

b action de Moser trick

Poincaré ed Arnol'd: dalla Meccanica Classica alla Geometria Simplettica

(Ovvero, può un cammello passare per la cruna di un ago?)



Tè di Matematica, 15 Gennaio 2014







Henri Poincaré (1854 - 1912)

Vladimir Igorevich Arnol'd (1937 - 2010)

Cos'è un Sistema Hamiltoniano ?

Cos'è un Sistema Hamiltoniano?

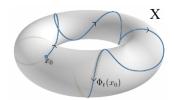
Sistema Dinamico: sistema (fisico, geometrico, biologico, ecc...) che evolve nel tempo, secondo leggi che legano il suo stato presente a quello futuro e/o passato.



 $X \rightarrow$ Insieme degli Stati = Spazio delle fasi

Cos'è un Sistema Hamiltoniano?

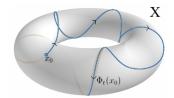
Sistema Dinamico: sistema (fisico, geometrico, biologico, ecc...) che evolve nel tempo, secondo leggi che legano il suo stato presente a quello futuro e/o passato.



 $X \rightarrow$ Insieme degli Stati
= Spazio delle fasi $\Phi_t \rightarrow$ Flusso = Evoluzione.

Cos'è un Sistema Hamiltoniano?

Sistema Dinamico: sistema (fisico, geometrico, biologico, ecc...) che evolve nel tempo, secondo leggi che legano il suo stato presente a quello futuro e/o passato.



 $X \rightarrow$ Insieme degli Stati = Spazio delle fasi $\Phi_t \rightarrow$ Flusso = Evoluzione.

Hamiltoniano: le *leggi* che determinano l'evoluzione del sistema sono espresse attraverso le derivate parziali di una funzione $H: X \longrightarrow \mathbb{R}$ detta Hamiltoniana.



(Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865)

Contributi simili già presenti in precedenti lavori di Lagrange (1808), Poisson et al.

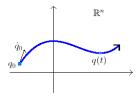
Consideriamo una particella di massa m in \mathbb{R}^n che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Consideriamo una particella di massa m in \mathbb{R}^n che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la posizione al tempo t, le equazioni di Newton sono:

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

 $\mathsf{Stato} o \mathsf{Posizione} \ q \ (\mathsf{e} \ \mathsf{velocita} \ \dot{q})$



Consideriamo una particella di massa m in \mathbb{R}^n che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la posizione al tempo t, le equazioni di Newton sono:

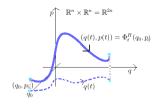
$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

 $\mathsf{Stato} \to \mathsf{Posizione} \ q \ (\mathsf{e} \ \mathsf{velocita} \ \dot{q})$

 $\xrightarrow{\dot{q}_0} \xrightarrow{q_0} \xrightarrow{q(t)}$

Consideriamo posizione q ed il momento $p = m\dot{q}$ come variabili indipendenti. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t)/m \\ \dot{p}(t) = -\nabla V(q(t)) \end{cases}$$

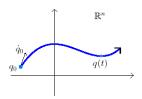


Consideriamo una particella di massa m in \mathbb{R}^n che si muove per effetto di una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$.

Se $q(t) \in \mathbb{R}^n$ denota la posizione al tempo t, le equazioni di Newton sono:

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

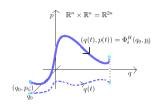
 $\mathsf{Stato} o \mathsf{Posizione} \; q \; (\mathsf{e} \; \mathsf{velocita} \; \dot{q})$



Consideriamo posizione q ed il momento $p = m\dot{q}$ come variabili indipendenti. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t)/m = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p}(t) = -\nabla V(q(t)) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases}$$

Hamiltoniana: $H(q, p) = \frac{1}{2m} ||p||^2 + V(q)$



Sistema Hamiltoniano in \mathbb{R}^{2n}

Data una funzione $H(q,p): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, il Sistema Hamiltoniano associato è il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{pmatrix} =: X_H(q, p)$$

 $X_H \longrightarrow \mathsf{Campo}$ vettoriale Hamiltoniano

 $\Phi_t^H \longrightarrow \mathsf{Flusso} \; \mathsf{Hamiltoniano}$

Sistema Hamiltoniano in \mathbb{R}^{2n}

Data una funzione $H(q,p): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, il Sistema Hamiltoniano associato è il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{pmatrix} =: X_H(q, p)$$

 $X_H \longrightarrow \mathsf{Campo}$ vettoriale Hamiltoniano

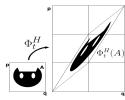
 $\Phi_t^H \longrightarrow \text{Flusso Hamiltoniano}$

Proprietà del Flusso Hamiltoniano

• Φ_t^H preserva il volume [Teorema di Liouville]

Se A è un insieme (misurabile) di dati iniziali:

$$Vol(A) = Vol(\Phi_t^H(A)) \quad \forall t.$$



• Invariante di Poincaré: Φ_t^H preserva l'azione dei cappi. Se γ è un cappio, allora:

$$\oint_{\gamma} p \, dq = \oint_{\Phi_t^H(\gamma)} p \, dq \qquad \forall t. \tag{*}$$

• Invariante di Poincaré: Φ_t^H preserva l'azione dei cappi. Se γ è un cappio, allora:

$$\oint_{\gamma} p \, dq = \oint_{\Phi_t^H(\gamma)} p \, dq \qquad \forall t. \tag{*}$$

Se $\gamma = \partial D$, segue dal Teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma=\partial D} p \, dq = \int_{D} dp \wedge dq.$$

In particolare, (*) permette di concludere che per ogni disco D e per ogni t:

$$\int_D dp \wedge dq = \int_{\Phi_t^H(D)} \!\!\! dp \wedge dq$$

• Invariante di Poincaré: Φ_t^H preserva l'azione dei cappi. Se γ è un cappio, allora:

$$\oint_{\gamma} p \, dq = \oint_{\Phi_t^H(\gamma)} p \, dq \qquad \forall t. \tag{*}$$

Se $\gamma = \partial D$, segue dal Teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma=\partial D} p \, dq = \int_{D} dp \wedge dq.$$

In particolare, (*) permette di concludere che per ogni disco D e per ogni t:

$$\int_{D} dp \wedge dq = \int_{\Phi_{t}^{H}(D)} dp \wedge dq$$

 $\Longrightarrow (\Phi_t^H)^*(dp \wedge dq) = dp \wedge dq$ per ogni t.

 Φ_t^H preserva la 2-forma $dp \wedge dq$ (forma simplettica standard)

Cos'è una varietà simplettica?

È una coppia (M, ω) , dove:

- *M* è una varietà differenziabile (finito-dimensionale);
- ullet una 2-forma chiusa e non-degenere, detta forma simplettica.
- ω chiusa \longrightarrow l'area simplettica di una superficie S con bordo, non cambia per deformazioni di S che fissano il bordo.



• ω non-degenere \longrightarrow per ogni direzione tangente $v \neq 0$, esiste w tale che $\omega(v,w) \neq 0$ (i.e., il parallelogramma generato da v e w ha area simplettica non nulla).

Cosa vuol dire Simplettico ?

Cosa vuol dire Simplettico?

Symplectic

Symplectic

Sym*plec"tic\, a. [Gr. ? plaiting together, fr. ? to plait together.] (Anat.) Plaiting or joining together; -- said of a bone next above the quadrate in the mandibular suspensorium of many fishes, which unites together the other bones of the suspensorium. -- n. The symplectic bone.

Webster's Revised Unabridged Dictionary, @ 1996, 1998 MICRA, Inc.



Cosa vuol dire Simplettico?

Symplectic

Symplectic

Sym*plec"tic\, a. [Gr. ? plaiting together, fr. ? to plait together.] (Anat.) Plaiting or joining together; -said of a bone next above the quadrate in the mandibular suspensorium of many fishes, which unites together the other bones of the suspensorium. -- n. The symplectic bone.

Webster's Revised Unabridged Dictionary, @ 1996, 1998 MICRA, Inc.



L'aggettivo Simplettico (συμπλεκτικός) fu coniato da Herman Weyl (1885-1955):

* The name "complex group" formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word "complex" in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective "symplectic." Dickson calls the group the "Abelian linear group" in homage to Abel who first studied it.

(H. Weyl, "The classical groups: their invariants and representations", 1939 [Chapter VI, footnote])

Esempi di varietà simplettiche (M, ω)

Osservazione: ω non-degenere \Longrightarrow dim M è pari

- $\bullet \ (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = dp \wedge dq);$
- ogni superficie orientata Σ con una forma d'area ω_{Σ} ;
- se V è una varietà differenziabile, il suo fibrato cotangente T*V ha una naturale struttura simplettica (spazio delle fasi della Meccanica classica);
- varietà di Kähler (struttura simplettica + struttura complessa);
- et cetera, ...

Esempi di varietà simplettiche (M, ω)

Osservazione: ω non-degenere \Longrightarrow dim M è pari

- $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = dp \wedge dq)$;
- ogni superficie orientata Σ con una forma d'area ω_{Σ} ;
- se V è una varietà differenziabile, il suo fibrato cotangente T*V ha una naturale struttura simplettica (spazio delle fasi della Meccanica classica);
- varietà di Kähler (struttura simplettica + struttura complessa);
- et cetera, . . .

Attenzione:

- Non tutte le varietà di dimensione pari ammettono una struttura simplettica! (Controesempio: \mathbb{S}^{2n} con $n \ge 2$)
- Le varietà simplettiche di dimensione 2n sono localmente indistinguibili da $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ [Jean-Gaston Darboux, 1882]! (È una geometria globale!)

Cosa è un Sistema Hamiltoniano su (M, ω) ?

Data una funzione $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$, il campo vettoriale Hamiltoniano X_H è l'unico campo vettoriale tale che (esiste grazie alla condizione di non-degenerazione!):

$$i_{X_H}\omega := \omega(X_H, \cdot) = dH.$$

 X_H è anche detto gradiente simplettico di H.

Cosa è un Sistema Hamiltoniano su (M, ω) ?

Data una funzione $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$, il campo vettoriale Hamiltoniano X_H è l'unico campo vettoriale tale che (esiste grazie alla condizione di non-degenerazione!):

$$i_{X_H}\omega := \omega(X_H, \cdot) = dH.$$

 X_H è anche detto gradiente simplettico di H.

Esempio: Flussi geodetici

Sia (V,g) una varietà Riemanniana. L'Hamiltoniana $H:T^*V\longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$H(q,p)=\frac{1}{2}g_q(p,p)$$

descrive il flusso geodetico sulla varietà.

375

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. H. Poincaré (Paris).

Adutanza del 10 marzo 1912

€ 1. INTRODUCTION.

Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. l'ai démontré, il v a longtemps déià. l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, ie me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de péométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. l'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que i'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défant

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si l'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce pro-

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE. Par M. H. Poincaré (Paris). Adunanza del 10 marzo 1912. verse T-1. Enfin, les figures 12 et 13 montrent comment les contours d'ombre du § 12 doivent être modifiés quand interviennent des iles, c'est-à-dire des courbes X=x fermées au seus étroit. Paris, 7 mars 1912. d'ex H. POINCARÉ. l'existence des solutions periodiques du problème des trois corps; le resultat janssair cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des

problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené a réchechen és or bhorême est vrai ou faux, mais j'ai rencontré
des difficultés ausquelles je ne m'attendais pas. J'ai éte obligé d'envisager séparément un
très grand nombre de cas particulières; mais les cas possibles sont trop nombreux pour
qu' j'air pui se étudier tous. J'ai renoun l'exactitude du thorème dans sous ceux que
j'air traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration étérales, soit de débouvir un exemné où la théorème soit en détroir

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'auxia ja residua la question, mais après les intutiles flortsus qui l'âtia pendant de longs mots, il m'a para que le plus sage ciuti de laisser le problème métrit, en m'en reposant durant quelques années; cels aerait très bles ni j'états afre de pouroir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du suje est trop grande (et je chercheria) plus loin à la faire comprendre; el rensemble des résultats obtenus trop considérable déli, pour que je me résigne à les laisser déli-mitéments infractieux. Le plus esperte que le seglomètres qui s'antieressorm à ce pro-

375

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. H. Poincaré (Paris).

Adreanza del 10 marzo 1912

§ t.

INTRODUCTION.

Je di jamais présenté au public un travail aussi inachesét, je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques most les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai d'ensourte, il y a longemps déjà. l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultra lissaire copendant encore de Solutions périodiques du problème des trois corps; le résultra lissaire pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui d'entir arriver pour des valeurs plus grandes, quelles rétiner celles decs solutions gui substitaire et dans quel ordre elles disparaissaien. En réfléchissant à cette question, je me suis assurd que la réponse deutir dépendre de l'exactituée ou de la fissassé d'un certain théoriem de glométrie dont l'énoncé est très simple, du moiris dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dravainaique où il n'y a que deux degrée de liberté.

J'ai donc tel amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais J'à rencourie de sifficultus souquelles je en m'arcandais pas. J'ai éco doigé d'enviagar àpartientes un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que Jiai pu les kaudier tous, Jif arconnul l'exactinade du théorème dans sons ceux que p'ais pu les kaudier tous, Jif arconnul l'exactinade du théorème dans sons ceux que j'ai traités. Pendant deux aux, je me suis efforcés sans succès, soit de trouvre une démonstration étécnies, soit de découvrir un exemné ou le théorème soir en Alteria.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication unau que je n'aurai par résolu la question, mais après les inutiles flortes que ji faita pendant que le plus sage ciuti de laisser le problème métris, en m'en reposant durant quelces améres, cels serait très bies n'é jétus sur de pouvoir le reprener prosonat durant quelces améres, cels serait très bies n'éjétus sir de pouvoir le reprener durant que le plus en répondre. D'un autre côté, l'importance du suite est trop grande (et je chercherin plus toin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable délis, pour que je me réagne à les laisset délis mitiements infracticeux, le puis quebre une les résoutiers ou d'intéressort à ce mon-

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. H. Poincaré (Paris).

Adusanza del 10 marzo 1912

§ t.

Je nú jamán présent au public un travail aussi inachevé, je crois donn elocosaire d'enspiquer en quolques mosts les risons qui m'ou d'eneminé à le public; e d'abord colles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longremps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultra lissaire consentie en la commanda de l'existence de chaque sorte de solution chait étable pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui d'entit arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étituer celles des sosiotions gui substituire et dans quel ordre elles des sosiotions gui substituire et dans quel ordre elles disparsiasaient. En réfléchissant à cette question, je me suis sourd que la reponse devit dépendre de l'exactituée ou de la fasses d'un cerain thorème de gibométrie dont l'énoncé est très simple, du moirs dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dermainaise où il n'il ve, une devet devrête de liberré.

J'ai donc tel ammé à rechercher si ce thoreme est vril ou faux, mais J'ai rencourté es difficultes souguelles je en "attendatis pas. J'ai éché jellé d'envisage s'apartiment un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que Jiai pu les étudier tous, Jiai recommi l'exactitude du thorème dans sons seux que p'ais rue les étudiers tous, Jiai recommi l'exactitude du thorème dans sons seux que p'ais ruels. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une d'émons stration dérévale, soit de découvrir un exemné colt le thémètres oir n'el-thémètres oir nel-thémètres oir nel-th

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'absentir de toute publication tant que je n'autraj sa révolu la question mais après les intuites flottras que ji faita pendant de longs mots, il m'a para que le plus sage ciut de laisser le problème métric, en m'en reposant durant quelques amnées, cels serait très biens j'états siré de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon age je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du seit est trop grande (et je chercheria) plus loin à la faire comprendre y el ressemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser défi-mitments infortuceurs. Le plus esperter que le sy fountires qui s'intréseront à ce pro-

75

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. H. Poincaré (Paris).

Administra del 10 marco 1912

§ 1.

INTRODUCTION.

Je ná jamás présente au public un travail aussi inacheel; je crois donc nécessire d'explaquer nu quelques mots les raisons qui n'oru d'exeminé à le publice; et d'abord colles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longemps déjà. Peristence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultar lissais expendant encore à désirrer; cars, ai l'existence de chaque sorre de solution efait réabile pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui d'earit arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étairen celles de ces solutions qui substairater et dans quel ordre elles disparissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis sauer que la réponse devait dépendre de l'eractionet out de la fauster d'un cartait hôtermé de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moiss dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynahumique où îl n'a que deux deprêt de liberet.

J'ai donc téé anoné à rechercher si ce théorème est veil ou faux, mais J'ai rencourté ou difficultés assugéles je ne m'atendatis pas. J'ai évé doigé d'envisage s'apartienent un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour pair pai pas les éculier tous. Jii reconnu l'exactratée du théorème dans sons ceux que p'air pais les éculier tous. Jii reconnu l'exactratée du théorème dans sons ceux que j'ai reniès. Pendant deux sus, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration établenia, soit de découvrir un exemné cols in théorème soir en Altronte neu l'anniès.

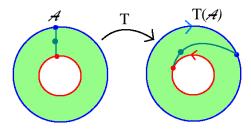
Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'autrai par sebola la question mais après les intuites efforts que je finis pendant de longs mois, il m'a para que le plus sage était de laiser le problème mitrir, can m'es reposant durant quelques améres, cols serait très bles a l'étais fuit de nouvel je remondre un jour; mais 4 mon âge je ne puis en répondre sujet est trop grande (et je chercheraj lusts loin à la sujet est trop grande (et je chercheraj lusts loin à la sujet est trop grande (et je chercheraj lusts loin à la sujet est trop grande (et je chercheraj lusts loin à la

des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que litte grand deuil pour ce pays et pout nitivement infractueux. Je puis espèrer que les géomé autre la sentenc condense de l'est a sentence configuration de l'est de

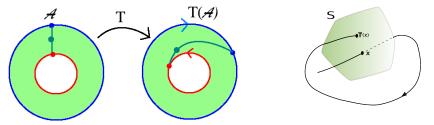
Consideriamo un Anello $\mathcal{A} := \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ e $\mathcal{T} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ continua tale che:

- T conserva l'area (simplettomorfismo);
- T fissa il bordo dell'anello ∂A e "muove" le due circonferenze in versi opposti (condizione twist).



Consideriamo un Anello $\mathcal{A} := \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ e $\mathcal{T} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ continua tale che:

- T conserva l'area (simplettomorfismo);
- T fissa il bordo dell'anello ∂A e "muove" le due circonferenze in versi opposti (condizione twist).



Queste mappe sorgono considerando la "mappa di primo ritorno" su una sezione S trasversale al flusso (su una varietà tridimensionale).

Teorema [Poincaré e Birkhoff]

T ha almeno due punti fissi nell'interno di A.

 George David Birkhoff fornì una dimostrazione il 25 ottobre 1912 ("Proof of Poincaré's geometric theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913) → Argomento di teoria del grado topologico.

Teorema [Poincaré e Birkhoff]

T ha almeno due punti fissi nell'interno di A.

 George David Birkhoff fornì una dimostrazione il 25 ottobre 1912 ("Proof of Poincaré's geometric theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913) → Argomento di teoria del grado topologico.

Problema: I due punti trovati potrebbero coincidere!!

 G. D. Birkhoff, "An extension of Poincaré's last geometric theorem", Acta Math., 1926.

Teorema [Poincaré e Birkhoff]

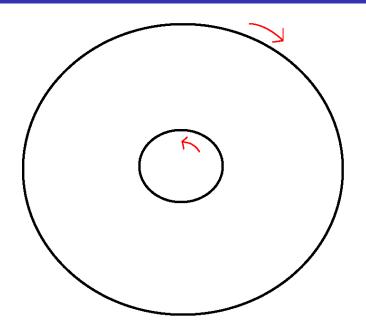
T ha almeno due punti fissi nell'interno di A.

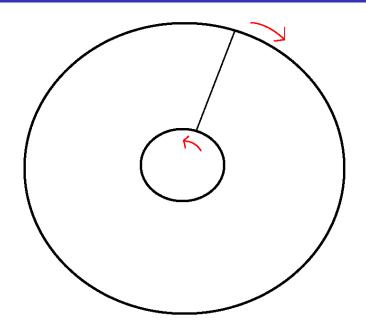
 George David Birkhoff fornì una dimostrazione il 25 ottobre 1912 ("Proof of Poincaré's geometric theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913) → Argomento di teoria del grado topologico.

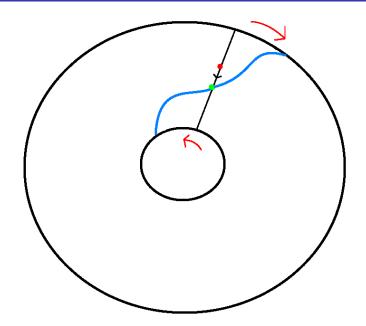
Problema: I due punti trovati potrebbero coincidere!!

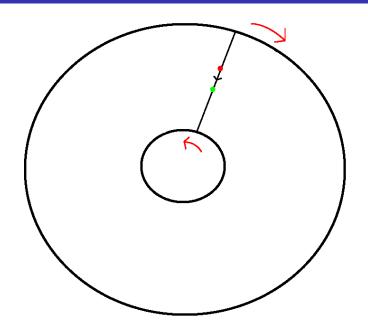
 G. D. Birkhoff, "An extension of Poincaré's last geometric theorem", Acta Math., 1926.

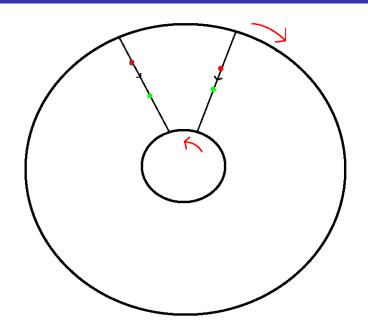
Senza richiedere la conservazione dell'area o la condizione di twist il teorema è falso!

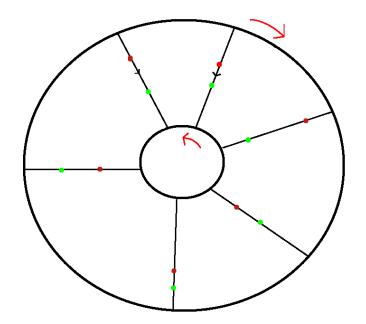


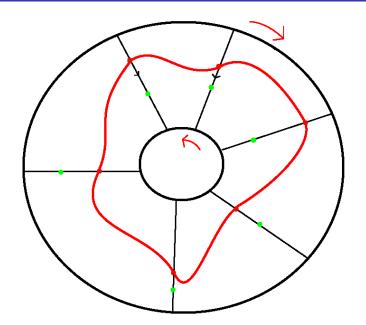


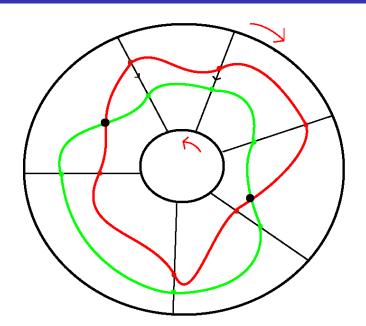


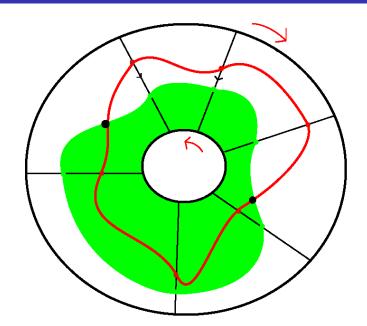


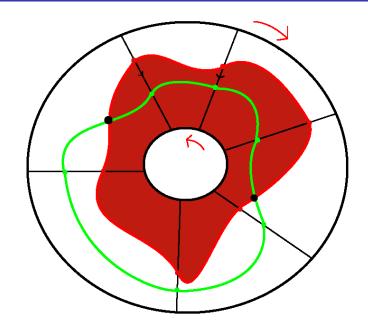


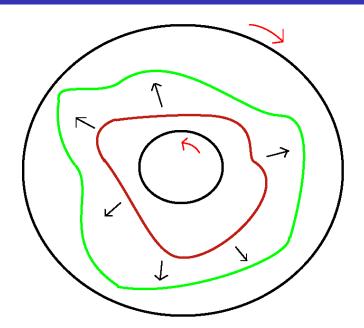


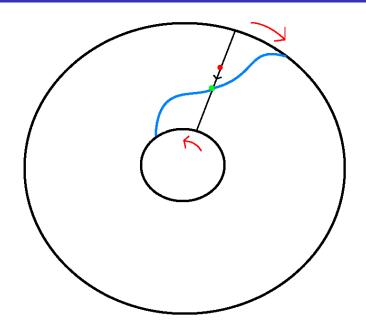


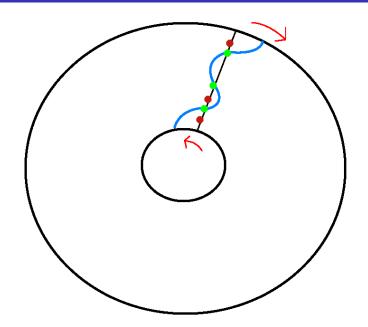


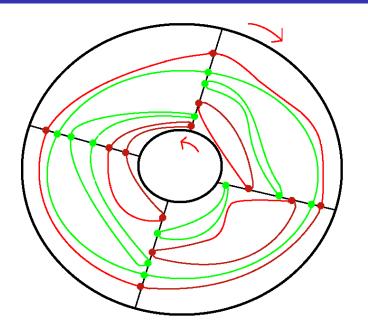


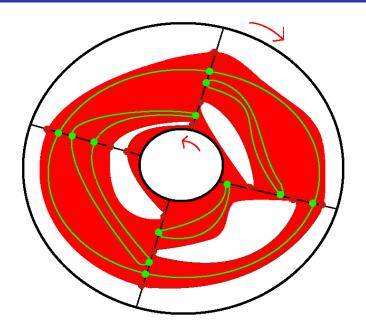


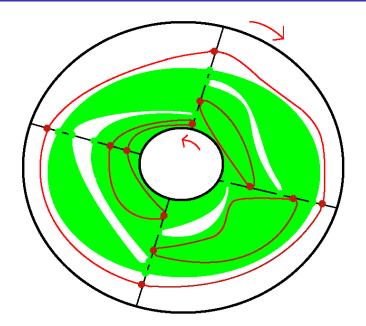












Ed in dimensione maggiore?

Ed in dimensione maggiore?

Il 27 ottobre 1965 Vladimir I. Arnol'd presentò un breve articolo ai *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*:

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE. — Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. Note (*) de M. Vladimir Arnold, présentée par M. Jean Leray.

On utilise les inégalités de M. Morse, concernant le nombre de points critiques d'une fonction sur une variété, afin de trouver les solutions périodiques des problèmes de la mécanique.

Sia $\Omega = \mathbb{T}^n \times B^n$ con forma simplettica $\omega = dp \wedge dq$.

Se $T: \Omega \longrightarrow \Omega$ è un diffeomorfismo che preserva ω ed è *omologo* all'identità [+ alcune ipotesi tecniche], allora T ha almeno 2^n punti fissi (contati con molteplicità), di cui almeno n+1 geometricamente distinti.

Esempio "illuminante"

Sia (M^{2n}, ω) una varietà simplettica chiusa (i.e., compatta e senza bordo) ed $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana.

Se
$$x_0 \in Crit(H) \implies X_H(x_0) = 0 \implies \Phi_t^H(x_0) \equiv x_0 \ \forall \ t.$$

Per t fissato (contando anche le molteplicità):

{Punti fissi di
$$\Phi_t^H$$
} $\geq \operatorname{Crit}(H) \geq$?

Esempio "illuminante"

Sia (M^{2n}, ω) una varietà simplettica chiusa (i.e., compatta e senza bordo) ed $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana.

Se
$$x_0 \in Crit(H) \implies X_H(x_0) = 0 \implies \Phi_t^H(x_0) \equiv x_0 \ \forall \ t.$$

Per t fissato (contando anche le molteplicità):

{Punti fissi di
$$\Phi_t^H$$
} $\geq \operatorname{Crit}(H) \geq \dim H_*(M; \mathbb{R})$

Sia
$$H$$
 una funzione di Morse: se $x_0 \in \operatorname{Crit}(H) \Longrightarrow \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0)\right) \neq 0$.

Esempi:

- dim $H_*(\mathbb{T}^{2n};\mathbb{R})=2^{2n}$ (almeno 2n+1 geometricamente distinti);
- dim $H_*(\Sigma_g; \mathbb{R}) = 2g + 2$ (almeno 3 geometricamente distinti);
- dim $H_*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{R}) = n + 1$ (almeno n + 1 geometricamente distinti).

Congettura di Arnol'd

Sia (M,ω) una varietà simplettica chiusa. Ogni simplettomorfismo omologo all'identità ha un numero di punti fissi almeno pari al numero minimo di punti critici che deve avere una funzione su M.

(V. I. Arnold, AMS Symposium on Mathematical developments arising from Hilbert problems, May 1974)

- Yakov Eliashberg (1979): Superfici di Riemann;
- Charles Conley e Eduard Zehnder (1983): \mathbb{T}^{2n} ;
- Mikhail Gromov (1985): esiste almeno un punto fisso se $\pi_2(M) = 0$;
- Andreas Floer (1988-89): congettura completa, se $\pi_2(M)=0$; (1989): monotone symplectic manifolds;
- Helmut Hofer e Dietmar Salamon (1995), Ken Ono (1995): weakly monotone symplectic manifolds;
- Caso generale: Fukaya-Ono (1996-97), Liu-Tian (1996-97), Hofer-Salamon (1997).

Congettura di Arnol'd

Sia (M,ω) una varietà simplettica chiusa. Ogni simplettomorfismo omologo all'identità ha un numero di punti fissi almeno pari al numero minimo di punti critici che deve avere una funzione su M.

(V. I. Arnold, AMS Symposium on Mathematical developments arising from Hilbert problems, May 1974)

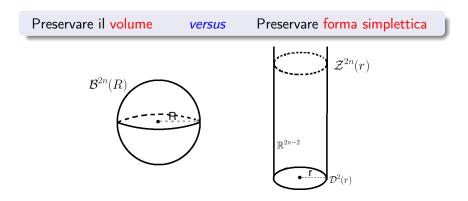
- Yakov Eliashberg (1979): Superfici di Riemann;
- Charles Conley e Eduard Zehnder (1983): T²ⁿ;
- Mikhail Gromov (1985): esiste almeno un punto fisso se $\pi_2(M) = 0$;

Pseudo-holomorphic curves in Symplectic geometry, Inv. Math. 1985

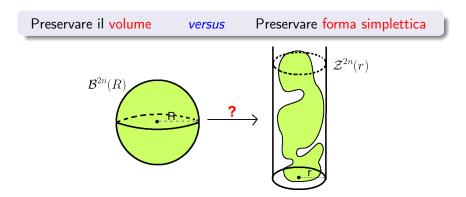
(1989): monotone symplectic manifolds;

- Helmut Hofer e Dietmar Salamon (1995), Ken Ono (1995): weakly monotone symplectic manifolds;
- Caso generale: Fukaya-Ono (1996-97), Liu-Tian (1996-97), Hofer-Salamon (1997).

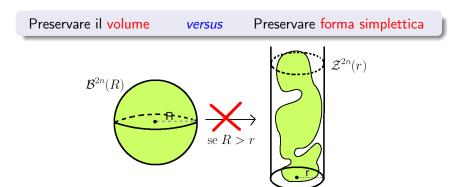
Rigidità simplettica



Rigidità simplettica



Rigidità simplettica



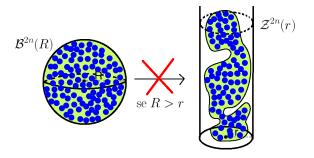
Non-squeezing Theorem [Gromov, 1985]

Se R > r non esiste alcun simplettomorfismo Φ tale che

$$\Phi(\mathcal{B}^{2n}(R)) \subset \mathcal{Z}^{2n}(r).$$

Un'interpretazione fisica

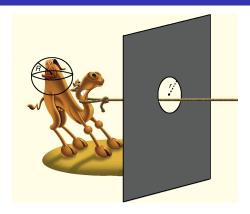
Un insieme di particelle inizialmente distribuite uniformemente in $\mathcal{B}^{2n}(R)$



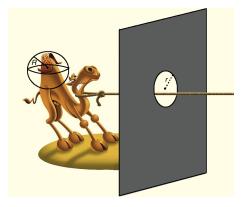
Quest'insieme non può essere "compresso" in uno stato statistico in cui la posizione q_1 ed il momento p_1 siano distribuiti meno che nello stato iniziale.

Analogo in dinamica classica del Principio di indeterminazione di Heisenberg: $\Delta p \, \Delta q \simeq \hbar$ ($\hbar = \text{costante di Planck}$).

Un problema analogo: il Cammello Simplettico



Un problema analogo: il Cammello Simplettico



No, se R > r! Il problema sono le "gobbe"!

Idea di Gromov — studiare e sfruttare il legame tra geometria simplettica e geometria (quasi) complessa.

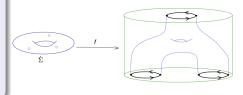
Nuovo strumento \longrightarrow le curve pseudo-olomorfe

Curve pseudo-olomorfe

 (M, ω) varietà simplettica \Longrightarrow ammette (almeno) una struttura quasi complessa J (compatibile con ω).

Sia (Σ, j) una superficie di Riemann. $f(\Sigma)$ è una curva pseudo-olomorfa in (M, ω, J) se $f: \Sigma \longrightarrow M$ soddisfa un analogo delle eq. Cauchy-Riemann:

$$J \circ df = df \circ j$$



Curve pseudo-olomorfe \longrightarrow superfici minime (rispetto ad un'opportuna metrica ottenuta da ω e J).

Applicazioni: trovare orbite periodiche, definire invarianti simplettici (Omologia di Floer, Invarianti di Gromov-Witten, ecc ...), dimostrare l'esistenza di sezioni di Poincaré (à la Hofer, Wysocki e Zehnder), ecc ...