

代数的場の量子論と数学の形式化

谷本 溶

University of Rome "Tor Vergata"

多分野交流会 (東京都立大学)

2024 年 3 月 25 日

(代数的) 場の量子論

- 場の量子論とは: 素粒子 (電子、光子、クォーク ($\Rightarrow$ 陽子、中性子)) を記述する物理の理論
- 力学: 常微分方程式. Newton 方程式 $m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -V'(x(t))$
- 量子力学: 作用素論. Schrödinger 方程式
$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = [\frac{1}{2m} \hat{P}^2 + V(\hat{Q})] \Psi(x, t)$$
- 場の理論: 偏微分方程式. Maxwell 方程式
- 場の量子論: (Wightman 公理 (作用素値超関数), Araki-Haag-Kastler 公理 (von Neumann 環のネット)), ??
- 具体例は? 構成的場の量子論 ($d=2,3$)、cf. 楠岡氏
- 谷本がこれまでやったこと: $d=2$ の具体例の構成 (共形場理論、可積分系)、公理の関係
- $d=4$ では自由場のみ. 素粒子標準模型? (量子電磁気学、Yang-Mills、Higgs...)

構成的場の量子論の困難

- 量子電磁力学の作用

$$S_{\text{QED}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \right]$$

- 場の量子論なので、 $F^{\mu\nu}, \psi(x)$ は作用素値**超関数**であってほしい
- 超関数の積?? (紫外発散)
- 低次元 ($d=2,3$) の良い例ではくりこみによって積の定義が可能。**漸近的自由**
- (Lagrangian によらない構成: 共形場理論、可積分系 $d=2$)
- $d=4$ では Yang-Mills (量子色力学の一部) で漸近的自由が期待 ($\Rightarrow$ Millenium problem)
- 最近の発展??

構成的場の量子論の状況

- なぜ素粒子標準模型/Yang-Mills 理論がまだできていないのか?
- 技術的に困難... だけではない!
- Bałaban の論文: Yang-Mills 理論 ($d=4$) の紫外安定性 (~ 1989)
 - 20 本ほど、計 $n \times 100$ ページ
 - 別のモデルの結果を流用
 - (不完全な議論)
- 1990 年ごろの構成的場の量子論の状況
 - 激しい競争
 - 不完全な議論による論文出版
 - 厳密な構成をする動機の喪失
- Dimock による Bałaban の方法の解説、QED ($d=3$) の紫外安定性 (~ 2020)
- 最近では Dybalski-Stottmeister-谷本 (Bałaban の方法による ϕ_3^4 理論や σ 理論の収束を目指す) [arXiv:2303.10754](#), [2403.09800](#)

- 最近の結果が正しい保証は？ 誰が読むのか？
- 証明支援系 (コンピュータによる証明の確認) ($\neq$ 自動定理証明)
- 記号化された数学の証明
 - 推論規則
$$\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$
 - 公理 $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$ (集合の外延性) etc.
- コンピュータによる確認が可能 (Mizar, Metamath, Coq, Isabelle, HOL Light...)
- 最近までの状況: 簡単な定理にも冗長な証明、古い定理のみ

- 学部レベルの数学の形式化
- Buzzard-Commelin-Massot: perfectoid space (Scholze) の定義の形式化 (2020)
- Gowers-Green-Manners-Tao: polynomial Freiman–Ruzsa conjecture の証明
- +25 人: **3 週間後** に Lean での形式化 (2023)
- ライブラリ (Mathlib) に十分な定理があれば、最新の結果の形式化も可能
- 進んでいる分野: 数論, 抽象代数
- できてないこと (解析): Cauchy の定理 (長方形), 多変数解析, 超関数, スペクトル定理
- 参入は容易! cf. [Mathematics in Lean](#)
- 谷本も最近 [pull request](#)

WeakDual.lean ×

Mathlib > Topology > Algebra > Module > WeakDual.lean > {} WeakStarTopology > {} WeakSpace >

```

184 section WeakStarTopology
295 namespace WeakSpace
363 theorem isOpen_of_isOpen_WeakSpace' (V : Set E)
377   · intro hx
378     simp only [Set.mem_preimage, Set.mem_image]
379     use x
380     rw [← this]
381     exact isOpen_of_isOpen_WeakSpace ((continuousLinearMapToWeakSpace k E).cont.isOpen_preimage x)
382
383 /-- If `f :  $\alpha \rightarrow E$  is convergent in the original topology,
384 then it is convergent in the weak topology. -/
385 theorem tendsto_WeakSpace_of_tendsto
386   { $\alpha$  : Type*} {l : Filter  $\alpha$ } {f :  $\alpha \rightarrow E$ } {p : E} (hf : Tendsto f l (nhds ((continuousLinearMapToWeakSpace k E) p))) := by
387     refine tendsto_nhds.mpr ?_
388     intro U hpU hU
389     rw [tendsto_nhds] at hf
390     have : (fun x  $\mapsto$  (continuousLinearMapToWeakSpace k E) (f x))
391       = (fun x  $\mapsto$  ((continuousLinearMapToWeakSpace k E)  $\circ$  f) x)
392       rfl
393     rw [this, Set.preimage_comp]
394     apply hf ((continuousLinearMapToWeakSpace k E)  $^{-1}$  U)
395     ((continuousLinearMapToWeakSpace k E).cont.isOpen_preimage x)
396     exact hU
397
398
399

```

Lean Infoview ×

WeakDual.lean:374:52

Tactic state

1 goal

case h.mpr.int

 α : Type u_1 k : Type u_2 l : Type u_3 R : Type u_4 E : Type u_5 F : Type u_6 M : Type u_7 $inst \uparrow^9$: CommSem $inst \uparrow^8$: Topology $inst \uparrow^7$: Continuity $inst \uparrow^6$: Continuity $inst \uparrow^5$: AddCommGroup $inst \uparrow^4$: Module $inst \uparrow^3$: Topology $inst \uparrow^2$: AddCommGroup $inst \uparrow^1$: Module $inst \uparrow$: Topology V : Set E hV : IsOpen $(\uparrow (continuousLinearMapToWeakSpace k E) \uparrow^1 V)$ $x y$: E