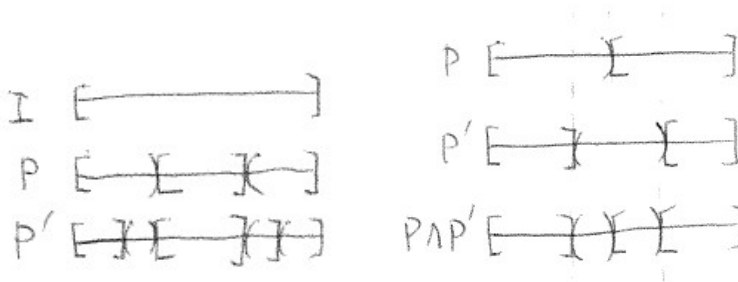
Per un intervallo $I = (a, b)$ o $(a, b]$ ecc., $|I| = b - a$.

Definizione 72. (i) Sia I un intervallo limitato in $\mathbb{R}$. Una partizione di I è un insieme finito di intervalli $P = \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ distinti tali che $\bigcup_{j=1}^n I_j = I$.

(ii) $\text{diam}(P) = \max\{|I_j| : 1 \leq j \leq n\}$.

(iii) Una partizione P' è detta un raffinamento di P se ogni intervallo di P ammette una partizione formata da intervalli in P' . Ovvero, ogni $I_j \in P$ si scrive come $I_j = \bigcup_{k=1}^{n_j} I_{jk}$, $I_{jk} \in P'$. Si scrive $P' \succ P$.

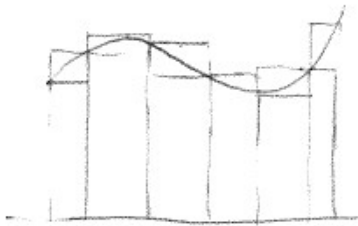
(iv) Se P, P' sono partizioni di I , si definisce $P \wedge P' = \{I \cap I' : I \in P, I' \in P', I \cap I' \neq \emptyset\}$. $P \wedge P' \succ P, P'$.



(v) Per una partizione P di I e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, si pongono

$$\underline{S}_I(f, P) = \sum_{j=1}^n (\inf_{I_j} f) |I_j| \leq \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f) |I_j| = \overline{S}_I(f, P).$$

Se P è una partizione, $|I| = \sum_{j=1}^n |I_j|$.



Esempio 73. $I = [0, 1]$. $P_n = \{[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1]\}$. Se $n' = mn$ per $m \in \mathbb{N}$, allora $P_{n'} \succ P_n$. $\text{diam}(P) = \frac{1}{n}$.

• Se $f(x) = a$, allora $\underline{S}_I(f, P_n) = \overline{S}_I(f, P_n) = a$.

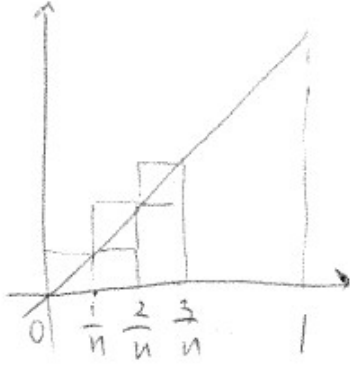
• Sia $f(x) = x$.

$$\overline{S}_I(f, P_n) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Analogamente,

$$\underline{S}_I(f, P_n) = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dunque, prendendo $n \rightarrow \infty$, otteniamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_I(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_I(f, P_n) = \frac{1}{2}$, che è l'area del triangolo $\{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x = f(x)\}$.



Lemma 74. Sia I un intervallo limitato, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se P, P' sono due partizioni di I , allora

(i) Se $P \prec P'$, allora

$$\underline{S}_I(f, P) \leq \underline{S}_I(f, P') \leq \bar{S}_I(f, P') \leq \bar{S}_I(f, P).$$

Equivalentemente, $\bar{S}_I(f, P') - \underline{S}_I(f, P') \leq \bar{S}_I(f, P) - \underline{S}_I(f, P)$.

(ii) $\underline{S}_I(f, P) \leq \bar{S}_I(f, P')$

Dimostrazione.

(i) Se $P \prec P'$, allora possiamo prendere $P = \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ e $P' = \{I_{jk} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n_j\}$ tale che $\cup_{k=1}^{n_j} I_{jk} = I_j$. Allora, per ogni j, k , $\inf_{I_j} f \leq \inf_{I_{jk}} f$, $\sup_{I_j} f \geq \sup_{I_{jk}} f$. . Segue che

$$\begin{aligned} \underline{S}_I(f, P) &= \sum_{j=1}^n (\inf_{I_j} f) |I_j| = \sum_{j=1}^n (\inf_{I_j} f) \sum_{k=1}^{n_j} |I_{jk}| \leq \sum_{j=1}^n (\inf_{I_{jk}} f) \sum_{k=1}^{n_j} |I_{jk}| = \underline{S}_I(f, P'). \\ \bar{S}_I(f, P) &= \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f) |I_j| = \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f) \sum_{k=1}^{n_j} |I_{jk}| \geq \sum_{j=1}^n (\sup_{I_{jk}} f) \sum_{k=1}^{n_j} |I_{jk}| = \bar{S}_I(f, P'). \end{aligned}$$

Si noti che $\underline{S}_I(f, Q) \leq \bar{S}_I(f, Q)$ per ogni partizione Q .

(ii) Siccome $P \prec P \wedge P'$, $P' \prec P \wedge P'$, segue da (i) che $\underline{S}_I(f, P) \leq \underline{S}_I(f, P \wedge P') \leq \bar{S}_I(f, P \wedge P') \leq \bar{S}_I(f, P')$.

□

Definizione 75. Sia $I = (a, b)$ o $[a, b]$ ecc. un intervallo limitato e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. f è detta **integrabile su I** se

$$\inf_P \underline{S}_I(f, P) = \sup_P \bar{S}_I(f, P),$$

integrale inferiore integrale superiore

dove $\inf_P$ e $\sup_P$ si prende tra tutte le partizioni P di I e si scrive $\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. x non significa nulla, e dunque si scrive anche $\int_I f(t) dt$.

Esempio 76. • $\int_0^1 adx = a$. Infatti, per tutte le partizioni $\underline{S}_I(f, P) = \overline{S}_I(f, P) = a$.

- $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. Infatti, abbiamo trovato P_n tale che $\underline{S}_I(f, P) = \frac{n(n-1)}{2n^2}$, $\overline{S}_I(f, P) = \frac{n(n-1)}{2n^2}$, dunque il sup e il inf coincidono ed è $\frac{1}{2}$.

In generale, è difficile dimostrare l'integrabilità per definizione. Fortunatamente, abbiamo il teorema fondamentale del calcolo (Teorema 86) ci permetterà di calcolare integrali usando la conoscenza di derivate.

Proposizione 77. Siano I un intervallo limitato, f, g limitati e integrabili su I .

- (i) Se $c, d \in \mathbb{R}$, allora $af + bg$ è integrabile su I e $\int_I (cf(t) + df(t))dt = c \int_I f(t)dt + d \int_I g(t)dt$.
- (ii) Se $f \leq g$, allora $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.
- (iii) Se $\underline{I} \subset I$, allora f è integrabile su $\underline{I}$. Se $P = \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ è una partizione di I , allora $\int_I f(t)dt = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(t)dt$.

Dimostrazione.

- (i) L'integrabilità di cf è facile: $\underline{S}_I(cf, P) = c\underline{S}_I(f, P)$ se $c \geq 0$ e $\underline{S}_I(cf, P) = c\overline{S}_I(f, P)$ se $c < 0$. Se $c = 0$ tutto diventa 0, e se $c > 0$ si ottiene il limite direttamente, e se $c < 0$ basta scambiare il sup e il inf.

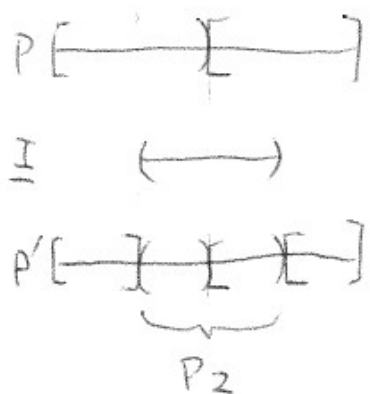
Siano f, g integrabili. Abbiamo $\inf_{I_j} f + \inf_{I_j} g \leq \inf_{I_j} (f + g)$, dunque per ogni partizione P , $\underline{S}_I(f, P) + \underline{S}_I(g, P) \leq \underline{S}_I(f + g, P)$. Analogamente, $\overline{S}_I(f + g, P) \leq \overline{S}_I(f, P) + \overline{S}_I(g, P)$. Prendendo inf e sup rispetto a P , otteniamo l'integrabilità di $f + g$ e l'ugualianza.

- (ii) Se $f \leq g$, allora $\overline{S}_I(f, P) \leq \overline{S}_I(g, P)$ per ogni P .

- (iii) Sia $\underline{I} \subset I$. Allora, per ogni partizione P di I , possiamo prendere un raffinamento P' che consiste dagli intervalli della forma $I_j \cap \underline{I}$ e $I_j \setminus \underline{I}$ (questo ultimo può essere un'unione di intervalli). Sia $P_2 = \{I_j \cap \underline{I} : 1 \leq j \leq n\}$. Allora

$$\begin{aligned} \overline{S}_I(f, P_2) - \underline{S}_I(f, P_2) &\leq \overline{S}_I(f, P_2) - \underline{S}_I(f, P_2) + \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j \setminus \underline{I}} f - \inf_{I_j \setminus \underline{I}} f) |I_j \setminus \underline{I}| \\ &= \overline{S}_I(f, P') - \underline{S}_I(f, P') \end{aligned}$$

Siccome f è integrabile, esiste P' tale che $\overline{S}_I(f, P') - \underline{S}_I(f, P') < \epsilon$, allora $\overline{S}_I(f, P_2) - \underline{S}_I(f, P_2) < \epsilon$.



Consideriamo il caso $n = 2$. Sia $I = I_1 \cup I_2$. Per P_1, P_2 partizioni di I_1, I_2 , $P = P_1 \cup P_2$ è una partizione di I . Allora

$$\underline{S}_{I_1}(f, P_1) + \underline{S}_{I_2}(f, P_2) = \underline{S}_I(f, P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}_I(f, P_1 \cup P_2) = \overline{S}_{I_1}(f, P_1) + \overline{S}_{I_2}(f, P_2).$$

Se $\overline{S}_{I_1}(f, P_1) - \underline{S}_{I_1}(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\overline{S}_{I_2}(f, P_2) - \underline{S}_{I_2}(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, allora $\overline{S}_I(f, P_1 \cup P_2) - \underline{S}_I(f, P_1 \cup P_2) < \varepsilon$ e i limiti coincidono: $\int_I f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx$.

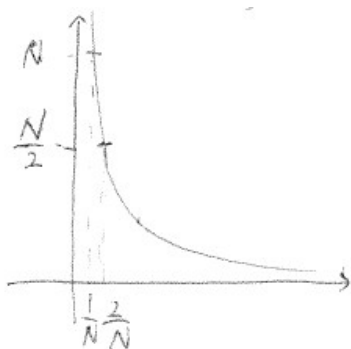
□

Dic. 12. Continuità uniforme, l'integrabilità delle funzioni continue.

Quando una funzione è integrabile? Scopriamo che tutte le funzioni continue su intervalli limitati chiusi sono integrabili.

Definizione 78. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. f è detta **uniformemente continua su A** se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ per tutti $x, y \in A$, $|x - y| < \delta$.

Esempio 79. (funzione non uniformemente continua) $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $\{x > 0\}$. Ma non è uniformemente continua. Infatti, per $\epsilon = 1$ per tutti δ , se $x = \frac{1}{N} < \delta$, $y = \frac{2}{N}$, allora $f(y) - f(x) = \frac{N}{2} > 1$ se N è abbastanza grande, anche se $x - y = \frac{1}{N}$.



Teorema 80 (Heine-Cantor). Siano K compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $\epsilon > 0$ tale che per tutti $\delta > 0$ esistono $x, y \in K$, $|x - y| < \delta$ ma $|f(x) - f(y)| > \epsilon$. In particolare, per $\frac{1}{n}$ esistono $x_n, y_n \in K$ tale che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Siano x_{n_k} una sottosuccessione convergente (esiste per Proposizione 2.39) a $\tilde{x} \in K$. Siccome $|\tilde{x} - y_{n_k}| \leq |\tilde{x} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \rightarrow 0$, anche $\{y_{n_k}\}$ è convergente a $\tilde{x} \in K$.

Allora $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| = 0$, che contraddice l'ipotesi che $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \epsilon$.

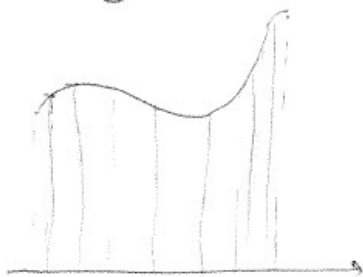
Dunque per tutti ϵ esiste δ tale che per tutti $x, y \in K$, $|x - y| < \delta$ vale $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. □

Proposizione 81. Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso e limitato. Allora ogni funzione continua f su I è integrabile.

Dimostrazione. Per Teorema 80, per $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ esiste δ tale che per $x, y \in I$, $|x - y| < \delta$ vale $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Ora, per qualunque partizione $P = \{I_j\}_{j=1}^n$ con $\text{diam } P < \delta$, si ha

$$\overline{S}_I(f, P) - \underline{S}_I(f, P) = \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| < \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{2(b-a)} |I_j| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dunque f è integrabile. □



Corollario 82. Se f è continua, allora $|f|$ è continua e per Proposizione 77(ii), $|\int_I f(x)dx| \leq \int_I |f(x)|dx$.

Esempio 83. (di una funzione non integrabile) Se $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ razionale} \\ 1 & x \text{ irrazionale} \end{cases}$, $f(x)$ non è integrabile: $\overline{S}_I(f, P) = 1, \underline{S}_I(f, P) = 0$.

Definizione 84. Se $a < b$, allora poniamo $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Lemma 85. Vale $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ per tutti $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se $a < b < c$, allora segue da Proposizione 77(iii). Se $a < c < b$, allora

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

Altri casi sono analoghi. □

Teorema 86 (Teorema fondamentale del calcolo 1). Siano $I = [a, b]$ un intervallo chiuso e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora, la funzione di x su I

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Siccome f è continua, $\left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|t - x| < \delta$, allora $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, dunque $\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt < h\epsilon$. Dunque $\left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| < \epsilon$. Siccome $\epsilon > 0$ è arbitrario, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$. □

Teorema 87 (Teorema fondamentale del calcolo 2). Siano $I = [a, b]$ un intervallo chiuso e $f \in C^1(I)$, cioè f è derivabile in (a, b) e f' è continua e si estende a $[a, b]$ in maniera continua. Allora

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Dimostrazione. $D(f(x) - f(a)) = f'(x)$, mentre $D \int_a^x f'(t)dt = f'(x)$ per Teorema 86. Dunque $D(f(x) - f(a) - \int_a^x f'(t)dt) = 0$, e per Corollario 49, $f(x) - f(a) - \int_a^x f'(t)dt$ è costante, ma con $x = a$, $f(a) - f(a) - \int_a^a f'(t)dt = 0$, dunque $f(x) - f(a) - \int_a^x f'(t)dt = 0$. □

Teorema 87 ci permette di calcolare molti integrali delle funzioni che conosciamo.

- $\int_a^x t^n dt = \frac{1}{n+1}(x^{n+1} - a^{n+1})$.
- $\int_a^x e^t dt = (e^x - e^a)$.

Definizione 88. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se esiste una funzione $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F' = f$, allora F è detta una **primitiva di f** .

Per Corollario 49, se esistono due primitive F, G di f , allora $F(x) - G(x)$ è una costante.

Per Proposizione 81 e Teorema 86 esiste una primitiva se f è continua: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f .

Corollario 89. Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso $I = (a, b)$, e F una funzione primitiva di f . Allora $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Dimostrazione. Sia $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$. Allora $\tilde{F}$ è una primitiva di f , e dunque $\tilde{F} - F = c$ (costante). Per Teorema 87, $\int_a^b f(x)dt = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - F(a)$. $\square$

Una primitiva di f si scrive $\int f$ (a meno di un costante) ed è chiamato anche l'integrale indefinito.

Dic. 18. Vari integrali.

Il calcolo di integrale di f si riduce al calcolo di una primitiva $\int f$.

Funzioni razionali

Sappiamo che

- $\int \frac{1}{(x-a)} dx = \log |x - a|$.
- per $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n+1}}$.
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$, $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$.
- $\int \frac{1}{(x-b)^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{(x-b)}{a})$.

Abbiamo anche

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = - \int \frac{1}{(x^2+1)} + \int \frac{-2x \cdot x}{2(x^2+1)^2} dx \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \int \frac{1}{2(x^2+1)} = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Verificare la primitiva prendendo la derivata:

$$\left(\frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} \right)' = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{(x^2+1) - 2x^2}{2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}.$$

In generale, la derivata della primitiva deve essere la funzione di partenza. Possiamo verificare la primitiva prendendo la derivata, che è spesso più facile.

Esempio 90. • $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x^3-x) + \frac{x}{4}-1}{4x^3-x} dx$. Notiamo che $\frac{x-4}{4x^3-x} = \frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{4}{x} + \frac{-\frac{7}{2}}{2x-1} + \frac{-\frac{9}{2}}{2x+1}$ e dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx &= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-\frac{7}{2}}{2x-1} + \frac{-\frac{9}{2}}{2x+1} \right) dx \\ &= \frac{x}{4} + \log|x| - \frac{7}{16} \log|2x-1| - \frac{9}{16} \log|2x+1|.\end{aligned}$$

• Usando $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{-\frac{x}{2}+1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{x}{2}}{x^2+1}$ e dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx &= \int \frac{-\frac{x}{2}+1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} dx \\ &= \int \frac{-\frac{(x-1)}{2} + \frac{1}{2}}{(x-1)^2} dx + \int \frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \log(x^2+1).\end{aligned}$$

In generale, se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di coefficienti reali, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scrivere come la somma di $\frac{P(x)}{(x-a)^n}$ o $\frac{P(x)}{(x-b)^2+a^2)^n}$, e per ognuno di questi si può trovare una primitiva.

Esercizio: $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{(x^2+1)^2}$.

Cambio di variabile

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, cioè $\int f(x) dy = F(x)$. Quando è difficile trovare F direttamente, si può considerare $x = \varphi(t)$. Per la regola della catena, $\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$. Se $G(t)$ è una primitiva di $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, allora $F(x) = G(\varphi^{-1}(t))$.

Per ricordare la regola, è comodo scrivere

$$\int f(x) dx = \int f(t) \frac{dx}{dt} dt,$$

anche se la formula è solo formale.

Esempio 91. • $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$. Con $t = e^x + 1, x = \varphi(t) = \log(t-1), \varphi'(t) = \frac{1}{t-1}$,

$$\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \log \left| \frac{t-1}{t} \right|$$

e con $t = e^x + 1, \int \frac{1}{e^x+1} dx = \log \frac{e^x}{e^x+1}$.

• $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Con $x = \varphi(t) = \sin t, \varphi'(t) = \cos t, t = \arcsin x$, se $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}$$

e con $t = \arcsin x, \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$, otteniamo $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$.

Integrali definiti

Ci ricordiamo che $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$. Poniamo $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$.

Corollario 92. Se f, g sono derivabili e f', g' sono continue, allora

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Dimostrazione. $(fg)' = f'g + fg'$, dunque $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (primitive) e l'affermazione segue da Teorema 87. $\square$

Corollario 93. f continua su $[a, b]$, φ derivabile e φ' continua su $[\alpha, \beta]$, e $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ e $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Siccome $\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Esempio 94. Notiamo $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|$ ed è uguale a $\cos t$ se $|t| < \frac{\pi}{2}$, dunque con $x = \sin t$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Esercizi:

- $t \cos(t^2) = (\frac{1}{2} \sin(t^2))'$, dunque con $x = t^2$,

$$\int_0^2 t \cos(t^2)dx = \int_0^4 \sin x dx = \sin 4.$$

Oppure, direttamente

$$\int_0^2 t \cos(t^2)dx = \int_0^2 \sin(t^2)dt = \sin 4.$$

- $\int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2}[x e^x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{1}{4}[e^{2x}]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$

Dic. 19. Formula di Taylor con resto integrale e integrali generalizzati (impropri).

Osservazione 95. • Se $f(x) = f(-x)$, allora $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-x)(-x)'dx = \int_0^a f(x)dx$, dunque $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$. $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$

- Se $f(x) = -f(-x)$, allora $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-x)(-x)'dx = - \int_0^a f(x)dx$, dunque $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. $\int_{-1}^1 \sin x e^{x^2} dx = 0.$

Proposizione 96. Se f è derivabile $n+1$ volte vicino a x_0 , allora, per x vicino a x_0 ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

dove $R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y)(x - y)^n dy$.

Dimostrazione. La tesi vale per $n = 0$, perché

$$f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(y) dy = f(x_0) + [f(y)]_{x_0}^x = f(x).$$

Assumiamo la tesi per n , e sia f $n+1$ volte derivabile, allora $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x, x_0)$ e

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y)(x - y)^n dy \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(y)(x - y)^{n+1} \right]_{x_0}^x + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(y)(x - y)^{n+1} dy \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(y)(x - y)^{n+1} dy \end{aligned}$$

□

Integrabili si possono definire (a volte) per funzioni non limitati e intervalli non limitati.

Definizione 97. Sia (a, b) un intervallo, $a \in \mathbb{R}$ oppure $a = -\infty$ e $b \in \mathbb{R}$ oppure $b = +\infty$. Sia f una funzione integrabile su tutti $[\alpha, \beta]$, dove $a < \alpha < \beta < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se esiste il limite $\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, allora si scrive

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Vale anche la regola $\int_a^{\gamma} f(x) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx = \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$ per $\gamma \in (a, b)$. Analogamente, se esiste il limite $\lim_{\beta \rightarrow b} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, allora $\int_{\alpha}^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Se esistono tutti i due limiti, allora si pone $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$.

Questo non dipende da $x_0 \in (a, b)$. Infatti,

$$\begin{aligned} \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx &= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx \\ &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx \end{aligned}$$

Esempio 98. • Consideriamo $(0, 1)$ e la funzione $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $\varepsilon > 0$, se $\alpha \neq -1$,

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} [x^{\alpha+1}]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{\alpha+1} (1 - \varepsilon^{\alpha+1}),$$

e quando $\varepsilon \rightarrow +0$ questo ultimo converge a $\frac{1}{\alpha+1}$ se $\alpha > -1$, e diverge se $\alpha < -1$. Per $\alpha = -1$,

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{-1} dx = [\log x]_{\varepsilon}^1 = -\log \varepsilon,$$

che tende a ∞ quando $\varepsilon \rightarrow 0+$. Dunque, per $\alpha > -1$, $\int_0^1 x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}$.

- Consideriamo $(1, \infty)$ e la funzione $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Per $\beta > 1$, se $\alpha \neq -1$,

$$\int_1^\beta x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} [x^{\alpha+1}]_1^\beta = \frac{1}{\alpha+1} (\beta^{\alpha+1} - 1),$$

e quando $\beta \rightarrow +\infty$ questo ultimo converge a $-\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{|\alpha+1|}$ se $\alpha < -1$, e diverge se $\alpha > -1$. Per $\alpha = -1$,

$$\int_1^\beta x^{-1} dx = [\log x]_1^\beta = \log \beta,$$

che tende a ∞ quando $\beta \rightarrow +\infty$. Dunque $\int_1^\infty f(x) dx = \frac{1}{|\alpha+1|}$ per $\alpha < -1$.

- Consideriamo $(-\infty, \infty)$. $\int_\alpha^\beta x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{-x^2}]_\alpha^\beta = \frac{1}{2} (e^{-\beta^2} - e^{-\alpha^2})$ e tutti e due limiti $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty}, \lim_{\beta \rightarrow \infty}$ esistono. Inoltre, $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} ([e^{-x^2}]_{-\infty}^0 + [e^{-x^2}]_0^\infty) = 0$.

Proposizione 99. Siano f, g integrabili su tutti $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

- (i) Siano $0 \leq f \leq g$. Se $\int_a^b g(x) dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x) dx$ converge. Se $\int_a^b f(x) dx$ diverge, allora diverge anche $\int_a^b g(x) dx$.
- (ii) Siano $0 < f$, e $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$. Allora $\int_\alpha^b f(x) dx$ esiste se e solo se $\int_\alpha^b g(x) dx$ esiste.
- (iii) Sia $f > 0$ decrescente su $[\alpha, \infty)$. $\int_\alpha^\infty f(x) dx$ converge se e solo se $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ per qualche N .
- (iv) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Dimostrazione.

- (i) Su ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ vale $\int_\alpha^\beta f(x) dx \leq \int_\alpha^\beta g(x) dx$, dunque $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ è limitato e cresce quando α, β si avvicinano a a, b .
- (ii) Sia $c > 0$ (l'altro caso è analogo). Per x_0 vicino a b vale $\frac{c}{2} g(x) \leq f \leq 2c g(x)$. Dunque segue da (i).
- (iii) Vale $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$, dunque $\sum_{n=N}^M \leq \int_N^{M+1} f(x) dx \leq \sum_{n=N}^{M+1} f(n)$.
- (iv) Segue da $-|f| \leq -f^- \leq 0 \leq f^+ \leq |f|$ e (i).

Possiamo dimostrare che $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ è divergente usando integrale. Infatti, $\int_1^N \frac{1}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$, ma $\int_1^N \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^N = \log N - 0 \rightarrow \infty$, dunque anche $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$. □

Esempio 100. • $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge. Infatti, $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_1^\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}$ che tende a 1 quando $\alpha \rightarrow \infty$.

- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ converge. Infatti, per integrale per parti,

$$\int_1^\alpha \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos \alpha}{\alpha} + \int_1^\alpha \frac{\cos x}{x^2} dx$$

I primi due termini tendono a $\cos a$ mentre l'ultimo è convergente.

- $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge. Infatti, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$ e dunque si ha $\int_1^\alpha \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{n=2}^{[\alpha]} \frac{2}{\pi(n+1)} \rightarrow \infty$.
- $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx$ è convergente. Infatti, basta considerare $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx$, e siccome $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$, $\int_1^\beta \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx \leq \int_1^\beta x^{-3/2} dx$, dove il lato destro è convergente.
- $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$ è convergente. Infatti, $\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^\beta \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_1^\beta = 1 - \frac{1}{\beta} \rightarrow 1$ quando $\beta \rightarrow \infty$.

Gen. 08. Area e lunghezza.

Area

Sappiamo l'area di rettangoli, triangoli e di dischi. Definiamo l'area di una regione più generale.

Definizione 101. • Siano $f \geq g$ due funzioni integrabili su un intervallo I . L'area della regione tra g, f è definita come segue:

$$D_{g,f} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$
$$\text{area}(D_{g,f}) := \int_I (f(x) - g(x)) dx.$$

- Anche se I non è limitato, se l'integrale improprio $\int_I (f(x) - g(x)) dx$ esiste, allora si definisce l'area di $D_{g,f} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ con la stessa formula.
- Se D è l'unione di tali regioni, allora $\text{area}(D)$ è la somma delle aree di quelle regioni.



Esempio 102. • rettangoli. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, a \leq y \leq b\}$, cioè la lunghezza a e larghezza b , allora $\text{area}(D) = \int_I (b - a) dx = (b - a)|I|$.

- triangoli. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, a], 0 \leq y \leq \frac{b}{a}x\}$, cioè la lunghezza a e larghezza b , allora $\text{area}(D) = \int_0^a \frac{b}{a} x dx = [\frac{b}{2a} x^2]_0^a = \frac{ab}{2}$.
- dischi. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$, cioè il raggio a , allora D si pu' scrivere anche

$$y^2 \leq a^2 - x^2 \iff -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Inoltre, $-a \leq x \leq a$ perché se $x > a$ non esiste y tale che $x^2 + y^2 \leq a^2$. Dunque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

è la forma standard. Per definizione,

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - x^2} - (-\sqrt{a^2 - x^2})) dx \\ &= 2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Per cambio di variabile $x = a \sin \theta$ con $\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$, corrisponde all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ perché $a \sin \frac{\pi}{2} = a, a \sin(-\frac{\pi}{2}) = -a$, $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta$. Usando

$$\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a^2 \pi. \end{aligned}$$

Lunghezza

Una curva, almeno parzialmente, si può rappresentare con una funzione.

- retta. $\{(x, y) : x \in I, y = ax + b\}$.
- semicerchio. $\{(x, y) : x \in (-a, a), y = \sqrt{a^2 - x^2}\}$.
- parabola. $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = x^2\}$.
- iperbola. $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = \sqrt{x^2 + 1}\}$.

Come abbiamo definito l'area di una regione generale usando integrale, definiamo la lunghezza di una curva con integrale.

Definizione 103. Per una curva rappresentata da $G_f := \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$, dove f è differenziabile e f' è continua, si definisce la lunghezza

$$\ell(G_f) := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Se G_f è l'unione di tali grafici, allora $\ell(G_f)$ è la somma delle lunghezze di quelli grafici parziali.

Vediamo che questo coincide nel caso di retta: una retta che va a orizzontalmente e b verticalmente è rappresentata da $\{(x, y) : x \in [0, a], y = \frac{a}{b}x\}$. Dunque $f(x) = \frac{a}{b}x$, $f'(x) = \frac{a}{b}$. Per definizione, $\ell(G_f) = \int_0^a \sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2} dx = a\sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, che coincide con il teorema di Pitagora.

Se una curva è una unione di diverse parti di cui ognuna è rappresentata da una funzione f_j , allora la lunghezza della curva è la somma delle lunghezze delle parti.

Un'altra possibile definizione è approssimare una curva con poligoni: sia $f(x)$ una funzione su $I = [a, b]$ e prendiamo una suddivisione $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Corrispondentemente, si considera la poligonale iscritta $P_f(\{x_k\}) : (x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$. Chiamiamo $\max_{1 \leq k \leq n-1} \{x_{k+1} - x_k\}$ l'ampiezza della suddivisione.

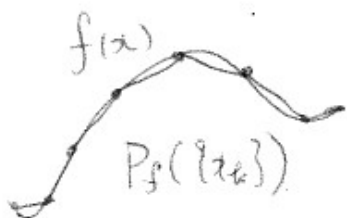
Proposizione 104. Sia f derivabile e f' continua. Allora per ogni ϵ esiste δ tale che se $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ è una suddivisione con ampiezza minore di δ , allora $|\ell(G_f) - \ell(P_f(\{x_k\}))| < \epsilon$.

Dimostrazione. Per il teorema del valor intermedio, esistono $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$ tali che $f(x_k) - f(x_{k+1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k+1})$. Siccome $P_f(\{x_k\})$ è l'unione di segmenti,

$$\begin{aligned}\ell(P_f(\{x_k\})) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\xi_k)}(x_{k+1} - x_k).\end{aligned}$$

D'altra parte, $\sqrt{1 + f'(x)}$ è continua e dunque integrabile. Cioè per continuità uniforme, esiste δ tale che $|\sqrt{1 + f'(x)} - \sqrt{1 + f'(y)}| < \frac{\epsilon}{b-a}$ se $|x - y| < \delta$. Sia P la partizione di I che corrisponde alla suddivisione, allora $\underline{S}_I(\sqrt{1 + f'(x)}, P) \leq \ell(P_f(\{x_k\})) \leq \overline{S}_I(\sqrt{1 + f'(x)}, P)$.

Se l'ampiezza è piccola, la differenza di due estremi è minore di ϵ , e $\underline{S}_I(\sqrt{1 + f'(x)}, P) \leq \ell(G_f) \leq \overline{S}_I(\sqrt{1 + f'(x)}, P)$. Dunque $|\ell(G_f) - \ell(P_f(\{x_k\}))| < \epsilon$. $\square$



Esempio 105. Semicerchio. $I = [-1, 1]$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$\begin{aligned}\ell(G_f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = [\arcsin x]_{-1}^1 = \pi\end{aligned}$$

Ovvero la lunghezza del cerchio è 2π .

Gen. 09. Riepilogo dei concetti e teoremi.

Numeri reali

- $\mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali con operazioni $+$, $\cdot$ e relazione $\leq$. L'assioma di continuità: per ogni coppia di insiemi $A \leq B$, esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq x \leq B$.
- A è detto limitato se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq A \leq b$.
- $A \subset \mathbb{R}$. $\sup A$ è il minimo $x \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq x$ (esiste un tale x se A è limitato grazie all'assioma di continuità). $\inf A$.
- Intervalli $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ (chiuso), $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ (aperto), $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$.
- Una funzione f su $A \subset \mathbb{R}$ è un'associazione di $f(x) \in \mathbb{R}$ ad $x \in A$. Ovvero, $f \subset A \times \mathbb{R}$ tale che $x = y$ se $f(x) = f(y)$. Il grafico di f è f stesso, come un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Esempi: $f(x) = |x|$, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ (polinomi), $p(x)/q(x)$ dove p, q sono polinomi ed è definito dove $q(x) \neq 0$.

Limiti e continuità

- $-\infty < \mathbb{R} < \infty$.
- Sia $A \subset \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{D}A$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $|x - y| < \epsilon$.
- Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}A$. Si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \epsilon$ per tutti $y \in A$, $|y - x| < \delta$.
- Se $f(x) \geq 0$ vicino a x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$.
- Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$.
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L + M$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = LM$, e se $M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = L/M$.
- f è detta continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- somma, prodotto e composizione di funzioni continue sono continue.
- Esempio. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{2x^2+3x+4} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$.

Successioni e serie

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$: l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: l'insieme dei numeri naturali.
- una successione è una funzione a_n da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.
- $\{a_n\}$ è detto convergente a $L \in \mathbb{R}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che $|a_n - L| < \epsilon$ per tutti $n \geq N$.
- limiti notevoli: per $a > 1, p \in \mathbb{N}$, $\lim_n \frac{a^n}{n^p} \rightarrow \infty$. $\lim_n n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$. $\lim_n a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.
- data una successione $\{a_n\}$, la serie è la successione $\sum_{k=1}^n a_k$.
- vari criteri: rapporto, radice, contronto
- $e := \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$
- Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ è convergente: $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$.

Alcuni funzioni come serie

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{ab} = (e^a)^b$.
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- $\log e^x = x$, $e^{\log x} = x$. $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log x^a = a \log x$.
- $\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{x})^x = e^t$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Derivate

- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. f è detta derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste. Si denota $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$, ecc.
- $D(x^n) = nx^{n-1}$, $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (per $\alpha \neq 0$), $D(e^x) = e^x$, $D(a^x) = \log a a^x$, $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $D(\sin x) = \cos x$, $D(\cos x) = -\sin x$, $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $D(f+g) = Df + Dg$, $D(fg) = Dfg + fDg$, $D(\frac{f}{g}) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2}$.
- $D(f \circ g) = D(f) \circ g \cdot D(g)$. $D(f^{-1}) = \frac{1}{D(f) \circ f^{-1}}$.
- f è crescente in (a, b) se $f' \geq 0$ in (a, b) . I punti in cui vale $f'(x) = 0$ sono detti punti critici.
- f è concava in (a, b) se $f'' \leq 0$ in (a, b) . I punti in cui $f'(x)$ cambia segno sono detti punti di flesso.
- grafico: dominio, (eventuale) simmetria, segno, limiti e asintoti, f' , f'' .
- de l'Hôpital: se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ o ∞ o $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ e $g'(x) \neq 0$ vicino a x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
- Formula di Taylor. Se f è derivabile n volte vicino a x_0 , allora $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$, ovvero, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0$.

Integrale

- f è detto integrabile su $[a, b]$ se vale $\sup_P \underline{S}_I(f, P) = \inf_P \overline{S}_I(f, P)$, dove $\underline{S}_I(f, P) = \sum_k (\inf_{x \in I_j} f(x)) |I_j|$ e $\overline{S}_I(f, P) = \sum_k (\sup_{x \in I_j} f(x)) |I_j|$ per una partizione $P = \{I_j\}$ di $[a, b]$ e si considerano tutte le partizioni in sup e inf sopra. Si scrive questo valore $\int_a^b f(x) dx$.
- funzioni continue sono integrabili.
- Se f è continua, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $F'(x) = f(x)$.
- Se f è derivabile e f' è continua, allora $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.
- $\int f'(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = f(\varphi)$ (sostituzione), $\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$ (integrale per parti), $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ (cambio di variabile).
- L'area della regione $D_{g,f} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ è $\int_I (f(x) - g(x)) dx$.
- La lunghezza della curva $G_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$ è $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Gen. 15. Esercizi su serie.

Criteri di convergenza

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. La **serie** $\{\sum_{k=0}^n a_k\}$ è detta convergente a S se per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che per $n > N$ valga $|\sum_{k=1}^n a_n - S| < \epsilon$. Si scrive $S = \sum_{k=1}^\infty a_n$.

- (criterio del rapporto) Sia $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$. Se $L < 1$, $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge. Se $L > 1$, $\sum_{n=0}^\infty a_n$ diverge.

- (criterio della radice) Sia $a_n > 0$ e $(a_n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow R$. Se $R < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Se $R > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.
- (criterio di confronto) Siano $a_n, b_n > 0, c > 0$ tali che $a_n < cb_n$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- (confronto asintotico) Siano $a_n, b_n, c > 0$ e $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$. Allora, $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_n b_n$ converge.
- (convergenza assoluta) si dice che la serie converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ assolutamente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. In questo caso, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- (criterio di Leibniz per serie alternante) Se $a_n > 0$, $a_n > a_{n+1}$ e $a_n \rightarrow 0$, allora $\sum_n (-1)^n a_n$ converge.
- se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$ (ma non viceversa).

Esercizi

- Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \sin n$.

Soluzione. Sia $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Per il criterio del rapporto, $\frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0$, dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ è (assolutamente) convergente. Siccome $|\frac{2^n}{n!} \sin n| \leq \frac{2^n}{n!}$, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \sin n$ è convergente (assolutamente) per il criterio di confronto.

- Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}}{\sqrt{n}}$.

Soluzione. Sia $a_n = \frac{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}}{\sqrt{n}} = \frac{n^4+n-(n^4-n)}{\sqrt{n}(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n})} = \frac{2n}{\sqrt{n}(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n})}$. Siccome $n^4 - n \geq \frac{n^4}{2}$ per $n \geq 2$, abbiamo $\frac{2n}{\sqrt{n}(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n})} \leq \frac{2n}{\sqrt{n} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{n^4}} = \frac{4}{3n^{\frac{3}{2}}}$. Siccome $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, converge anche questa per il criterio di confronto.

- Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$.

Soluzione. Per la formula di Taylor, $\sin x = x + o(x^2)$, in particolare, per x vicino a 0, $\sin x > \frac{1}{2}x$. Allora $\frac{1}{2n} \leq \sin(\frac{1}{n})$, e siccome $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ per il criterio di confronto.

- Studiare la convergenza della serie $\sum_n (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.

Soluzione. Poniamo $a_n = \frac{n+1}{n^2}$. Se $n \geq 1$, $a_{n+1}/a_n = \frac{n^3+2n}{n^3+3n^2+3n+1} < 1$, ovvero, a_n è decrescente per $n \geq 2$. Allora per il criterio di Leibniz, $\sum_n (-1)^n a_n$ converge.

- Studiare, al variare di x , la convergenza della serie $\sum_n (1 + \frac{2}{n})^n x^n$.

Soluzione. Sia $a_n = (1 + \frac{2}{n})^n |x|^n$. Per il criterio della radice, $(a_n)^{\frac{1}{n}} = (1 + \frac{2}{n})|x| \rightarrow |x|$. Dunque la serie converge assolutamente se $|x| < 1$, e diverge se $|x| \geq 1$ (in questo caso, $(1 + \frac{2}{n})^n x^n$ non tende a 0).

- Studiare, al variare di x , la convergenza della serie $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cosh kx}$

Soluzione. Sia $x \neq 0$, allora $\cosh kx = \sum_n \frac{(kx)^{2n}}{(2n)!} > 1 + \frac{(kx)^2}{2}$, e $\sum_k \frac{1}{1 + \frac{(kx)^2}{2}} < \sum_k \frac{1}{\frac{(kx)^2}{2}}$ è convergente. Invece se $x = 0$, la serie è $\sum_k 1$, dunque è divergente.

- Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per la formula di Taylor $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\frac{1}{2 \cdot 3! n^3} < \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} < \frac{2}{3! n^3}$ per n grandi. Se $\alpha \geq 2$, $n^\alpha (\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}) > \frac{1}{12n}$, dunque è divergente, ed è divergente anche $\sum_n (\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$. Se $\alpha < 2$, $n^\alpha (\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) < \frac{1}{3n^{3-\alpha}}$, dunque è convergente.

- Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(2x^2 - 5)^n$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Soluzione. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, dunque $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Per il criterio della radice, $((\frac{1}{3^n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})|2x^2 - 5|^n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{3}|2x^2 - 5|$. Se $|x| < 1$, è divergente. Se $x = \pm 1$, allora la serie è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ed è convergente per il criterio di Leibniz ($\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ è decrescente). Se $1 < |x| < 2$, è convergente. Se $x = \pm 2$, la serie è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, che è divergente per il confronto con $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Se $|x| > 2$, è divergente.
- Dimostrare che $\sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{e^{k^2(x^2+1)}}$ è convergente per tutti $x \in \mathbb{R}$.
- Studiare la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ al variare di $x \in [0, 1)$.
- Studiare la convergenza di $\sum_{k=1}^n \frac{2^n}{nx^n}$ al variare di x .

Gen. 16. Esercizi su derivate, la formula di Taylor e infinitesimi.

- (confronto asintotico) Siano $a_n, b_n, c > 0$ e $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$. Allora, $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_n b_n$ converge.

Esempio: $\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$, cioè $\frac{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{1}{3}$, e siccome $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, converge anche $\sum \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$.

Per una funzione f su (a, b) , la derivata di f in $x_0 \in (a, b)$ è il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ e si denota con $Df(x_0), f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$ ecc.. Se f è derivabile in (a, b) , allora $f'(x)$ definisce una nuova funzione, detta la derivata. Per una funzione composta $f \circ g$, vale la regola della catena $D(f \circ g) = (Df \circ g) \cdot Dg$.

Si scrive, vicino a x_0 ,

$$f_1(x) = f_2(x) + o(g(x))$$

se $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{g(x)} = 0$. Si considera anche $x_0 = \infty$.

Se f è n volte derivabile vicino a $x_0 (\neq \pm\infty)$, allora vale la formula di Taylor del n -mo grado:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

ovvero, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0$.

Il teorema di de l'Hôpital (anche $x_0 = \pm\infty$): se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ o ∞ o $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ e $g'(x) \neq 0$ vicino a x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Esercizi

- Calcolare $(\sin(x^2))'$. *Soluzione.* Per la regola della catena, si ottiene $\cos(x^2) \cdot 2x$.
- Calcolare $((\sin x)^2)'$. *Soluzione.* Per la regola della catena, si ottiene $2 \sin x \cdot \cos x$.
- Calcolare $(\exp(\sin(x^2)))'$. *Soluzione.* Con $f(y) = \exp y, g(z) = \sin z, h(x) = x^2$, si ha $\exp(\sin(x^2)) = f(g(h(x)))$ e $f(g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$, dunque con $f'(y) = \exp y, g'(z) = \cos z, h'(x) = 2x$, si ottiene $(\exp(\sin(x^2)))' = \exp(\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$.

- Sia $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$. Calcolare $F'(x)$.

Soluzione. Per il teorema fondamentale di calcolo, abbiamo $F(x) = G(x^2) - G(0)$, dove $G(x)$ è una primitiva di e^{-x^2} , cioè $G'(x) = e^{-x^2}$. Dunque per la regola della catena, $F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$.

- Sia $F(x) = \int_{\sin x}^{e^x} \log(t^2 + 1) dt$. Calcolare $F''(x)$.

Soluzione. Per il teorema fondamentale di calcolo, abbiamo $F(x) = G(e^x) - G(\sin x)$, dove $G(x)$ è una primitiva di $\log(x^2 + 1)$, cioè $G'(x) = \log(x^2 + 1)$. Dunque per la regola della catena, $F'(x) = G'(e^x) \cdot e^x - G'(\sin x) \cdot \cos x = \log(e^{2x} + 1)e^x - \log(\sin^2 x + 1) \cdot \cos x$, e $F''(x) = \frac{e^x(2e^{2x})}{e^{2x} + 1} + \log(e^{2x} + 1)e^x - \frac{2 \sin x \cos^2 x}{\sin^2 x + 1} + \log(\sin^2 x + 1) \sin x$.

- Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

Soluzione 1. Per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione 2. Per la formula di Taylor, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

- Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Soluzione 1. Per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{24x} = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 2. Per la formula di Taylor, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

- Calcolare $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\log(e^{x^2} + 1)}$. *Soluzione.* Per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\log(e^{x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(e^{2x} + 1)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{x^2} + 1)}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1.$$

- Trovare n tale che $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}}{(x-1)^n} = a \neq 0$, e calcolare a in tal caso.

Soluzione. Per la formula di Taylor, $\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3)$. Dunque $\log x - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3)$ e $\frac{\frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3)}{(x-1)^n} = a \neq 0$ se e solo se $n = 3$, con $a = \frac{1}{3}$.

- sviluppare la serie di Taylor fino al 3 grado.

$$\begin{aligned} - F(x) &= \int_1^{e^x} \sin t^2 dt \text{ (vicino a } x = 0, \text{ si noti che } e^0 = 1). \\ - \log(\sin x + 1) &\text{ (vicino a } x = \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

- Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{\log(x^2 + 1) - x^2}$.

- Trovare n tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(\cos x - 1)}{x^n} = a \neq 0$ e calcolare a in tal caso.

Gen. 22. Esercizi su integrali indefiniti

Nota: lezione del 23 si tiene in aula B6, e non c'è esercitazione.

Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso $I = [a, b]$. Allora è integrabile: gli integrali inferiori e superiori coincidono $\sup_P \underline{S}_I(f, P) = \inf_P \overline{S}_I(f, P)$, dove si considera tutte le partizioni P di I , e si denota con $\int_a^b f(x)dx$ (o anche $\int_a^b f(t)dt$).

Se si definisce $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, allora $F'(x) = f(x)$ per $x \in (a, b)$. Invece, se f è derivabile in (a, b) e $f'(x)$ si può estendere ad una funzione continua su $[a, b]$, allora vale $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$ per $x \in (a, b)$.

Dunque per calcolare un integrale $\int_a^b f(x)dx$, basta trovare una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ (una primitiva di f , si scrive spess $\int f(x) = F(x) + c$), allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Per alcune funzioni (e.g. polinomi, $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\frac{1}{(x-a)^n}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{1-x^2}$), sappiamo le primitive. Per altre funzioni, ci sono varie tecniche. Simbolicamente:

- $\int f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(\varphi)$ (sostituzione)
- $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (integrale per parti)
- $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (cambio di variabile). per integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, dove $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Per verificare che si ha una primitiva corretta, basta prendere la derivata (che è spesso più facile).

Esercizi

- Trovare una primitiva di xe^{x^2} .

Soluzione. Siccome $xe^{x^2} = \frac{1}{2}2xe^{x^2}$ e $2x = (x^2)'$, si ottiene $\frac{1}{2}e^{x^2}$ per sostituzione.

- Trovare una primitiva di $\log x$.

Soluzione. Siccome $\log x = 1 \cdot \log x$ e $1 = (x)'$, si ottiene per integrale per parti $x \log x - \int x \cdot (\log x)' = x \log x - \int 1 = x \log x - x$.

- Trovare una primitiva di $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Soluzione. Con cambio di variabile $e^x = t$, ovvero $x = \log t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, basta trovare una primitiva di $\frac{1}{t+t^{-1}} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2+1}$, dunque $\arctan t = \arctan e^x$.

- Trovare una primitiva di $\frac{x^3}{x^2-1}$.

Soluzione. Si ha

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1) + x}{x^2-1} = x + \frac{x}{(x+1)(x-1)} = x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right),$$

dunque si ottiene $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log |x+1| + \frac{1}{2} \log |x-1|$.

- Trovare una primitiva di $\frac{1}{x^3-1}$.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{3(x-1)} - \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{3(x^2+x+1)} - \frac{\frac{3}{2}}{3((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})} \end{aligned}$$

dunque $\int \frac{1}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \log |x-1| - \frac{1}{6} \log |x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan(\frac{4}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{\sqrt{2}}))$.

- Trovare una primitiva di $\frac{\tan x}{\log(\cos x)}$.

Soluzione. Con sostituzione $\cos x = t$, e $\frac{\tan x}{\log(\cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x \log(\cos x)}$, $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = \int \frac{1}{t \log t} dt$, e con cambio di variabile $t = e^s$, $\frac{dt}{ds} = e^s$, $\int \frac{1}{t \log t} dt = \int \frac{e^s}{e^s s} ds = \log s = \log |\log |t|| = \log |\log |\cos x||$

- Trovare una primitiva di $e^x \sin x$.

Soluzione. Siccome $e^x = (e^x)'$, si ottiene per integrale per parti $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$. Dunque $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x)$.

- Trovare una primitiva di $\cos^3 x$.

Soluzione. Siccome $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, si ha $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ e $\cos(2x) \cos x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$, dunque $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \cos x = \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x)$, e $\int \cos^3 x dx = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin x$.

- Trovare una primitiva di $x^2 \sin x$.

Soluzione. Siccome $\sin x = (-\cos x)'$ e $\cos x = (\sin x)'$, si ottiene per integrale per parti $\int x^2 \sin x = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

- Trovare una primitiva di $x \arctan x$.

Soluzione. Siccome $x = (\frac{x^2}{2})'$, si ottiene per integrale per parti $\int x \arctan x dx = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \int \frac{x^2}{2(x^2+1)} dx = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \int \left(1 - \frac{1}{2(x^2+1)}\right) dx = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x$.

- Trovare una primitiva di $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Soluzione. Siccome $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$, $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \int \frac{1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}$.

- Trovare una primitiva di $\frac{1}{\cos x}$.

Soluzione 1. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|$.

Soluzione 2. Siccome $(\tan \frac{x}{2})' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{2}$, e $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}$, con cambio di variabile $t = \tan \frac{x}{2}$ ovvero $x = 2 \arctan t$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{2}{1-t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \end{aligned}$$

e alla fine $\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right|$ (che è apparentemente diversa ma uguale come sopra).

- Trovare una primitiva di $\cos(nx) \sin(mx)$, dove $m, n \in \mathbb{Z}$ (usare la formula $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$).
- Trovare una primitiva di $\frac{1}{\sin x}$ (veda $\frac{1}{\cos x}$ sopra).
- Trovare una primitiva di $x\sqrt{1-x^2}$ (per parti o sostituzione).

Gen. 23. Esercizi su integrali definiti, impropri, area e lunghezza

Abbiamo definito integrali (di funzioni continue) su intervalli chiusi e finiti. In alcuni casi, possiamo estenderli ad intervalli aperti e infiniti.

Sia f una funzione continua su (a, b) , dove $a \in \mathbb{R}$ o possibilmente $-\infty$ e $b \in \mathbb{R}$ o possibilmente ∞ . Per ogni α, β tali che $a < \alpha < \beta < b$, abbiamo $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Se esiste il limite $\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_\alpha^\beta f(x)dx$, si scrive $\int_a^\beta f(x)dx$. Analogamente, se esiste, $\int_\alpha^b f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_\alpha^\beta f(x)dx$. Se tutti e due esistono, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, dove $a < c < b$ (e questa definizione non dipende da c).

Abbiamo visto che $\int_0^1 x^\alpha dx$ esiste se $\alpha > -1$, e $\int_1^\infty x^\alpha dx$ se $\alpha < -1$. Vale anche $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} \lim_{\beta \rightarrow \infty} [e^{-\alpha x}]_0^\beta = \frac{1}{\alpha}$.

Per altre funzioni, i seguenti criteri sono utili:

- (confronto) Siano $0 \leq f \leq g$. Se $\int_a^b g(x)dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)dx$ converge. Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, allora diverge anche $\int_a^b g(x)dx$.
- (asintotico) Siano $0 < f$, e $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$. Allora $\int_\alpha^b f(x)dx$ esiste se e solo se $\int_\alpha^b g(x)dx$ esiste.
- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Esercizi

- Determinare per quali valori di α esiste il seguente integrale improprio: $\int_0^1 \frac{\sin^\alpha x}{\log(1+x)} dx$.

Soluzione. Quando $x \in [0, 1]$, $1 \leq 1+x \leq 2$ e dunque l'unica discontinuità è $x = 0$, dove $\log(1+x) = 0$. Vicino a $x = 0$, abbiamo l'espansione $\log(1+x) = x + o(x)$, ovvero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. D'altra parte, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, dunque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^\alpha x}{\log(1+x)}}{\frac{x^\alpha}{x^{\alpha-1}}} = 1$. Per il criterio asintotico, l'esistenza del integrale è equivalente a quella di $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$, dunque $\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha > 0$.

- Determinare per quali valori di α esiste il seguente integrale improprio: $\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx$.

Soluzione. La funzione è continua su tutti $[2, \beta]$, $\beta < \infty$. Per cambio di variabile $x = e^t$, abbiamo $\int_2^\beta \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx = \int_{\log 2}^{\log \beta} \frac{1}{e^t t^\alpha} e^t dt = \int_{\log 2}^{\log \beta} \frac{1}{t^\alpha} dt$, e il limite $\beta \rightarrow \infty$ esiste se $\alpha > 1$.

- Determinare per quali valori di α esiste il seguente integrale improprio: $\int_1^\infty x e^{\alpha x} dx$.

Soluzione. Se $\alpha \geq 0$, $x e^{\alpha x} \geq 1$, e dunque non converge. Se $\alpha < 0$, allora $\int_1^\beta x e^{\alpha x} dx = \left[\frac{1}{\alpha} (x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}) \right]_1^\beta$ che converge.

- Determinare per quali valori di α esiste il seguente integrale improprio: $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^{\alpha x}} dx$.

Soluzione. La funzione è continua su tutti $[0, \beta]$, $\beta < \infty$. Siccome $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ per tutti $n \in \mathbb{N}$, vale anche $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{\alpha x}} = 0$ per $\alpha > 0, p > 0$ per cambio di variabile. In particolare, $\frac{x^2}{e^{\alpha x}} = \frac{x^p}{e^{\frac{\alpha}{2}x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}x}} < \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}x}}$ per x sufficientemente grande. D'altra parte, $\int_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}x}} dx = -\frac{2}{\alpha} \lim_{\beta \rightarrow \infty} [e^{-\frac{\alpha}{2}x}]_1^\beta = \frac{2}{\alpha}$, dunque l'integrale è convergente per tutti $\alpha > 0$. Se $\alpha \leq 0$, la funzione $\frac{x^2}{e^{\alpha x}}$ è crescente, dunque non converge.

- Determinare per quali valori di α esiste il seguente integrale improprio: $\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{\cos x} dx$.

- Determinare per quali valori di α esiste il seguente integrale improprio: $\int_0^\infty e^{\alpha x^2 - x} dx$.

Abbiamo definito l'area di una regione definita da due funzioni f, g come segue:

$$D_{g,f} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

$$\text{area}(D_{g,f}) := \int_I (f(x) - g(x)) dx.$$

Se la regione è definita su un intervallo infinito I , l'area è definita come un integrale improprio (se esiste). Analogamente, per una curva rappresentata da f (derivabile e f' continua), la lunghezza del suo grafico $G_f := \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$ è definita da

$$\ell(G_f) := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- Calcolare l'area della regione $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 \leq y^2 \leq x, y \geq 0\}$.

Soluzione. Per la condizione $y^2 \leq x$, è necessaria che $x \geq 0$. La disuguaglianza si può riscrivere equivalentemente $x \leq y \leq \sqrt{x}$. Inoltre, un tale y esiste se e solo se $x \leq \sqrt{x}$, ovvero, $x^2 \leq x$ equivalentemente $x(1 - x) \geq 0$, dunque $0 \leq x \leq 1$. Per la definizione, dobbiamo calcolare

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

- Calcolare l'area della regione $\{(x, y) \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 + 4(y - 3)^2 \leq 9, y \geq 3\}$.

Soluzione. La disuguaglianza si può riscrivere equivalentemente

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + 4(y - 3)^2 \leq 9 &\Leftrightarrow 4(y - 3)^2 \leq 9 - (x - 2)^2 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{9 - (x - 2)^2} \leq 2(y - 3) \leq \sqrt{9 - (x - 2)^2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{9 - (x - 2)^2} + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{9 - (x - 2)^2} + 3 \end{aligned}$$

Inoltre, un tale y esiste se e solo se $9 - (x - 2)^2 \geq 0$, ovvero, $-3 \leq x - 2 \leq 3$, ovvero $-1 \leq x \leq 5$. L'area è, con cambio di variabile $t = \frac{x-2}{3}$ e $t = \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 \sqrt{9 - (x - 2)^2} dx &= 3 \int_{-1}^5 \sqrt{1 - \left(\frac{x - 2}{3}\right)^2} dx \\ &= 9 \int_{-1}^5 \sqrt{1 - t^2} dt \\ &= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{9}{2} \pi. \end{aligned}$$

- Calcolare l'area della regione $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + 4y^2 - 4y + 1 \leq 1\}$.
- Calcolare la lunghezza del grafico per $f(x) = \cosh x$ su $[-1, 1]$.

Soluzione. Per la definizione, $f'(x) = \sinh x$ e dobbiamo calcolare

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_{-1}^1 \cosh x dx = [\sinh x]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}.$$

- Calcolare la lunghezza della curva definita da $\{(x, y) \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 + 4(y - 3)^2 = 9, y \geq 3\}$.

Soluzione. La curva si può scrivere $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 - (x - 2)^2} + 3$.

- Calcolare la lunghezza della curva definita da $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1, y \geq \frac{1}{2}\}$. (Determinare il dominio in x).