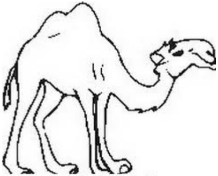
Poincaré ed Arnol'd: dalla Meccanica Classica alla Geometria Simplettica

(Ovvero, può un cammello passare per la cruna di un ago?)

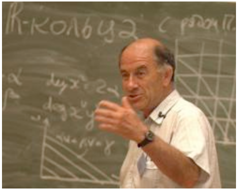
Alfonso Sorrentino

Tè di Matematica, 15 Gennaio 2014

Henri Poincaré (1854 - 1912)



?

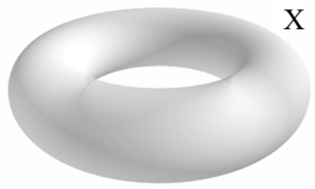


Vladimir Igorevich Arnol'd (1937 - 2010)

Cos'è un Sistema Hamiltoniano ?

Cos'è un Sistema Hamiltoniano ?

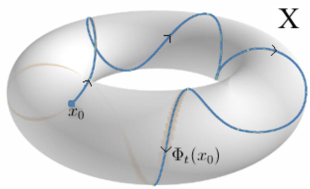
Sistema Dinamico: sistema (fisico, geometrico, biologico, ecc. . .) che evolve nel tempo, secondo leggi che legano il suo stato presente a quello futuro e/o passato.



$X \rightarrow$ Insieme degli Stati
$= $ Spazio delle fasi

Cos'è un Sistema Hamiltoniano ?

Sistema Dinamico: sistema (fisico, geometrico, biologico, ecc. . .) che evolve nel tempo, secondo leggi che legano il suo stato presente a quello futuro e/o passato.



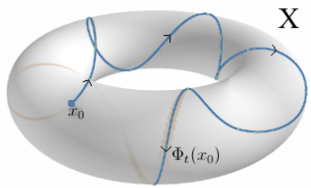
$X \rightarrow$ Insieme degli Stati

$= $ Spazio delle fasi

$\Phi_t \rightarrow$ Flusso = Evoluzione.

Cos'è un Sistema Hamiltoniano ?

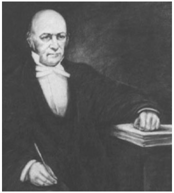
Sistema Dinamico: sistema (fisico, geometrico, biologico, ecc. . .) che evolve nel tempo, secondo leggi che legano il suo stato presente a quello futuro e/o passato.



X → Insieme degli Stati
= Spazio delle fasi

Φ_t → Flusso = Evoluzione.

Hamiltoniano: le *leggi* che determinano l'evoluzione del sistema sono espresse attraverso le derivate parziali di una funzione $H : X \longrightarrow \mathbb{R}$ detta Hamiltoniana.



(Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865)

Contributi simili già presenti in precedenti lavori di Lagrange (1808), Poisson et al.

Dalle Equazioni di Newton alle Equazioni di Hamilton

Consideriamo una particella di massa m in $\mathbb{R}^n$ che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

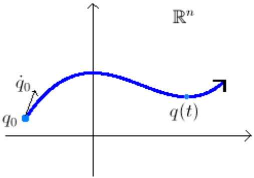
Dalle Equazioni di Newton alle Equazioni di Hamilton

Consideriamo una particella di massa m in $\mathbb{R}^n$ che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la posizione al tempo t, le equazioni di Newton sono:

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

Stato → Posizione q (e velocità $\dot{q}$)



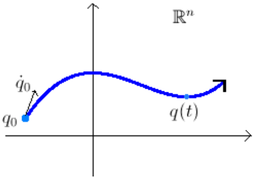
Dalle Equazioni di Newton alle Equazioni di Hamilton

Consideriamo una particella di massa m in $\mathbb{R}^n$ che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la posizione al tempo t, le equazioni di Newton sono:

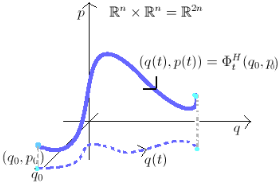
$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

Stato → Posizione q (e velocità $\dot{q}$)



Consideriamo posizione q ed il momento $p = m\dot{q}$ come variabili indipendenti. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t)/m \\ \dot{p}(t) = -\nabla V(q(t)) \end{cases}$$



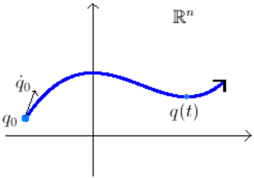
Dalle Equazioni di Newton alle Equazioni di Hamilton

Consideriamo una particella di massa m in $\mathbb{R}^n$ che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la posizione al tempo t, le equazioni di Newton sono:

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

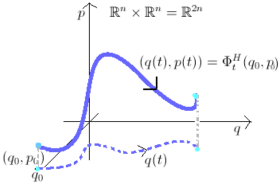
Stato → Posizione q (e velocità $\dot{q}$)



Consideriamo posizione q ed il momento $p = m\dot{q}$ come variabili indipendenti. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t)/m = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ \dot{p}(t) = -\nabla V(q(t)) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{cases}$$

Hamiltoniana: $H(q,p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$



Sistema Hamiltoniano in $\mathbb{R}^{2n}$

Data una funzione $H(q,p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, il Sistema Hamiltoniano associato è il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{pmatrix} =: X_H(q,p)$$

$X_H \longrightarrow$ Campo vettoriale Hamiltoniano
$\Phi_t^H \longrightarrow$ Flusso Hamiltoniano

Sistema Hamiltoniano in $\mathbb{R}^{2n}$

Data una funzione $H(q,p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, il Sistema Hamiltoniano associato è il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{pmatrix} =: X_H(q,p)$$

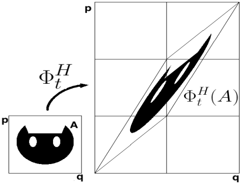
$X_H \longrightarrow$ Campo vettoriale Hamiltoniano
$\Phi_t^H \longrightarrow$ Flusso Hamiltoniano

Proprietà del Flusso Hamiltoniano

- Φ_t^H **preserva il volume** [Teorema di Liouville]

Se A è un insieme (misurabile)
di dati iniziali:

$$\mathrm{Vol}(A) = \mathrm{Vol}(\Phi_t^H(A)) \quad \forall t.$$



- **Invariante di Poincaré:** Φ_t^H preserva l'azione dei cappi.
  Se γ è un cappio, allora:

$$\oint_{\gamma} p\,dq = \oint_{\Phi_t^H(\gamma)} p\,dq \qquad \forall t. \qquad\qquad (*)$$

- **Invariante di Poincaré:** Φ_t^H preserva l'azione dei cappi.
  Se γ è un cappio, allora:

  $$\oint_{\gamma} p\,dq = \oint_{\Phi_t^H(\gamma)} p\,dq \qquad \forall t. \qquad\qquad (*)$$

  Se $\gamma = \partial D$, segue dal Teorema di Stokes:

  $$\oint_{\gamma=\partial D} p\,dq = \int_D dp \wedge dq.$$

  In particolare, $(*)$ permette di concludere che per ogni disco D e per ogni t:

  $$\int_D dp \wedge dq = \int_{\Phi_t^H(D)} dp \wedge dq$$

- **Invariante di Poincaré:** Φ_t^H preserva l'azione dei cappi.
  Se γ è un cappio, allora:

$$\oint_{\gamma} p\, dq = \oint_{\Phi_t^H(\gamma)} p\, dq \qquad \forall t. \qquad\qquad (*)$$

Se $\gamma = \partial D$, segue dal Teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma=\partial D} p\, dq = \int_D dp \wedge dq.$$

In particolare, $(*)$ permette di concludere che per ogni disco D e per ogni t:

$$\int_D dp \wedge dq = \int_{\Phi_t^H(D)} dp \wedge dq$$

$\Longrightarrow (\Phi_t^H)^*(dp \wedge dq) = dp \wedge dq$ per ogni t.

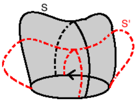
Φ_t^H preserva la 2-forma $dp \wedge dq$ (forma simplettica standard)

Cos'è una varietà simplettica?

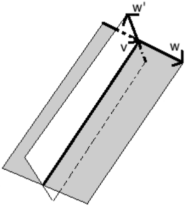
È una coppia (M, ω), dove:

- M è una varietà differenziabile (finito-dimensionale);
- ω una 2-forma chiusa e non-degenere, detta forma simplettica.

- ω chiusa $\longrightarrow$ l'*area simplettica* di una superficie S con bordo, non cambia per deformazioni di S che fissano il bordo.

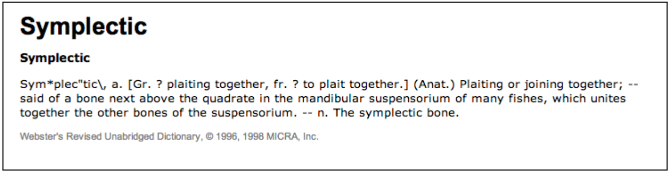


- ω non-degenere $\longrightarrow$ per ogni direzione tangente $v \neq 0$, esiste w tale che $\omega(v, w) \neq 0$ (i.e., il parallelogramma generato da v e w ha *area simplettica* non nulla).



Cosa vuol dire Simplettico ?

Cosa vuol dire Simplettico ?



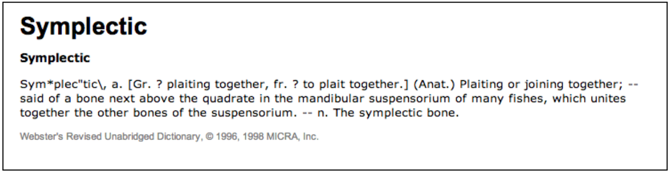
Symplectic

Symplectic

Sym*plec"tic\, a. [Gr. ? plaiting together, fr. ? to plait together.] (Anat.) Plaiting or joining together; -- said of a bone next above the quadrate in the mandibular suspensorium of many fishes, which unites together the other bones of the suspensorium. -- n. The symplectic bone.

Webster's Revised Unabridged Dictionary, © 1996, 1998 MICRA, Inc.

Cosa vuol dire Simplettico ?

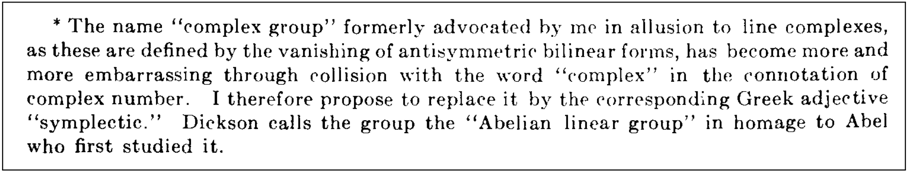


Symplectic

Symplectic

Sym*plec"tic\, a. [Gr. ? plaiting together, fr. ? to plait together.] (Anat.) Plaiting or joining together; -- said of a bone next above the quadrate in the mandibular suspensorium of many fishes, which unites together the other bones of the suspensorium. -- n. The symplectic bone.

L'aggettivo Simplettico (συμπλεκτικός) fu coniato da Herman Weyl (1885-1955):



> * The name "complex group" formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word "complex" in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective "symplectic." Dickson calls the group the "Abelian linear group" in homage to Abel who first studied it.

(H. Weyl, "*The classical groups: their invariants and representations*", 1939 [Chapter VI, footnote])

Esempi di varietà simplettiche (M, ω)

Osservazione: ω *non-degenere* $\Longrightarrow \dim M$ è pari

- $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = dp \wedge dq)$;
- ogni superficie orientata Σ con una forma d'area ω_Σ;
- se V è una varietà differenziabile, il suo *fibrato cotangente* T^*V ha una naturale struttura simplettica (spazio delle fasi della Meccanica classica);
- varietà di Kähler (struttura simplettica + struttura complessa);
- *et cetera*, ...

Esempi di varietà simplettiche (M, ω)

Osservazione: ω *non-degenere* $\Longrightarrow$ $\dim M$ è pari

- $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = dp \wedge dq)$;
- ogni superficie orientata Σ con una forma d'area ω_Σ;
- se V è una varietà differenziabile, il suo *fibrato cotangente* T^*V ha una naturale struttura simplettica (spazio delle fasi della Meccanica classica);
- varietà di Kähler (struttura simplettica + struttura complessa);
- *et cetera*, ...

Attenzione:

- Non tutte le varietà di dimensione pari ammettono una struttura simplettica! (Controesempio: $\mathbb{S}^{2n}$ con $n \geq 2$)
- Le varietà simplettiche di dimensione $2n$ sono localmente indistinguibili da $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ [Jean-Gaston Darboux, 1882]! (È una geometria globale!)

Cosa è un Sistema Hamiltoniano su (M, ω)?

Data una funzione $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, il campo vettoriale Hamiltoniano X_H è l'unico campo vettoriale tale che (esiste grazie alla condizione di non-degenerazione!):

$$i_{X_H}\omega := \omega(X_H, \cdot) = dH.$$

X_H è anche detto gradiente simplettico di H.

Cosa è un Sistema Hamiltoniano su (M, ω)?

Data una funzione $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, il campo vettoriale Hamiltoniano X_H è l'unico campo vettoriale tale che (esiste grazie alla condizione di non-degenerazione!):

$$i_{X_H}\omega := \omega(X_H, \cdot) = dH.$$

X_H è anche detto gradiente simplettico di H.

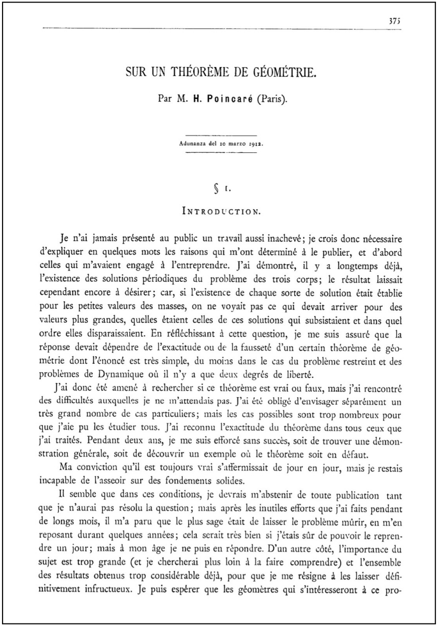
Esempio: Flussi geodetici

Sia (V, g) una varietà Riemanniana. L'Hamiltoniana $H : T^*V \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$H(q, p) = \frac{1}{2} g_q(p, p)$$

descrive il flusso geodetico sulla varietà.

L'ultimo Teorema di Poincaré



SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 marzo 1912.

§ 1.

INTRODUCTION.

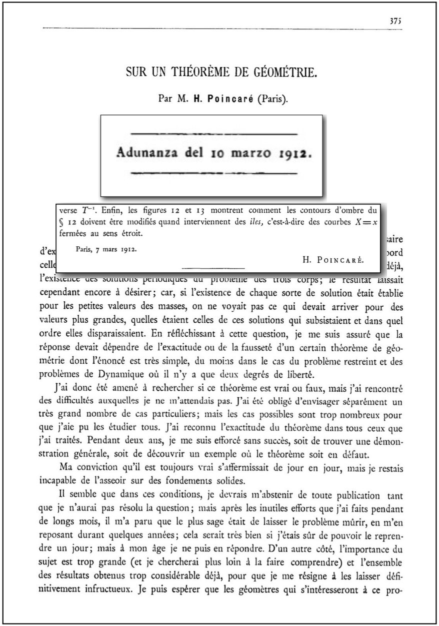
Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce pro-

L'ultimo Teorema di Poincaré



SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 marzo 1912.

verse T^{-1}. Enfin, les figures 12 et 13 montrent comment les contours d'ombre du § 12 doivent être modifiés quand interviennent des *iles*, c'est-à-dire des courbes $X=x$ fermées au sens étroit.

Paris, 7 mars 1912.

H. POINCARÉ.

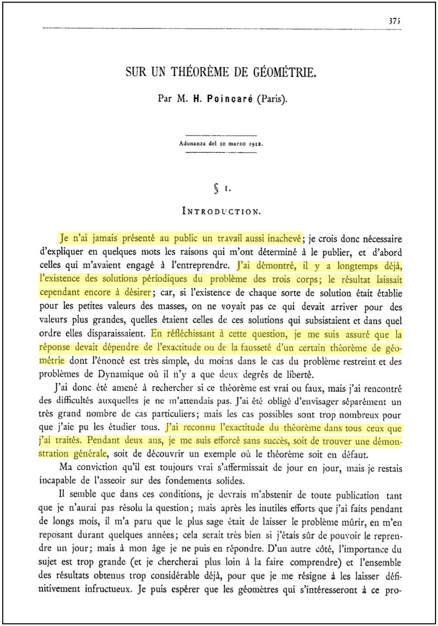
aire
d'ex bord
celle déjà,
l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce pro-

L'ultimo Teorema di Poincaré



375

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 marzo 1912.

§ 1.

INTRODUCTION.

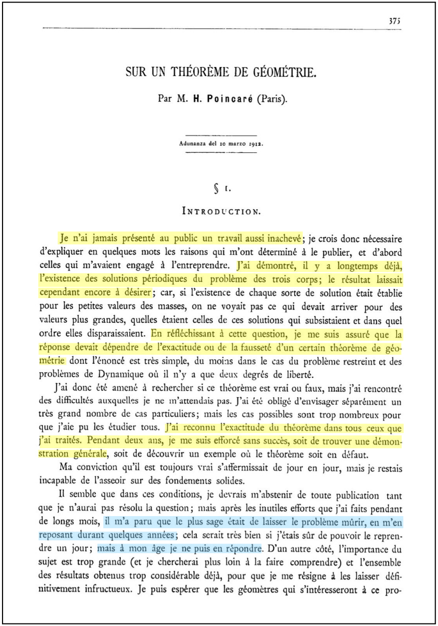
Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce pro-

L'ultimo Teorema di Poincaré



375

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 marzo 1912.

§ 1.

INTRODUCTION.

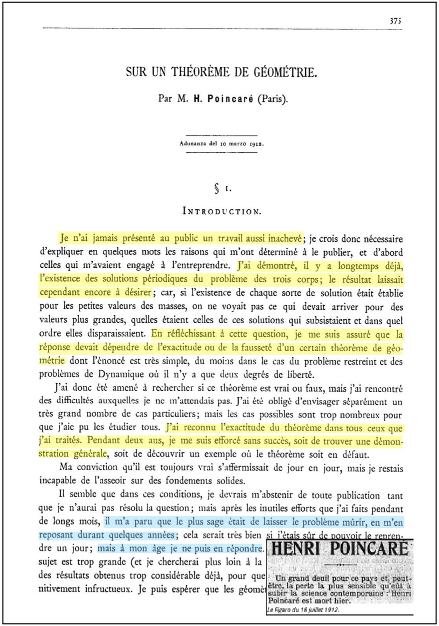
Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce pro-

L'ultimo Teorema di Poincaré



375

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 marzo 1912.

§ 1.

INTRODUCTION.

Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre.
sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la
des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que
nitivement infructueux. Je puis espérer que les géomèt

HENRI POINCARÉ

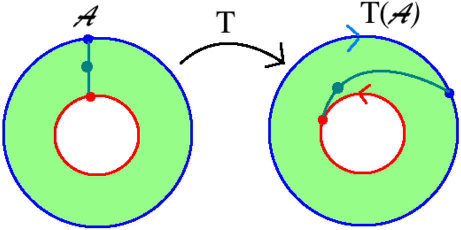
Un grand deuil pour ce pays et, peut-être, la perte la plus sensible qu'eût à subir la science contemporaine : Henri Poincaré est mort hier.

Le Figaro du 18 juillet 1912.

L'ultimo Teorema di Poincaré

Consideriamo un Anello $\mathcal{A} := \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ e $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ continua tale che:

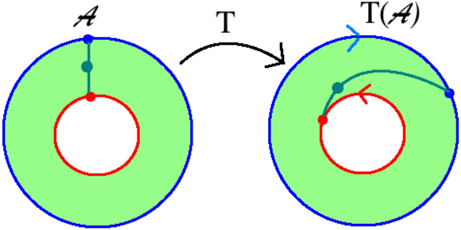
- T conserva l'area (simplettomorfismo);
- T fissa il bordo dell'anello ∂A e "muove" le due circonferenze in versi opposti (condizione twist).

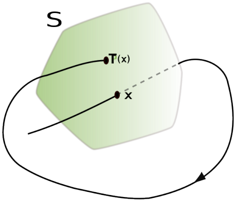


L'ultimo Teorema di Poincaré

Consideriamo un Anello $\mathcal{A} := \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ e $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ continua tale che:

- T conserva l'area (simplettomorfismo);
- T fissa il bordo dell'anello ∂A e "muove" le due circonferenze in versi opposti (condizione twist).





Queste mappe sorgono considerando la "*mappa di primo ritorno*" su una sezione S trasversale al flusso (su una varietà tridimensionale).

L'ultimo Teorema di Poincaré

Teorema [Poincaré e Birkhoff]

T ha almeno due punti fissi nell'interno di $\mathcal{A}$.

- George David Birkhoff fornì una dimostrazione il 25 ottobre 1912 (“Proof of Poincaré's geometric theorem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913) $\longrightarrow$ Argomento di teoria del grado topologico.

L'ultimo Teorema di Poincaré

Teorema [Poincaré e Birkhoff]

T ha almeno due punti fissi nell'interno di $\mathcal{A}$.

- George David Birkhoff fornì una dimostrazione il 25 ottobre 1912 ("Proof of Poincaré's geometric theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913) $\longrightarrow$ Argomento di teoria del grado topologico.

  Problema: I due punti trovati potrebbero coincidere!!
- G. D. Birkhoff, "An extension of Poincaré's last geometric theorem", *Acta Math.*, 1926.

L'ultimo Teorema di Poincaré

Teorema [Poincaré e Birkhoff]

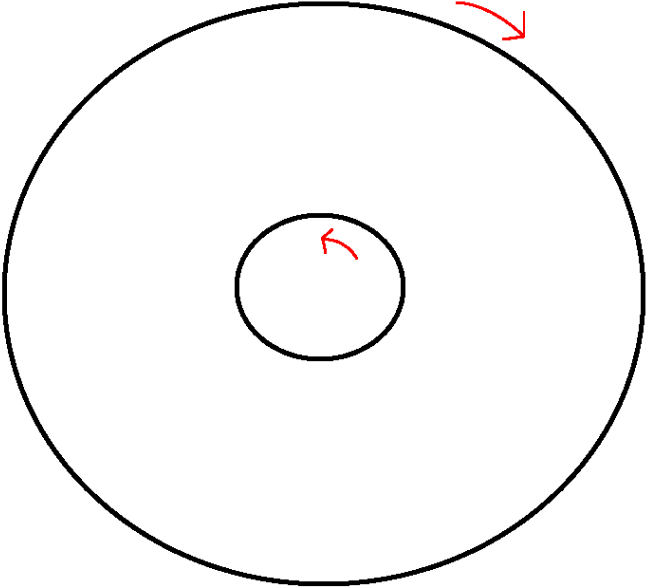
T ha almeno due punti fissi nell'interno di $\mathcal{A}$.

- George David Birkhoff fornì una dimostrazione il 25 ottobre 1912 ("Proof of Poincaré's geometric theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913) $\longrightarrow$ Argomento di teoria del grado topologico.

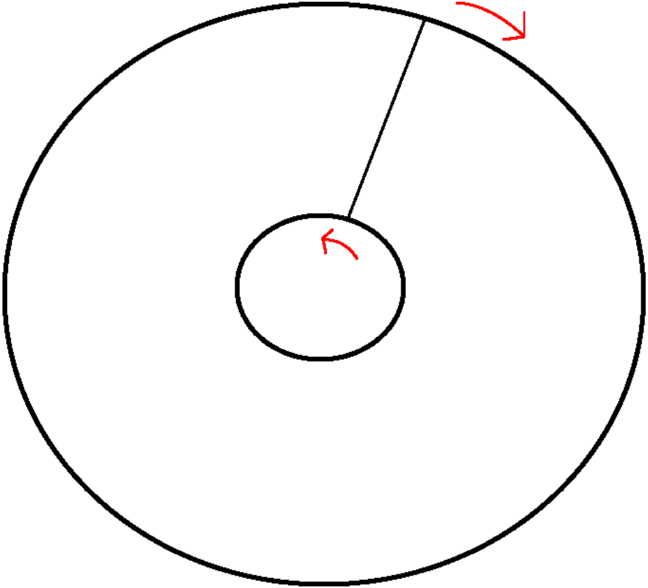
  Problema: I due punti trovati potrebbero coincidere!!
- G. D. Birkhoff, "An extension of Poincaré's last geometric theorem", *Acta Math.*, 1926.

Senza richiedere la conservazione dell'area o la condizione di twist il teorema è falso!

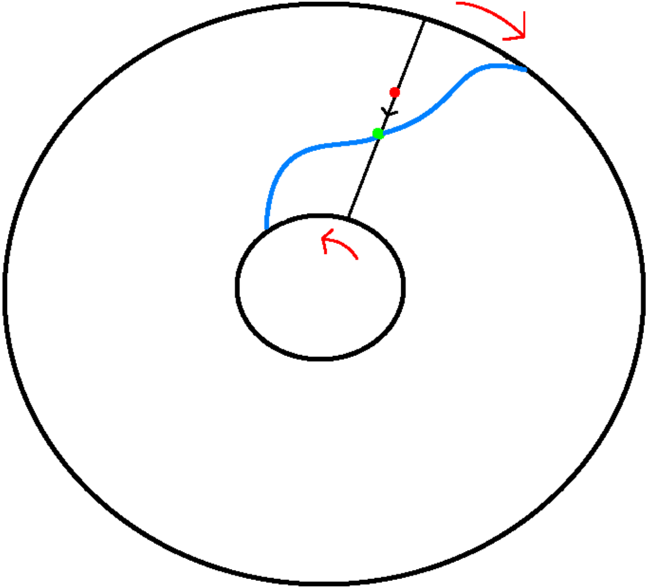
Idea di Poincaré



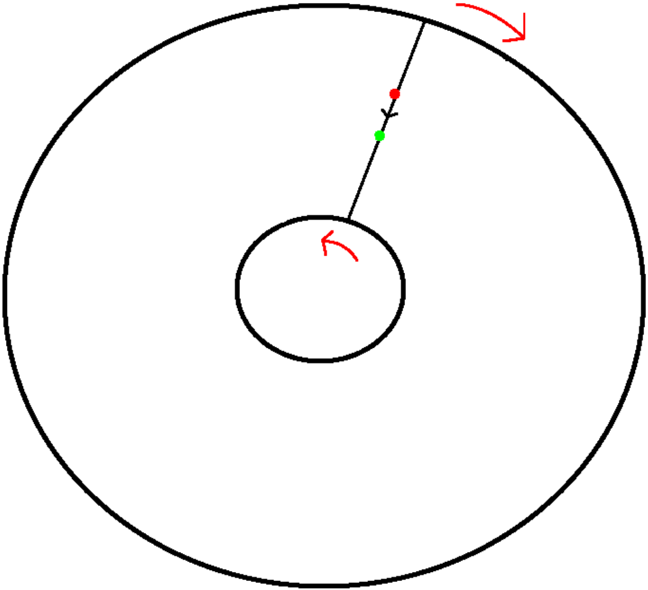
Idea di Poincaré



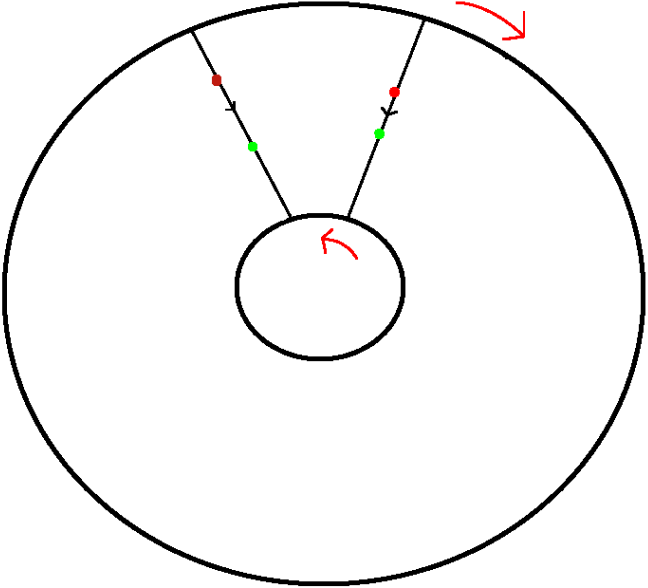
Idea di Poincaré



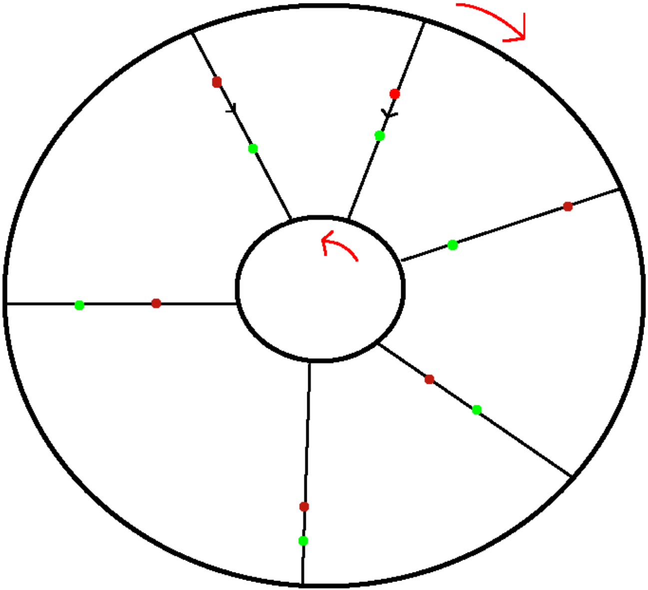
Idea di Poincaré



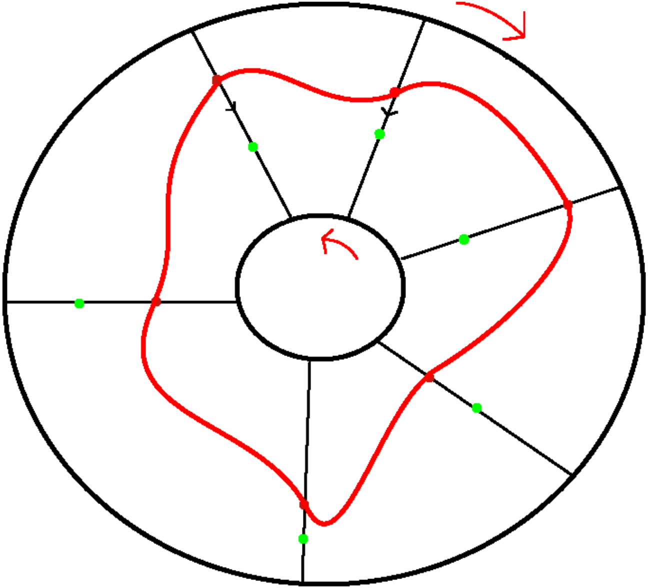
Idea di Poincaré



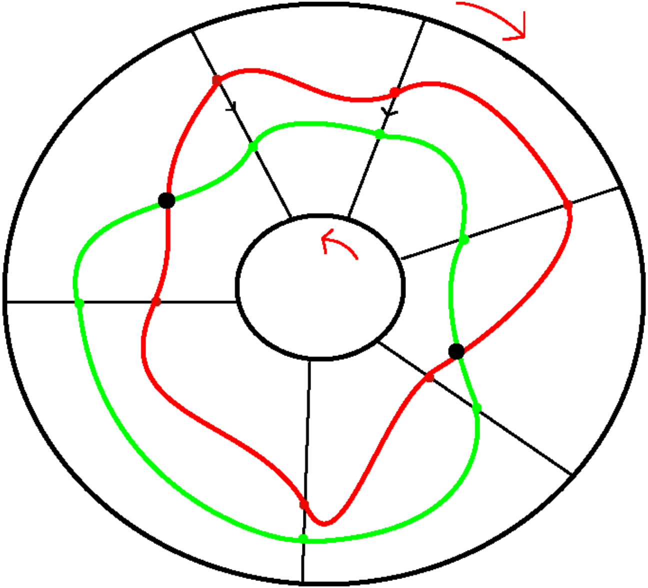
Idea di Poincaré



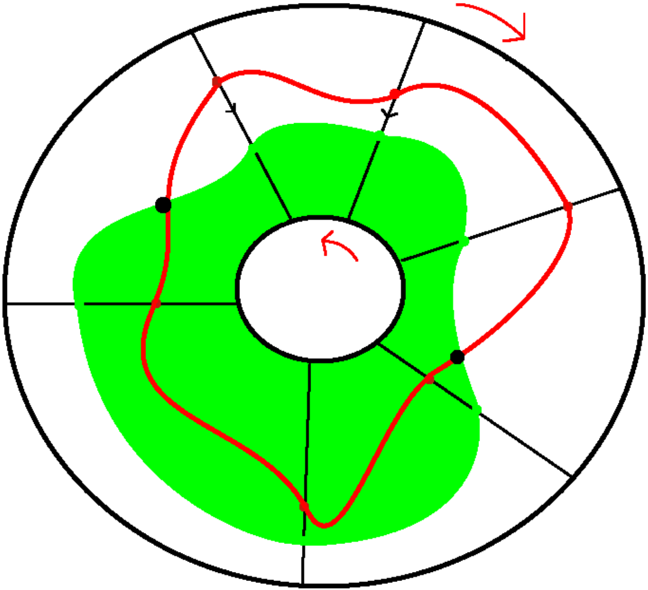
Idea di Poincaré



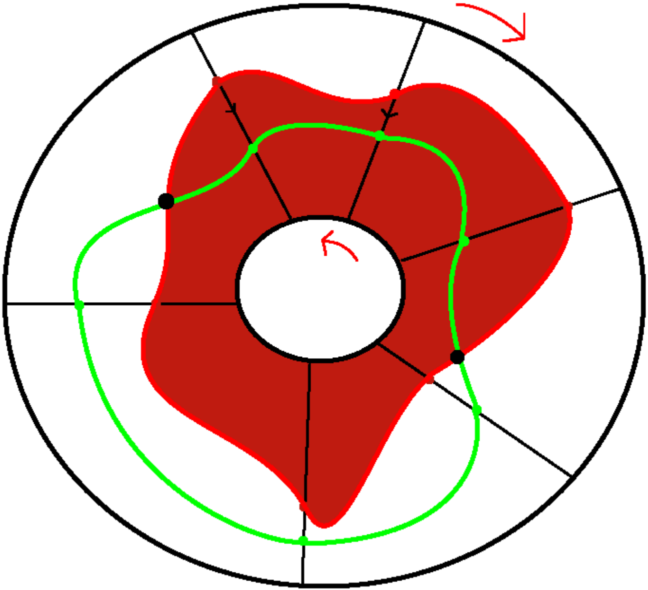
Idea di Poincaré



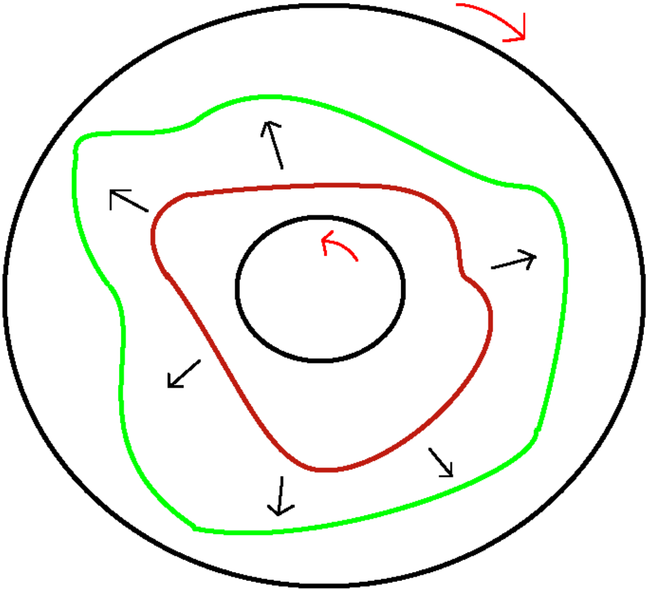
Idea di Poincaré



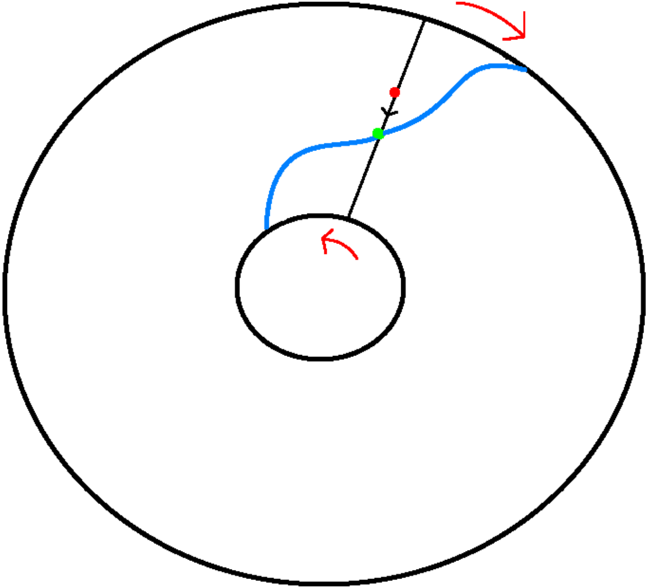
Idea di Poincaré



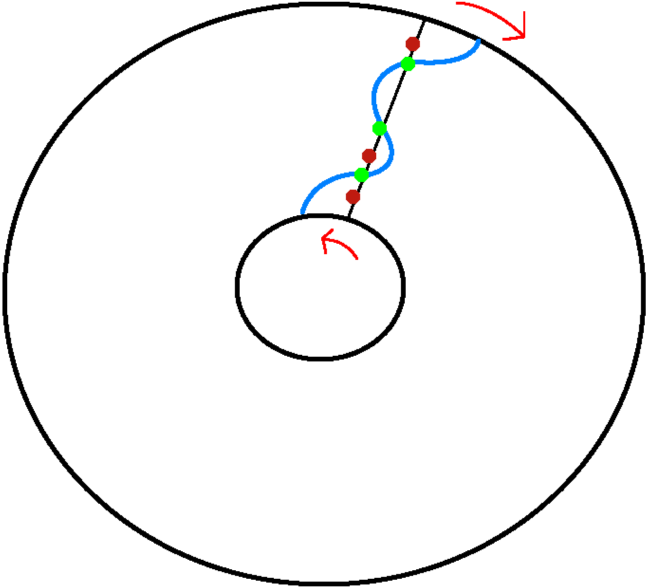
Idea di Poincaré



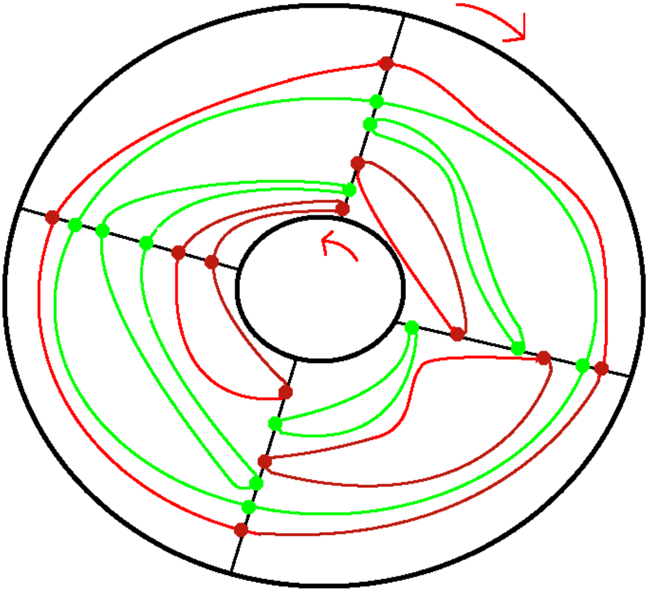
Idea di Poincaré



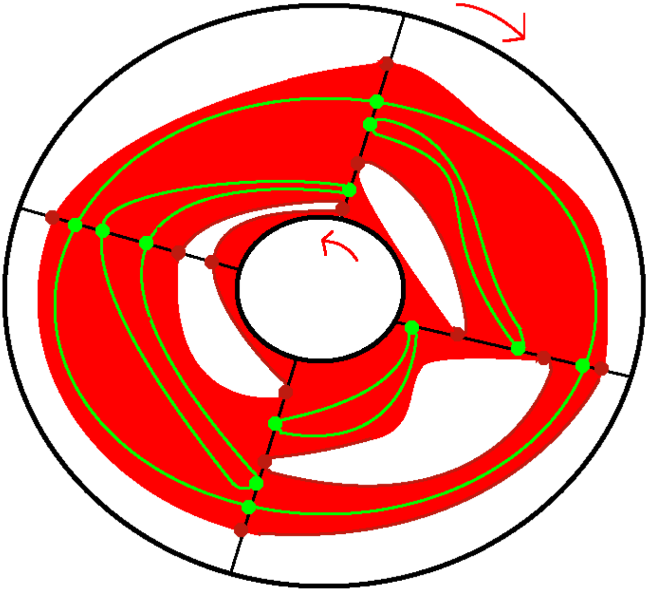
Idea di Poincaré



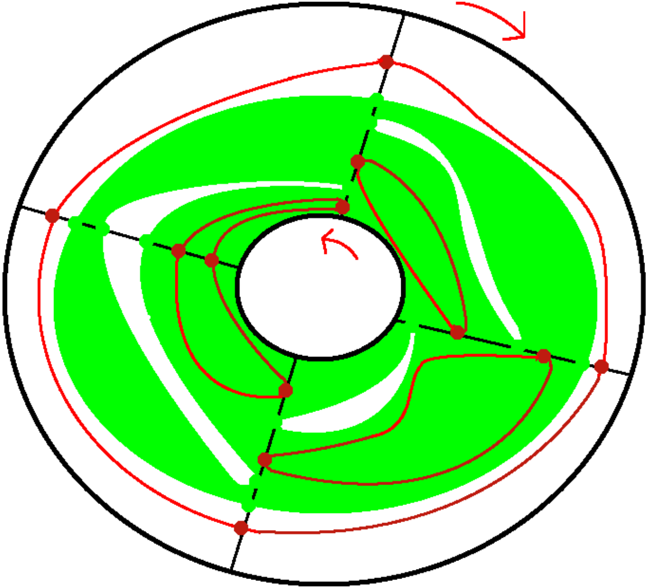
Idea di Poincaré



Idea di Poincaré



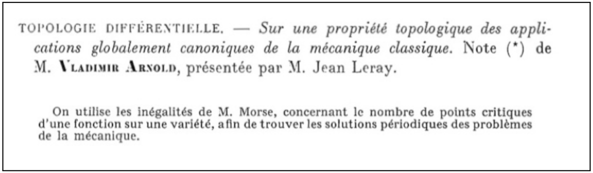
Idea di Poincaré



Ed in dimensione maggiore?

Ed in dimensione maggiore?

Il 27 ottobre 1965 Vladimir I. Arnol'd presentò un breve articolo ai *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*:



TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique.* Note (*) de M. **Vladimir Arnold**, présentée par M. Jean Leray.

On utilise les inégalités de M. Morse, concernant le nombre de points critiques d'une fonction sur une variété, afin de trouver les solutions périodiques des problèmes de la mécanique.

Sia $\Omega = \mathbb{T}^n \times B^n$ con forma simplettica $\omega = dp \wedge dq$.

Se $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ è un diffeomorfismo che preserva ω ed è *omologo all'identità* [+ *alcune ipotesi tecniche*], allora T ha almeno 2^n punti fissi (contati con molteplicità), di cui almeno $n + 1$ geometricamente distinti.

Esempio "illuminante"

Sia (M^{2n}, ω) una varietà simplettica chiusa (i.e., compatta e senza bordo) ed $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana.

$$\text{Se } x_0 \in \mathrm{Crit(H)} \implies X_H(x_0) = 0 \implies \Phi_t^H(x_0) \equiv x_0 \; \forall \; t.$$

Per t fissato (contando anche le molteplicità):

$$\{\text{Punti fissi di } \Phi_t^H\} \geq \mathrm{Crit}(H) \geq \; ?$$

Esempio "illuminante"

Sia (M^{2n}, ω) una varietà simplettica chiusa (i.e., compatta e senza bordo) ed $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana.

$$\text{Se } x_0 \in \mathrm{Crit(H)} \implies X_H(x_0) = 0 \implies \Phi_t^H(x_0) \equiv x_0 \ \forall\ t.$$

Per t fissato (contando anche le molteplicità):

$$\boxed{\{\text{Punti fissi di } \Phi_t^H\} \geq \mathrm{Crit}(H) \geq \ \dim H_*(M; \mathbb{R})}$$

Sia H una funzione di Morse: se $x_0 \in \mathrm{Crit(H)} \Longrightarrow \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0)\right) \neq 0.$

Esempi:

- $\dim H_*(\mathbb{T}^{2n}; \mathbb{R}) = 2^{2n}$ (almeno $2n+1$ geometricamente distinti);
- $\dim H_*(\Sigma_g; \mathbb{R}) = 2g + 2$ (almeno 3 geometricamente distinti);
- $\dim H_*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{R}) = n + 1$ (almeno $n + 1$ geometricamente distinti).

Congettura di Arnol'd

Sia (M, ω) una varietà simplettica chiusa. Ogni simplettomorfismo omologo all'identità ha un numero di punti fissi almeno pari al numero minimo di punti critici che deve avere una funzione su M.

(V. I. Arnold, AMS Symposium on *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, May 1974)

- Yakov Eliashberg (1979): Superfici di Riemann;
- Charles Conley e Eduard Zehnder (1983): $\mathbb{T}^{2n}$;
- Mikhail Gromov (1985): esiste almeno un punto fisso se $\pi_2(M) = 0$;
- Andreas Floer (1988-89): congettura completa, se $\pi_2(M) = 0$;
  (1989): monotone symplectic manifolds;
- Helmut Hofer e Dietmar Salamon (1995), Ken Ono (1995): weakly monotone symplectic manifolds;
- Caso generale: Fukaya-Ono (1996-97), Liu-Tian (1996-97), Hofer-Salamon (1997).

Congettura di Arnol'd

Sia (M, ω) una varietà simplettica chiusa. Ogni simplettomorfismo omologo all'identità ha un numero di punti fissi almeno pari al numero minimo di punti critici che deve avere una funzione su M.

(V. I. Arnold, AMS Symposium on *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, May 1974)

- Yakov Eliashberg (1979): Superfici di Riemann;
- Charles Conley e Eduard Zehnder (1983): $\mathbb{T}^{2n}$;
- Mikhail Gromov (1985): esiste almeno un punto fisso se $\pi_2(M) = 0$;

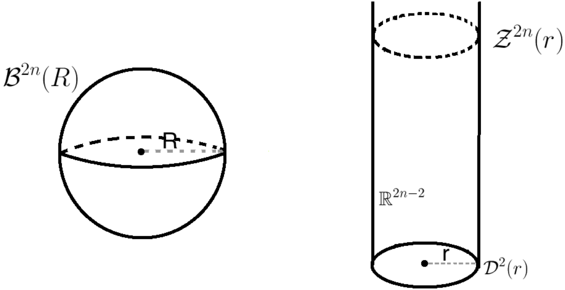
Pseudo-holomorphic curves in Symplectic geometry, Inv. Math. 1985

(1989): monotone symplectic manifolds;

- Helmut Hofer e Dietmar Salamon (1995), Ken Ono (1995): weakly monotone symplectic manifolds;
- Caso generale: Fukaya-Ono (1996-97), Liu-Tian (1996-97), Hofer-Salamon (1997).

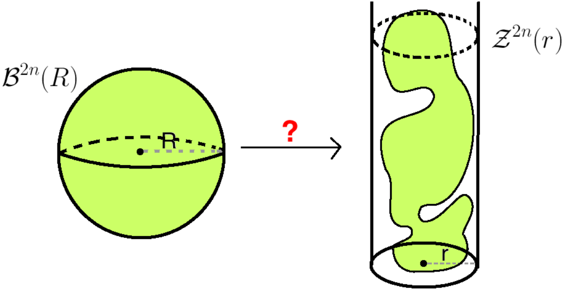
Rigidità simplettica

Preservare il volume *versus* Preservare forma simplettica



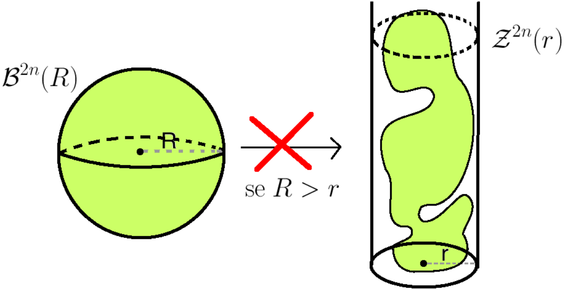
Rigidità simplettica

Preservare il volume *versus* Preservare forma simplettica



Rigidità simplettica

Preservare il volume *versus* Preservare forma simplettica



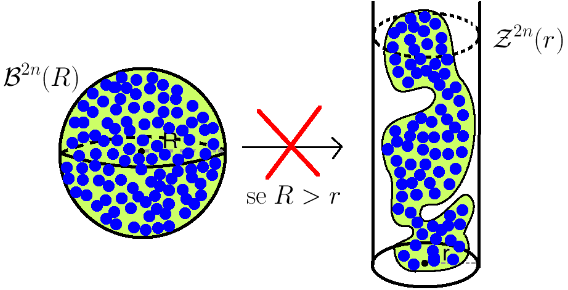
Non-squeezing Theorem [Gromov, 1985]

Se $R > r$ non esiste alcun simplettomorfismo Φ tale che

$$\Phi(\mathcal{B}^{2n}(R)) \subset \mathcal{Z}^{2n}(r).$$

Un'interpretazione fisica

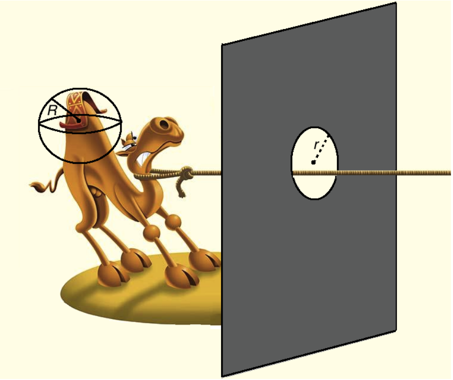
Un insieme di particelle inizialmente distribuite uniformemente in $\mathcal{B}^{2n}(R)$



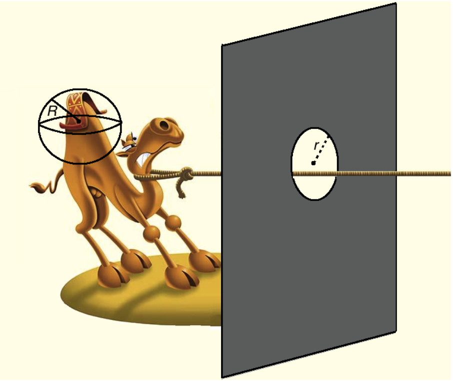
Quest'insieme non può essere "compresso" in uno stato statistico in cui la posizione q_1 ed il momento p_1 siano distribuiti meno che nello stato iniziale.

Analogo in dinamica classica del Principio di indeterminazione di Heisenberg: $\Delta p \, \Delta q \simeq \hbar \quad (\hbar =$ costante di Planck$)$.

Un problema analogo: il Cammello Simplettico



Un problema analogo: il Cammello Simplettico



No, se $R > r$!
Il problema sono le "gobbe"!

Idea di Gromov ⟶ studiare e sfruttare il legame tra geometria simplettica e geometria (quasi) complessa.

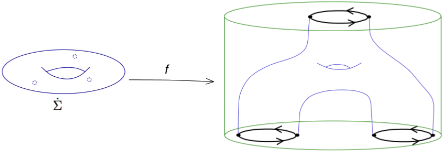
Nuovo strumento ⟶ le curve pseudo-olomorfe

Curve pseudo-olomorfe

(M,ω) varietà simplettica $\Longrightarrow$ ammette (almeno) una struttura quasi complessa J (compatibile con ω).

Sia (Σ, j) una superficie di Riemann. $f(\Sigma)$ è una curva pseudo-olomorfa in (M,ω,J) se $f : \Sigma \longrightarrow M$ soddisfa un analogo delle eq. Cauchy-Riemann:

$$J \circ df = df \circ j$$



Curve pseudo-olomorfe $\longrightarrow$ superfici minime (rispetto ad un'opportuna metrica ottenuta da ω e J).

Applicazioni: trovare orbite periodiche, definire invarianti simplettici (Omologia di Floer, Invarianti di Gromov-Witten, ecc ...), dimostrare l'esistenza di sezioni di Poincaré (à la Hofer, Wysocki e Zehnder), ecc ...