UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di

Alfonso Sorrentino

Sulle soluzioni quasi-periodiche di sistemi hamiltoniani differenziabili

Relatore
Prof. Luigi Chierchia

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
Febbraio 2003

Parole chiave : Sistemi hamiltoniani quasi-integrabili, Teoria KAM (caso analitico e differenziabile), Tecniche di regolarizzazione, Teorema KAM isoenergetico (caso analitico e differenziabile), Tori parzialmente iperbolici.
Classificazione AMS : 34C27, 34C30, 37D10, 37D30, 37J40, 41A17, 70H08, 70H12, 70K43.

Alfonso Sorrentino è nato a Roma il 27 Novembre 1979.
Nell'anno accademico 1998-99 si è immatricolato al Corso di Laurea in matematica presso l'Università degli Studi ROMA TRE.
E' risultato vincitore della borsa di studio erogata dall'A.D.I.S.U. negli anni accademici 1998-99, 1999-00, 2000-01 e 2001-02 ed ha collaborato (e sta ancora collaborando) in qualità di *Tutore Senior* alla didattica dei seguenti corsi:

- AM3 (Prof. Luigi Chierchia), a.a. 2000-01
- AM4 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2000-01
- AM3 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2001-02
- AM4 (Prof. Luigi Chierchia), a.a. 2001-02
- AC1 (Prof. Laura Geatti), a.a. 2001-02
- AM4 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2002-03
- AM3 (Prof. Luigi Chierchia), a.a. 2002-03
- AC1 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2002-03.

Ha inoltre collaborato nell'anno accademico 2001-02 alla realizzazione di problemi e soluzioni per la prova finale di tipo B, prevista dalla laurea triennale in matematica.
Nell'estate 2002 ha usufruito di una borsa di studio (concessa dall'Università degli studi ROMA TRE per la frequenza di scuole estive extra-curriculari) per frequentare un corso di *Academic English (advanced level)* presso la *Boston University.*
Ha superato la prova di qualificazione richiesta per accedere all'esame di laurea, presentando le seguenti tesine:

- "*Trasformata di Fourier e sue applicazioni* " (Tesina discussa)
- "*Disuguaglianza isoperimetrica nel piano*".

O buono Apollo, a l'ultimo lavoro
fammi del tuo valor sì fatto vaso,
come dimandi a dar l'amato alloro.
(Dante, Pd I 13-15)

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione **1**

Risultati principali e schema della tesi 7

1 Introduzione alla teoria KAM **29**

1.1 Flussi lineari su tori 30

1.2 Meccanica hamiltoniana 32

1.3 Sistemi hamiltoniani integrabili 35

1.4 Sistemi hamiltoniani quasi-integrabili 38

1.5 Stabilità ed instabilità dei sistemi quasi-integrabili 42

2 Teorema KAM: caso analitico (schema di Kolmogorov, versione di Salamon) **49**

2.1 Alcune premesse 52

2.1.1 Alcune stime 55

2.2 Dimostrazione del teorema KAM: caso analitico 64

3 Teorema KAM: caso differenziabile (versione di Salamon) **83**

3.1 Spazi hölderiani 84

3.1.1 Definizione e proprietà 84

3.1.2 Alcune stime di interpolazione 85

3.2 Lemmi di Approssimazione di Jackson, Moser, Zehnder e Bernstein 95

3.3 Dimostrazione del teorema KAM: caso differenziabile 115

3.4 Unicità e regolarità 134

4 Teorema KAM: caso isoenergetico **141**

4.1 Condizioni di non degenerazione 142

4.2 Teorema KAM isoenergetico: caso analitico 145

4.3 Teorema KAM isoenergetico: caso differenziabile 168

5 Tori parzialmente iperbolici (caso differenziabile) **187**

5.1 Introduzione 187

5.2 Persistenza dei tori parzialmente iperbolici 189

5.2.1 Conservazione locale della varietà $W^u(\mathbb{M})$ 191

5.2.2 Conservazione locale della varietà $W^s(\mathbb{M})$ 226

5.2.3 Conservazione locale della varietà $\mathbb{M}$ 227

5.2.4 Riassunto risultati ottenuti 230

5.2.5 Conservazione dei tori parzialmente iperbolici in $\mathbb{M}$ 233

Appendici **239**

A Moti lineari su $\mathbb{T}^n$ **241**

B Proprietà dei vettori diofantini **247**

Bibliografia **251**

Introduzione

A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e 'l velle,
sì come rota ch'igualmente è mossa,
l'amor che move il sole e l'altre stelle.
(Dante, Pd XXXIII 142-145)

Una delle prime *regolarità* presenti in natura a meravigliare ed incuriosire il genere umano è stata sicuramente il moto dei corpi celesti, dal sorgere quotidiano del Sole, al mutare mensile delle fasi lunari. Osservando il cielo più attentamente l'uomo riuscì ad individuare dei comportamenti regolari anche nel moto degli altri 5 pianeti conosciuti fin dalle epoche più remote e a costruire elaborati metodi per prevederne la posizione futura. Questi metodi erano essenzialmente empirici e legavano i moti di tali pianeti a delle "*funzioni*" che, attraverso degli opportuni calcoli, erano in grado di restituire le informazioni richieste.
L'astronomia pian piano sviluppò metodi sempre più sofisticati che meglio si accordavano alle osservazioni sperimentali. Fu proprio questa maggiore conoscenza del mondo celeste che portò a nuovi e interessanti interrogativi: cominciò a maturare la convinzione di una possibile vulnerabilità (frutto di una sempre maggiore coscienza di una *non-centralità* della Terra all'interno del più grande sistema solare) e ben presto ci si cominciò a porre pressanti interrogativi che contribuirono a *catalizzare* la ricerca di mezzi e modi per escludere i fantasmi delle prospettive più catastrofiche. Quando precise osservazioni astronomiche misero in evidenza una non perfetta regolarità e periodicità dei moti della Terra e degli altri pianeti, la domanda che sorse spontanea fu: manterremo sempre la nostra orbita intorno al Sole? C'è il rischio in un futuro - speriamo non troppo prossimo - di ritrovarci lontano dall'attuale posizione nell'universo e dal sistema solare? Quale destino attende il nostro pianeta?
Fu la ricchezza di tali interrogativi e la scarsità di risposte che portò i matematici a sviluppare tecniche e nozioni che stanno alla base della "*teoria dei sistemi dinamici*", quali ad esempio il concetto di *stabilità*, un concetto fondamentale nello studio della natura.

Ma il sistema solare è stabile? Propriamente parlando, la risposta è ancora sconosciuta, ma tale interrogativo ha portato a profondi risultati che probabilmente sono molto più importanti della domanda originale (Jürgen Moser).
Come non condividere il giudizio di Moser? E' proprio la ricchezza di problematiche e prospettive presentata da tale domanda, che ha contribuito a sviluppare teorie e tecniche che stanno alla base della moderna teoria dei sistemi dinamici.

Da un punto di vista matematico il sistema solare può essere modellato come un sistema a 10 corpi[1] - di cui una grande massa M (quella del Sole) e 9 masse minori (quelle dei pianeti) m_1, $m_2, \ldots$, m_9 - sottoposti alla loro reciproca attrazione gravitazionale.[2] Se ci limitiamo a considerare due corpi, il principio di gravitazione universale di Newton afferma che la forza agente su ciascun corpo è direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei loro centri, ed inoltre tale forza agisce lungo la congiungente tali centri. Una prima formulazione matematica completa di questo risultato apparve nel famoso *Principia* di Newton. Un fatto che Newton assunse inizialmente vero, era che i corpi celesti potessero essere schematizzati come masse puntiformi: cioè l'attrazione gravitazionale agisce su tali corpi (ritenuti dei solidi sferici) esattamente come se tutta la loro massa fosse concentrata nel loro centro (*centro di massa*). Newton sviluppò tutta la sua teoria su tale assunzione e, prima della pubblicazione, realizzò che necessitava di una giustificazione (infatti è tutt'altro che banale!) e fu proprio la ricerca di una dimostrazione matematica rigorosa di tale fatto a ritardarne la pubblicazione.
Se ci limitiamo a considerare l'interazione di un singolo pianeta con il Sole (*problema dei* 2 *corpi* o *problema di Keplero*), trascurando cioè l'attrazione gravitazionale esercitata dagli altri pianeti, le equazioni differenziali che vengono coinvolte sono abbastanza semplici da risolvere. Quello che si dimostra è che l'orbita seguita da uno dei corpi rispetto all'altro (cioè in un sistema di riferimento in cui quest'ultimo stia in quiete) è rappresentata da un'ellisse.
Cosa possiamo dire nel caso generale? Poichè la massa dei pianeti è circa la millesima parte della massa del Sole, in prima approssimazione potremmo trascurare la loro interazione e tener conto solo dell'attrazione esercitata su di essi da parte del Sole. Si ottiene così un problema esattamente integrabile, in cui ogni pianeta, indipendentemente dagli altri, descriverà la sua ellisse kepleriana. Indicando con ω_k le frequenze orbitali di rivoluzione del pianeta m_k intorno

[1] Ultimamente c'è stato l'annuncio di una delle più importanti scoperte degli ultimi 70 anni riguardante il sistema solare: un nuovo oggetto (il decimo pianeta?) dal diametro un decimo di quello terrestre è stato scoperto nella Fascia di Edgeworth-Kuiper. Quaoar (questo il nome proposto per questo corpo celeste) fa un giro intorno al sole in 288 anni terrestri ed è 1250 km di diametro, quindi tutt'altro che trascurabile.

[2] Stiamo trascurando degli effetti *non conservativi* piccoli, non considerati dalle equazioni di Newton, ma che possono far risentire fortemente gli effetti della loro presenza su tempi sufficientemente lunghi (dell'ordine di miliardi di anni)

al Sole, il moto globale del sistema non sarà in generale periodico, ma *quasi-periodico*. Questo significa che può essere rappresentato attraverso una serie trigonometrica della forma

$$\sum_{j=(j_1,\ldots,j_9)\in\mathbb{Z}^9} c_j e^{2\pi i(j\cdot\omega)t} \tag{1}$$

dove $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_9)$.
La domanda cruciale sorge nel momento in cui passiamo a considerare l'interazione reciproca fra i vari pianeti: *continuano ad esistere tali moti regolari (quasi-periodici) per piccoli valori positivi di* $m_1, \ldots, m_9$*?*
Purtroppo, a differenza del caso a 2 corpi, tale problema (e più in generale il problema ad n corpi, con $n > 2$) non può essere risolto completamente, fatto tutt'altro che banale, per la cui dimostrazione bisognerà attendere alcuni secoli. Nel frattempo finì col diventare un interessante argomento di conversazione tra la mondanità dei salotti parigini, eccitando l'attenzione e l'interesse di personaggi come Voltaire.
Molti dei più grandi matematici del XVIII e del XIX secolo cercarono di risolverlo, senza alcun esito positivo, anche se è indiscutibile il prezioso contributo che i loro tentativi ed approcci diedero alla moderna teoria delle equazioni differenziali.
Osserviamo che tale problema può essere affrontato da un altro punto di vista: può essere considerato come una perturbazione del sistema integrabile sopra discusso (i.e. con i pianeti non interagenti tra loro). Si apre la strada quindi ad un nuovo approccio: la teoria delle perturbazioni. Malgrado gli sforzi di generazioni di matematici illustri (Lagrange, Laplace, Weierstrass e soprattutto Poincaré, che a buon diritto può essere considerato il padre della teoria moderna) fino a tempi recenti la maggiorparte delle tecniche perturbative impiegate restavano prive di una giustificazione rigorosa. La particolarità di questi metodi, infatti, è che essi conducono a delle serie divergenti. Il motivo della divergenza di queste serie sono i cosiddetti *piccoli divisori* (anche detti *piccoli denominatori*): combinazioni lineari intere di frequenze dei moti non perturbati, che compaiono come denominatori nel calcolo dell'influenza delle perturbazioni. Infatti, il formalismo analitico che conduce alla soluzione (1) fallisce se le frequenze $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_9)$ sono in *risonanza* - cioè esiste un vettore intero $j = (j_1, \ldots, j_9)$ tale che $j \cdot \omega = 0$ - in quanto tale espressione compare al denominatore nei coefficienti c_j. Ci sono diverse configurazioni nel sistema solare le cui frequenza orbitali di rivoluzione sono in risonanza: per esempio nel caso di Giove e Saturno si ha che (indicando con ω_G la frequenza di Giove e con ω_S quella di Saturno) $5\omega_S - 2\omega_G \simeq 0$, cioè 5 giri di Giove sono accompagnati da 2 si Saturno[3]; nel caso di Urano e Nettuno

[3]Ciò conduce ad una grande perturbazione reciproca di questi pianeti, con periodo lungo (il suo periodo è di circa 800 anni); lo studio da parte di Laplace di questo effetto è stato uno dei primi successi della teoria delle perturbazioni.

il rapporto tra le rispettive frequenze è circa 2, mentre nel caso Giove, Marte e Terra l'espressione $3\omega_G - 8\omega_M + 4\omega_T$ è circa zero.
Quindi bisognerà assumere che le frequenze siano *non risonanti*. Anche in questo caso quando $j = (j_1, \ldots, j_9)$ varia su tutti gli interi, l'espressione $j \cdot \omega$ può diventare arbitrariamente vicina a zero: questo spiega l'espressione *piccoli divisori*.
La comparsa di questi termini sembra allontanare ogni speranza di convergenza per la serie in (1).
La difficoltà indicata non è caratteristica solo dei problemi della meccanica celeste, ma di tutti i problemi vicini a problemi integrabili (per esempio, il problema del moto di una trottola pesante asimmetrica in rotazione rapida). La questione di fornire una dimostrazione della convergenza (o della non convergenza) delle serie perturbative impiegate, non è una pura necessità matematica, ma al contrario nasce dalla necessità di comprendere in profondità i domini di applicazione e i limiti di applicabilità delle tecniche perturbative ai problemi della fisica.

Incurante di tali difficoltà, Weierstrass tentò di dimostrare la convergenza di tali serie. La sua speranza di superare il problema dei piccoli divisori era basata in gran parte su un osservazione fatta da Dirichlet a Kronecker nel 1858 relativamente a un metodo di approssimazione successiva del problema degli n-corpi. Sfortunatamente Dirichlet morì presto senza lasciare alcuna nota di tale metodo. Weierstrass interpretò tale osservazione come una possibilità di convergenza per tali serie. Dopo molti tentativi privi di successo, egli suggerì tale problema al matematico svedese Gösta Mittag-Leffler; quest'ultimo convinse il re Oscar II di Svezia e Norvegia ad offrire un premio al risolutore, in occasione del suo 60mo compleanno. Una giuria internazionale (composta da Karl Weierstrass, Charles Hermite e Mittag-Leffler stesso) giudicò vincitore il lavoro di Poincaré: *Sur le problém des trois corps et les équations de la dynamique*. In realtà egli non fornì una soluzione al problema posto, ma provò che non era possibile integrare analiticamente le equazioni di Newton in tale caso. In particolare, studiando il problema dei tre corpi, si trovò ad affrontare la questione delle *orbite doppiamente asintotiche* (dette oggi *orbite omocline)* che lo portarono, per primo, ad imbattersi in una dinamica molto complicata. Egli scoprì, con questi studi, il cosiddetto *caos deterministico*, rendendosi conto che, nella dinamica delle soluzioni doppiamente asintotiche, era sufficiente una piccolissima perturbazione o una minima variazione delle condizioni iniziali per rendere imprevedibile l'evoluzione futura del sistema:[4] "*On sera frappé de la complexité de cette figure que je ne cherche meme pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème de trois corps...*"

Questi risultati causarono la perplessità di molti matematici circa la stabilità

[4]Trad.: "Saremmo stupefatti della complessità di questa figura che non cerco neanche di disegnare. Nulla è meglio per darci un'idea della complicatezza del problema di 3 corpi."

del sistema solare. Lo stesso Poincaré osservò che la presenza delle risonanze tra le frequenze era un forte segno della non esistenza di moti quasi periodici, cioè della divergenza della serie in (1): "*...nonostante ciò tali argomentazioni non sono sufficienti a fornire una dimostrazione rigorosa di tale fatto*".
Lo *status* del problema della stabilità del sistema solare alla fine del XIX secolo fu ben raffigurato da Poincaré in suo articolo del 1898:

> *"Le persone che sono interessate ai progressi della meccanica celeste* [...] *rimarrano sorprese nel vedere quante volte è stata dimostrata la stabilità del sistema solare. Lagrange l'ha stabilita per primo. Poisson l'ha dimostrata di nuovo e molte dimostrazioni sono pervenute da allora e continueranno ad arrivare. Erano le vecchie dimostrazioni insufficienti o sono le nuove superflue? La sorpresa di queste persone potrebbe addirittura raddoppiare, se dicessi loro che un giorno - forse - un matematico potrebbe mostrare, con argomentazioni rigorose, che il sistema solare è instabile. Questo potrebbe veramente accadere; non ci sarebbe niente di contraddittorio e le vecchie dimostrazioni conserverebbero il loro valore. La verità è che queste sono soltanto delle successive approssimazioni: cioè non pretendono di limitare in maniera rigorosa le orbite tra stretti confini da cui non è possibile più fuggire."*
>
> [H. Poincaré, *Sur la stabilité du système solaire*, 1898]

Sottolineiamo che, con il suo celeberrimo lavoro [52], Poincaré segnò l'inizio della teoria dei sistemi dinamici in senso moderno, sviluppando metodi qualitativi, topologici, probabilistici e globali per una loro analisi e guardando l'intero spazio delle fasi come un oggetto geometrico, spostando quindi l'attenzione allo studio delle cosiddette *varietà invarianti* (cioè varietà nello spazio delle fasi, che sono invarianti per l'azione del flusso del sistema). In particolare, egli riconobbe nello studio dei sistemi hamiltoniani[5] *quasi-integrabili* (cioè piccole perturbazioni di sistemi integrabili) il *problema fondamentale della dinamica* (lo studio di questo problema ha oggigiorno un grande interesse in molti campi della matematica, quali PDE, teoria ergodica, geometria differenziale etc...).

Da Poincaré in poi, fu generalmente accettato che, con poche ma notevoli eccezioni (quali problemi a una dimensione, moto di un punto di un campo centrale,

[5]La nozione di *sistema hamiltoniano* (o *equazioni della dinamica*, usando la terminologia usata da Poincaré nel suo lavoro) è di fondamentale importanza nello studio della dinamica e della meccanica in generale. In realtà il nome "*hamiltoniano*" non è storicamente corretto, in quanto equazioni della stessa forma erano già state considerate da Lagrange e Poisson molti anni prima di Hamilton.

moto euleriano e lagrangiano del corpo rigido, problema di due centri fissi, moto lungo una geodetica di un ellissoide), le soluzioni di un sistema dinamico non lineare non potessero essere trovate esplicitamente e di conseguenza una maggiore attenzione fu rivolta allo studio qualitativo del sistema. Tuttavia, per mezzo di questi casi integrabili, si può ottenere un'informazione piuttosto significativa sul moto di numerosi sistemi importanti, considerando il problema integrabile come una prima approssimazione.

Un significativo passo in avanti si ebbe con la scoperta di Kolmogorov (1954) di un *grande* insieme di moti stabili (*quasi-periodici*) per sistemi hamiltoniani di tipo abbastanza generale (i sistemi quasi-integrabili non degeneri): l'insieme dei tori riempiti da tali orbite è generalmente molto complicato, tipicamente un insieme di Cantor con misura di Lebesgue positiva. Più grossolanamente, tale teorema afferma che la maggiorparte dei moti imperturbati con frequenze *sufficientemente irrazionali*[6] rimangono stabili sotto l'effetto di perturbazioni sufficientemente piccole (modulo opportune condizioni di non degenerazione[7] per il sistema imperturbato).
Tale lavoro era destinato a rivoluzionare completamente il punto di vista nella teoria generale dei sistemi dinamici, portando alla nascita e allo sviluppo di un nuovo approccio per lo studio di tali problemi: la teoria KAM, sviluppatasi principalmente sulle idee e sul lavoro di Kolmogorov, Arnol'd e Moser (da cui l'acronimo KAM) e successivamente ramificatasi in vari ambiti di ricerca.
Una delle caratteristiche peculiari di questo nuovo approccio, è la costruzione di un algoritmo iterativo convergente molto rapidamente (ispirato al metodo delle tangenti di Newton per la ricerca delle soluzioni di un'equazione algebrica). Una convergenza veloce è un fatto di straordinaria importanza per la riuscita di tale metodo, in quanto permette di neutralizzare l'influenza dei suddetti *piccoli denominatori*: assumendo delle opportune condizioni di regolarità per i termini perturbativi, anche i *numeratori* decrescono sufficientemente e quindi si può provare la convergenza della serie.

Questo teorema fornisce quindi un grande insieme di soluzioni stabili che rimangono *eternamente* vicine ai moti regolari e ordinati del sistema imperturbato. Purtroppo tale insieme forma un insieme sconnesso con *gaps* ovunque: un cambiamento assai piccolo delle condizioni iniziali può cambiare sostanzialmente il comportamento della soluzione, lasciando spazio alla possibile esistenza di tra-

[6]Tali frequenze ω, che chiameremo (γ,τ)-*diofantine*, soddisfano la seguente condizione:

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

[7]Non entreremo, in questa fase introduttiva, nei dettagli di tali condizioni. Analizzeremo in seguito due diverse condizioni di non degenerazione: *standard* e *isoenergetica*, che ci condurranno a risultati diversi per quanto riguarda l'insieme dei tori (i.e. moti quasi periodici) conservati.

iettorie caotiche che si *allontanano* nello spazio delle fasi; questo fenomeno, la cui esistenza è stata mostrata da Arnol'd nel 1964 per un modello speciale, è chiamato "*diffusione di Arnol'd*". Inoltre, proprio per la complessità dell'insieme dei tori conservati è impossibile stabilire con assoluta precisione se un dato iniziale si trova o no su uno di tali tori.
Nonostante ciò è innegabile l'importanza di tale risultato, che ha aperto la strada a tutta una serie di metodi e prospettive che hanno cambiato radicalmente il quadro moderno dei sistemi dinamici. Basti pensare - oltre all'applicazione delle tecniche KAM a vari ambiti di ricerca quali PDE, teoria ergodica, geometria differenziale etc... - a nuove teorie sviluppatesi a partire da tali risultati, quali la teoria di Nekhoroshev (cfr. [51] e [55]), la conservazione dei tori non massimali, cioè corrispondenti a frequenze risonanti (cfr. [35], [39] e [66]), la problematica (ancora aperta) associata alla diffusione di Arnol'd (cfr. [5], [9], [8] [10] [18], [22], [31], [32], [43], [68] e [70]), etc...

Risultati principali e schema della tesi

Lo scopo di questa tesi di laurea è quello di rivisitare ed estendere tali risultati, sia nel caso analitico che in quello differenziabile. In particolare abbiamo perseguito i seguenti obiettivi:

(i) CASO ANALITICO:
fornire una presentazione *auto-contenuta* dei principali risultati della teoria KAM nella classe delle hamiltoniane analitiche, seguendo principalmente le linee guida sviluppate da Kolmogorov nel suo lavoro [40] e riprese da Salamon in [60];

(ii) CASO DIFFERENZIABILE:
estendere i risultati ottenuti alla classe delle hamiltoniane sufficientemente differenziabili, utilizzando una tecnica di approssimazione sviluppata nei lavori di Jackson, Moser, Zehnder e Bernstein e cercando di dare particolare enfasi alla ricerca delle condizioni ottimali di regolarità da richiedere alla hamiltoniana.
In tale contesto è stato colmato un "gap" nella dimostrazione presentata nel lavoro di Salamon [60];

(iii) CASO ISOENERGETICO (ANALITICO E DIFFERENZIABILE):
adattare le tecniche utilizzate nel *caso standard*, per dimostrare dei risultati analoghi per il *caso isoenergetico*, cioè la conservazione dei tori corrispondenti a valori di energia fissata. Questi risultati sono molto più significativi dal punto di vista della stabilità del sistema, in quanto ci assicure-

ranno - su ciascun livello energetico - la conservazione di una famiglia di tori invarianti. Il risultato nel caso isoenergetico differenziabile è nuovo;

(iv) TORI PARZIALMENTE IPERBOLICI:
rivisitare ed estendere la teoria di Fenichel per le *varietà invarianti normalmente iperboliche* (cfr. [28] e [69]) nel caso hamiltoniano, per dimostrare la conservazione dei tori parzialmente iperbolici di sistemi hamiltoniani sufficientemente differenziabili e dei loro *baffi stabili* e *instabili*. In particolare abbiamo esteso tali risultati anche al caso isoenergetico, dimostrando la conservazione dei tori parzialmente iperbolici corrispondenti ad un fissato livello d'energia. Il risultato nel caso isoenergetico differenziabile è nuovo.

Cerchiamo di descrivere più dettagliatamente il lavoro svolto.

Capitolo 1 - Introduzione alla teoria KAM

In questo primo capitolo, dopo aver brevemente introdotto alcuni risultati preliminari (quali la natura topologica dei moti lineari su un toro in relazione alle proprietà aritmetiche della loro frequenza, i vettori diofantini e le loro proprietà, i concetti fondamentali della meccanica hamiltoniana e della struttura simplettica dello spazio delle fasi) analizzeremo la *geometria* dei sistemi integrabili, cioè mostreremo la foliazione dello spazio delle fasi in tori invarianti. La domanda spontanea che ci si pone (e che conduce alle interessanti problematiche analizzate dalla teoria KAM) è la seguente: come cambia tale geometria se perturbiamo leggermente il nostro sistema (cioè consideriamo i cosiddetti sistemi quasi-integrabili)? Il teorema di Kolmogorov (1954) - che in questa prima fase enunceremo soltanto in una forma qualitativa - fornirà una risposta a tale interrogativo: *sotto opportune ipotesi di non degenerazione per il sistema imperturbato e di piccolezza per la taglia della perturbazione, la maggioranza dei tori non risonanti non viene distrutta, ma si deforma leggermente.*
Tale risultato verrà discusso ampiamente nei capitoli successivi, sia nel caso analitico che differenziabile. Concluderemo il capitolo esponendo - in forma *divulgativa* - alcuni sviluppi e prospettive aperte da tali risultati, connessi al problema della stabilità e della instabilità dei sistemi quasi-integrabili. In particolare introdurremo la *teoria di Nekhoroshev* (cioè la stabilità su periodi esponenzialmente lunghi delle variabili di azioni di sistemi hamiltoniani che soddisfano delle opportune condizioni di *trasversalità*, dette *steepness conditions*) e un affascinante fenomeno (la cui esistenza fu provata da Arnol'd nel 1964 per un modello speciale) noto come *diffusione di Arnold* (cioè il possibile comportamento caotico delle orbite che originariamente giacevano sui tori distrutti dalla perturbazione).

Capitolo 2 - Teorema KAM: caso analitico (schema di Kolmogorov, versione di Salamon)

In questo capitolo dimostreremo una *versione quantitativa* del teorema KAM nel caso analitico, cioè la persistenza dei tori diofantini sotto opportune condizioni di non degenerazione della hamiltoniana.
Il risultato principale che dimostreremo è il seguente:

Teorema 1. (Kolmogorov, Arnol'd, Moser)
Siano $n \geq 2,\ \tau > n-1,\ \gamma > 0,\ 0 < \theta < 1$ *e* $M \geq 1$*, e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che

$$c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$$

e che valga quanto segue.
Sia $H(x, y)$ *una hamiltoniana reale analitica nella striscia*

$$\Sigma_r \equiv \{(x, y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r,\ |y| \leq r\,\}$$

con $0 < r \leq 1$*, periodica di periodo* 1 *nelle componenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *e tale da soddisfare le seguenti condizioni per* $(x, y) \in \Sigma_r$ *e per un qualche* $\delta \leq \delta^*$*:*[8]

$$\begin{aligned}
&|H(x,0) - \langle H(\cdot,0)\rangle| \leq \delta r^{2\tau+2}\\
&|H_y(x,0) - \omega| \leq \delta r^{\tau+1}\\
&|H_{yy}(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M}
\end{aligned}$$

dove $Q(x,y) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *è una matrice simmetrica (non necessariamente analitica) nella striscia* Σ_r*, tale che*

$$|Q(x,y)| \leq M \qquad e \qquad \left|\langle Q(\,\cdot\,,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,.$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ *(dove* $z = (x, y)$ *e* $\zeta = (\xi, \eta)$*), dalla striscia* $\Sigma_{\theta r}$ *nella striscia* Σ_r*, della forma:*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + \left(u_\xi^T(\xi)\right)^{-1}\eta \end{cases}$$

[8] Data una funzione

$$f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$$

denoteremo con $\langle f(\cdot)\rangle$ la sua media su $\mathbb{T}^n$, cioè:

$$\langle f(\cdot)\rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\,dx\,.$$

con le funzioni $u(\xi)-\xi$ e $v(\xi)$ entrambe periodiche di periodo 1 e tale che la hamiltoniana trasformata $K=H\circ\phi$ soddisfi

$$K_\xi(\xi,0)=0,\quad K_\eta(\xi,0)=\omega\ .$$

Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r}$:

$$\begin{aligned}
&|\phi(\zeta)-\zeta|\le\frac{c\delta}{30M^3}(1-\theta)r\\
&|\phi_\zeta(\zeta)-\mathbb{I}|\le\frac{c\delta}{15M^3}\\
&|K_{\eta\eta}(\zeta)-Q(\zeta)|\le\frac{c\delta}{2M}\\
&|v\circ u^{-1}(x)|\le\frac{c\delta}{15M^3}r^{\tau+1}\ .
\end{aligned}$$

Il teorema precedente ci fornisce quindi una soluzione quasi-periodica vicina al toro (non invariante) $\mathbb{T}^n\times\{0\}$, che viene preso come "*soluzione approssimata iniziale*". Tale soluzione è data da:

$$\begin{cases} x(t)=u(\omega t)\\ y(t)=v(\omega t)\,. \end{cases}$$

Osserviamo come il risultato dimostrato sia fortemente *quantitativo*, nel senso che comprende tutta una serie di stime che risulteranno necessarie per applicare tale teorema per la dimostrazione del caso differenziabile.
Questo contesto è più generale del caso di un sistema hamiltoniano quasi-integrabile: ci limitiamo infatti a considerare soltanto la perturbazione di un singolo toro, cioè un toro che è sufficientemente vicino al toro di un sistema integrabile e mostriamo come, sotto opportune condizioni di non degenerazione per l'hamiltoniana H (espresse attraverso le richieste sulla matrice Q), partendo da tale soluzione approssimata sia possibile ricavare una soluzione quasi-periodica per il nostro sistema, cioè un toro invariante vicino al toro iniziale (i.e. $\mathbb{T}^n\times\{0\}$). Il caso di un sistema hamiltoniano quasi-integrabile è chiaramente un caso particolare, poichè tutti i tori massimali invarianti per il sistema integrabile corrispondono a soluzioni approssimate per il sistema perturbato (per l'enunciato relativo al caso quasi-integrabile si veda il corollario 2.2.2).
La tecnica adottata segue sostanzialmente lo schema delineato da Kolmogorov nel suo lavoro del 1954 [40] (che nonostante l'estrema chiarezza espositiva, manca di dettagli tecnici) e ripreso da Salamon in [60]: costruiremo una successione di hamiltoniane reale analitiche $H^{(\nu)}$ nelle strisce Σ_{r_ν}, con

$$\begin{cases} r_0=r\\ r_\nu=\dfrac{1+\theta}{2}r+\dfrac{1-\theta}{2^{\nu+1}}r\,, \end{cases}$$

in modo che l'errore commesso nella scelta della soluzione approssimata, decresca in maniera quadratica ad ogni passo dell'iterazione (è questo lo schema *superconvergente* che garantirà la convergenza dell'intero algoritmo). La condizione di non degenerazione imposta è indispensabile, in quanto ci permetterà, ad ogni passo, di trovare una trasformazione simplettica che lasci invariata la frequenza ω; questo fatto verrà pagato con una variazione del livello energetico (cioè dell'energia del toro perturbato). Vedremo nel capitolo 4 come il voler lasciare invariato il livello energetico richieda una diversa condizione di non degenerazione (che chiameremo *condizione di non degenerazione isoenergetica* per distinguerla da quella *standard* che abbiamo sopra considerato): in tal caso ad ogni passo (a meno di non richiedere ulteriori condizioni analoghe a quella richiesta nel caso *standard*) avremo una variazione (piccola) della frequenza, che si tradurrà in una variazione della frequenza finale del toro perturbato (anche questa sufficientemente piccola).

Capitolo 3 - Teorema KAM: caso differenziabile (versione di Salamon)

In questo capitolo vogliamo dimostrare un teorema analogo a quello del capitolo precedente, ma in un contesto diverso: non supporremo più l'analiticità della hamiltoniana, ma ci limiteremo a supporre che sia sufficientemente differenziabile (in termini che poi discuteremo più dettagliatamente). Non è possibile applicare direttamente lo schema di Kolmogorov in tale contesto, in quanto l'iterazione sarebbe destinata a "*morire*" dopo un numero finito di passi, a causa si una perdita di differenziabilità cui si assiste inevitabilmente ad ogni *step* dell'iterazione.
La tecnica che seguiremo consiste invece nel trovare una successione di hamiltoniane analitiche convergenti alla nostra hamiltoniana ed applicare il teorema dimostrato nel caso analitico a tale successione. Per far ciò dovremo innanzitutto introdurre uno *smoothing operator*, cioè sviluppare una tecnica di approssimazione di funzioni C^l con una successione di funzioni analitiche, rifacendoci ai lavori di Moser, Jackson, Zehnder e Bernstein e cercando di relazionare le proprietà qualitative relative alla differenziabilità della funzione, in termini di stime quantitative per tale successione approssimante.
L'approccio che seguiremo è quello sviluppato da Salamon in [60]: osserviamo che in queste note (non pubblicate, ma reperibili sulla pagina web dell'autore) lo stesso autore segnala (con una nota aggiunta a mano) un'errore relativo alla tecnica di approssimazione sopra menzionata e ad alcune stime connesse allo *smoothing operator* introdotto, ma non fornisce dettagli relativi alla correzione.
Il passo successivo è stato apportare le modifiche necessarie alla dimostrazione del teorema KAM (caso differenziabile) presente in [60], tenendo conto delle correzioni sopra effettuate. E' bene sottolineare che nonostante tali variazioni, le idee e le tecniche alla base della dimostrazione di Salamon continuano a rimanere sostanzialmente valide.

Il capitolo è strutturato nel seguente modo:

- Nella prima parte introduciamo gli *spazi hölderiani* e dimostriamo alcune proprietà, quali ad esempio delle interessanti stime di interpolazione (in alcuni casi particolari) che legano tra loro le norme hölderiane con esponenti diversi e che ci serviranno per dimostrare alcune stime relative all'operatore di regolarizzazione che andremo a definire.

- Il passo successivo sarà proprio introdurre tale operatore di regolarizzazione e dimostrare alcune stime che legano la funzione regolarizzata con un opportuno polinomio di Taylor della funzione originaria. Tali stime risulteranno indispensabili per poter dimostrare il teorema KAM in questo nuovo contesto.
  Il lemma che dimostreremo è il seguente:

  Lemma. (Jackson, Moser, Zehnder)
  Esiste una famiglia di operatori "regolarizzanti" S_r (con $0 < r \leq 1$) dallo spazio $C^0(\mathbb{R}^n)$ allo spazio delle funzioni intere su $\mathbb{C}^n$, tali che per ogni $l \geq 0$ esista una costante $C = C(l,n)$ in modo che valgano le seguenti stime. Se $f \in C^l(\mathbb{R}^n)$ allora per $|\alpha| \leq l$ e $|\mathrm{Im}\, x| \leq r$ si ha:

  $$\left| \partial^\alpha S_r f(x) - \sum_{|\beta| \leq l - |\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(Re\, x) \frac{(i\, \mathrm{Im}\, x)^\beta}{\beta!} \right| \leq C\, |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}$$

  ed in particolare per $\rho \leq r$

  $$|\partial^\alpha S_r f - \partial^\alpha S_\rho f|_\rho \leq C\, |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \, .$$

  Inoltre, nel caso reale abbiamo:

  $$|S_r f - f|_{C^s} \leq C |f|_{C^l} r^{l-s} \qquad s \leq l$$
  $$|S_r f|_{C^s} \leq C |f|_{C^l} r^{l-s} \qquad l \leq s \, .$$

  Infine, se f è periodica rispetto a qualcuna delle sue variabili, allora anche le funzioni approssimanti $S_r f$ lo sono rispetto alle stesse variabili.

- Fatto ciò, cercheremo di legare le proprietà di differenziabilità di una funzione in termini di stime quantitative per la successione di funzioni analitiche approssimante. Tale risultato può in un certo senso essere interpretato come un "viceversa" del lemma precedente. Una sua versione classica è dovuta a Bernstein e lega le proprietà di differenziabilità di una funzione periodica con delle stime quantitative per una successione approssimante di polinomi trigonometrici. Dimostreremo il seguente risultato:

  Lemma. (Bernstein, Moser)
  Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il limite di una successione di funzioni reali analitiche $f_\nu(x)$ definite nella striscia complessa

  $$\left\{ x \in \mathbb{C}^n : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r_\nu = 2^{-\nu} r_0 \right\} \, ,$$

con $0 < r_0 \leq 1$ *e tali che*

$$f_0 = 0 \quad e \quad |f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x)|_{r_\nu} \leq A r_\nu^l \,,$$

con A *costante. Allora* $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ *per ogni* $s \leq l$ *non intero ed inoltre*

$$|f|_{C^s} \leq \frac{\hat{C} A}{\mu(\mu-1)} r_0^{l-s}$$

dove $0 < \mu = s - [s] < 1$ *è la parte frazionaria di* s *e* $\hat{C} = \hat{C}(l,n) > 0$ *è un'opportuna costante.*
Inoltre, se le f_ν *sono periodiche nelle variabili* x_i*, allora anche la funzione limite* f *lo è.*

- A questo punto abbiamo sviluppato tutti gli strumenti per poter estendere il teorema KAM al caso differenziabile. Il teorema che dimostreremo è il seguente:

Teorema 2. (Moser)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ *e* $\rho > 0$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ,τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto contenente* $B_\rho(0)$ *e sia* $F \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *tale che*

$$\begin{cases} F_x(x,0) = 0 \\ F_y(x,0) = \omega \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{T}^n$*; supponiamo inoltre che soddisfi le seguenti stime per* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \in G$*:*

$$\begin{aligned} &|F|_{C^l} \leq M \\ &\left|\langle F_{yy}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,. \end{aligned}$$

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0$$

in modo che valga quanto segue.
Se $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *è una funzione hamiltoniana tale che per qualche* $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ *si abbia*

$$|H - F|_{C^s} \leq M\varepsilon^{l-s} \qquad \text{per ogni } \; 0 \leq s \leq l\,,$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\ \\ Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases}$$

tali che:

i) $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono entrambe periodiche con periodo* 1*;*

ii) $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \circ u^{-1} \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$ *, per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*.*

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{aligned} |u - \mathrm{id}\,|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+1-s} \qquad && 0 < s \leq m+1 \\ |v \circ u^{-1}|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+\tau+1-s} \qquad && 0 < s \leq m+\tau+1\,, \end{aligned}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$.

Osserviamo che stiamo richiedendo alla nostra hamiltoniana di essere C^l con $l > 2\tau + 2 > 2n$ (in quanto $\tau > n - 1$). Queste condizioni (nettamente migliori rispetto a quelle trovate da Moser nel suo lavoro originale sulle *twist maps* - corrispondenti a due gradi di libertà - dove il numero di derivate richiesto era piuttosto eccessivo: 333), coincidono con quanto dimostrato da Pöschel (cfr. [53] e [54]). Osserviamo inoltre che tale *lower bound* sembra essere ottimale, come mostrano diversi esempi esistenti in letteratura, quali [37], [65] o [42]. Inoltre maggiore è la regolarità della hamiltoniana, maggiore sarà la regolarità delle soluzioni trovate.

La tecnica che abbiamo seguito, come già accennato in precedenza, si basa su un'idea di Moser che viene ripresa nelle note di Salamon (con opportune correzioni): approssimeremo la nostra hamiltoniana con una successione di hamiltoniane reali analitiche, usando le tecniche sopra discusse ed otterremo quindi una successione di hamiltoniane, definite su *strisce sempre più sottili*, ciascuna delle quali soddisferà, all'interno della propria striscia, le condizioni richieste dal teorema KAM analitico. Quindi troveremo una successione di trasformazioni simplettiche reali analitiche (vedi teorema 1) e questo ci permetterà di costruire uno schema iterativo convergente, che ci fornirà i risultati richiesti.
Per l'enunciato relativo ai sistemi quasi-integrabili si veda il corollario 3.3.2.

- Nell'ultima parte del capitolo, mostreremo alcuni risultati relativi all'unicità e alla regolarità delle soluzioni trovate. In particolare mostreremo che, con le stesse condizioni di regolarità richieste nel teorema 2, si può dimostrare un risultato di unicità (locale) per i tori invarianti con un'assegnata frequenza diofantina ω. In un contesto più generale tale problema è stato ampiamente discusso - nel caso analitico - da Zehnder (cfr. [71]) e le idee e le tecniche da noi riprese (vedi [60]) sono profondamente ispirate a tale lavoro. In particolare dimostreremo il seguente risultato:

Teorema 3. *Siano* $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, $0 < \lambda < 1$, $M \geq 1$ *ed* $l = \tau + \lambda + 1$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto contenente lo zero e sia* $H \in C^{l+2}(\mathbb{T}^n \times G)$ *una hamiltoniana tale che*

$$\begin{cases} H_x(x,0) = 0 \\ H_y(x,0) = \omega \end{cases}$$

ed in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

$$|H|_{C^{l+2}} \leq M \qquad e \qquad \left|\langle H_{yy}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,.$$

Allora esiste una costante

$$0 < \delta = \delta(\gamma, \tau, \lambda, n, M) < 1$$

in modo che valga quanto segue.
Se $u \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \in C^l(\mathbb{R}^n, G)$ *soddisfano*

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\[2ex] Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v)\,, \end{cases}$$

le funzioni $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono periodiche di periodo* 1, $v \circ u^{-1} \in C^l(\mathbb{T}^n, G)$ *e valgono le seguenti stime*

$$|u_\xi - \mathbb{I}|_{C^0} \leq \delta \qquad e \qquad |v \circ u^{-1}|_{C^l} \leq \delta\,,$$

allora

$$u_\xi \equiv \mathbb{I} \qquad e \qquad v \equiv 0\,.$$

Questo risultato di unicità, insieme al teorema KAM differenziabile, ci permetterà di mostrare che le soluzioni di un sistema hamiltoniano C^∞ sono anch'esse C^∞:

Teorema 4. *Siano* $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, *ed* $l > 2\tau+2$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto e sia* $H \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times G)$ *una funzione hamiltoniana.*
Consideriamo $u \in C^{l+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \in C^l(\mathbb{R}^n, G)$*, tali che*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

sia una soluzione del sistema hamiltoniano associato, con $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *siano periodiche di periodo* 1 *ed* u *diffeomorfismo del toro* $\mathbb{T}^n$*. Supponiamo infine che*

$$\det\left(\langle u_\xi(\xi)^{-1}\, H_{yy}(u(\xi), v(\xi))\, u_\xi^T(\xi)^{-1}\rangle\right) \neq 0\,.$$

Allora $u \in C^\infty$ *e* $v \in C^\infty$*.*

Capitolo 4 - Teorema KAM: caso isoenergetico

Abbiamo discusso nei capitoli precedenti la conservazione dei tori invarianti massimali corrispondenti a frequenze diofantine, sia nel caso di sistemi hamiltoniani analitici, che di sistemi sufficientemente differenziabili. I risultati che abbiamo fin qui provato (cfr. teorema 1 e teorema 2) ci hanno permesso di concludere che, sotto opportune ipotesi di non degenerazione sulla hamiltoniana imperturbata e sulla taglia del fattore perturbativo, i tori invarianti non risonanti associati ad una frequenza diofantina ω, sopravvivono per il sistema perturbato, i.e. il sistema perturbato continua ad ammettere un toro invariante corrispondente alla stessa frequenza diofantina ω, ma - in generale - su un differente livello energetico.
Il problema che vorremo affrontare ora è il seguente:
E' possibile dimostrare la conservazione dei tori invarianti massimali corrispondenti a valori di energia fissati? Cosa possiamo dire in tal caso relativamente alle frequenze di tali tori perturbati?
Questo problematica trova le sue motivazioni oltre che in una *irrefrenabile curiosità matematica*, in molti problemi fisici, dove è essenziale il controllo del valore energetico delle soluzioni di un problema assegnato; inoltre, promette risultati potenzialmente più significativi per lo studio della stabilità di tali sistemi: infatti in tal caso la conservazione di tali tori verrebbe garantita su ciascun livello energetico.
Purtroppo tale risultato - in generale - non è valido, se imponiamo condizioni

analoghe a quelle richieste nel caso standard: si riescono infatti a trovare dei controesempi che ne negano la validità. Dobbiamo trovare quindi una condizione che ci garantisca la *non degenerazione isoenergetica* della nostra hamiltoniana integrabile, cioè una condizione che ci permetta di dimostrare il risultato in questione.
Nel primo paragrafo discuteremo la natura di tale condizione di non degenerazione ed i suoi legami con la condizione di *non degenerazione standard*: mostreremo (con degli esempi) che tali condizioni sono indipendenti e che conducono a risultati differenti nell'ambito della teoria KAM e della conservazione dei tori invarianti diofantini.
Nei paragrafi successivi dimostreremo delle versioni *quantitative* del teorema KAM isonergetico, nella classe delle hamiltoniane analitiche e in quella delle hamiltoniane differenziabili: le condizioni di regolarità che otterremo in quest'ultimo caso, sono esattamente le stesse del caso *standard*.
Le tecniche che useremo si rifanno agli schemi discussi nei capitoli precedenti, opportunamente modificati per adattarli a questo nuovo contesto: infatti, nonostante l'*originalità* dei risultati di questo capitolo, non può essere negato il notevole contributo fornito da quanto discusso in precedenza e dalle note di Salamon (nonché da alcune osservazioni in [23], dove però viene considerato solo il caso analitico). Osserviamo che la *condizione di non degenerazione isoenergetica* ci permetterà ad ogni passo dello schema di lasciare invariato il livello energetico, ma tutto ciò comporterà una variazione (seppur minima) della frequenza, comportando una variazione delle frequenza finale, dipendente dalla taglia della perturbazione; la nuova frequenza sarà della forma $\omega' = (1+k)\omega$ con k sufficientemente piccolo (di cui forniremo delle precise stime), e quindi i rapporti tra le componenti delle frequenze (*frequency ratios*) rimarranno costanti (cioè le frequenze rimangono costanti se viste nello spazio proiettivo).
Enunciamo i risultati principali che dimostreremo. Cominciamo dal caso analitico:

Teorema 5. (Teorema KAM isoenergetico, caso analitico)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$, $E \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino, cioè

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

tale che $|\omega| \leq M$.
Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che $c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$ e che valga quanto segue.
Sia $H(x,y)$ una hamiltoniana reale analitica nella striscia

$$\Sigma_r = \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r,\ |y| \leq r\}$$

con $0 < r \leq 1$*, periodica di periodo* 1 *nelle componenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *e tale da soddisfare le seguenti condizioni per* $(x,y) \in \Sigma_r$ *e per qualche* $\delta \leq \delta^*$*:*

$$
\begin{aligned}
&|H(x,0) - E| \leq \delta r^{2\tau+2} \\
&|H_y(x,0) - \omega| \leq \delta r^{\tau+1} \\
&|H_{yy}(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M}
\end{aligned}
$$

dove $Q(x,y) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *è una matrice simmetrica (non necessariamente analitica) nella striscia* Σ_r*; definiamo, inoltre*

$$
A(x,y) = \begin{pmatrix} Q(x,y) & -\omega^T \\ \omega & 0 \end{pmatrix}
$$

e supponiamo che in Σ_r *si abbia:*

$$
|Q(z)| \leq M \qquad e \qquad \left|\langle A(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M \, .
$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ *(dove* $z = (x,y)$ *e* $\zeta = (\xi,\eta)$ *) della forma*

$$
\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta \end{cases}
$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *entrambe periodiche di periodo* 1 *e tale che la hamiltoniana trasformata* $K = H \circ \phi$ *soddisfi:*

$$
K(\xi,0) = E\,, \quad K_\xi(\xi,0) = 0, \quad K_\eta(\xi,0) = (1+k)\omega
$$

dove $|k| \leq 2^{2\tau+3} c\delta r^{\tau+1}$*.*
Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r}$*:*

$$
\begin{aligned}
&|\phi(\zeta) - \zeta| \leq \frac{c\delta}{34M^3}(1-\theta)r \\
&|\phi_\zeta(\zeta) - \mathbb{I}| \leq \frac{c\delta}{17M^3} \\
&|K_{\eta\eta}(\zeta) - Q(\zeta)| \leq \frac{c\delta}{2M} \\
&|v \circ u^{-1}(x)| \leq \frac{c\delta}{19M^3} r^{\tau+1} \, .
\end{aligned}
$$

Osserviamo che le condizioni di non degenerazione isoenergetica si traducono nelle condizioni imposte sulla matrice A.

Analogamente a quanto già fatto nel caso standard, estenderemo tali risultati al caso differenziabile:

Teorema 6. (Teorema KAM isoenergetico, caso differenziabile)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $E \in \mathbb{R}$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ *e* $\rho > 0$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,,$$

tale che $|\omega| \leq M$. *Sia inoltre* $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto contenente* $B_\rho(0)$ *e sia* $F \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *tale da soddisfare:*

$$\begin{cases} F_x(x,0) = 0 \\ F_y(x,0) = \omega \\ F(x,0) = E \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{T}^n$.
Supponiamo, inoltre, che soddisfi le seguenti stime per $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \in G$*:*

$$\begin{aligned} &|F|_{C^l} \leq M \\ &\left|\langle A(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,, \end{aligned}$$

dove

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} F_{yy}(x,y) & -\omega^T \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0$$

in modo che valga quanto segue.
Se $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *è una funzione hamiltoniana tale che per qualche* $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ *si abbia:*

$$|H - F|_{C^s} \leq M\varepsilon^{l-s} \qquad \textit{per ogni}\ \ 0 \leq s \leq l\,,$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi)\,, \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} D_{(1+k)\omega} u = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\[2ex] D_{(1+k)\omega} v = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases}$$

dove $|k| \leq 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}$ *(per un'opportuna costante* $\tilde{c}_2$*), tali che:*

1. $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono entrambe periodiche con periodo 1;*

2. $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \circ u^{-1} \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$ *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*;*

3. $H(u(\xi), v(\xi)) = E$ *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$*.*

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$|u - \mathrm{id}\,|_{C^s} \leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)} \varepsilon^{m+1-s} \qquad 0 < s \leq m+1\,,$$
$$|v \circ u^{-1}|_{C^s} \leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)} \varepsilon^{m+\tau+1-s} \qquad 0 < s \leq m+\tau+1\,,$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$*.*

Per gli enunciati relativi ai sistemi quasi-integrabili si vedano i corollari 4.2.2 e 4.3.2.

Capitolo 5 - Tori parzialmente iperbolici (caso differenziabile)

Abbiamo visto nei capitoli precedenti l'eccezionalità e la novità dell'utilizzo delle tecniche KAM per la dimostrazione della sopravvivenza dei tori non risonanti di sistemi hamiltoniani, sia nel caso analitico che in quello differenziabile. In questo capitolo vogliamo spostare la nostra attenzione sul destino dei tori risonanti parzialmente iperbolici, che svolgono un ruolo di cruciale importanza nello studio della cosiddetta *diffusione di Arnol'd*. Questi particolari tori furono inizialmente studiati da Poincaré; fu Arnol'd in [5] a denominare tali tori *whiskered* (cioè *coi baffi*) e ad utilizzarli nel suo famoso esempio di un fenomeno di diffusione, che oggi porta il suo nome.
Risultati di tipo KAM relativi alla sopravvivenza dei tori parzialmente iperbolici, per effetto di piccole perturbazioni del sistema, sono stati ottenuti e ampiamente discussi in [35] e [71], dove vengono analizzate hamiltoniane analitiche. In questo nostro lavoro vogliamo invece soffermare la nostra attenzione su hamiltoniane sufficientemente differenziabili, ma non necessariamente analitiche. Il metodo che seguiremo consisterà nel combinare una versione del teorema KAM (caso differenziabile standard e isoenergetico), con degli schemi propri della teoria delle *varietà normalmente iperboliche*, sviluppata da Fenichel (cfr. [28] e [69]), e dimostreremo dei risultati di conservazione per i tori parzialmente iperbolici differenziabili, sia nel caso standard che nel caso isoenergetico (quest'ultimo risultato è nuovo).
Entriamo nei dettagli del metodo che seguiremo. Considereremo una hamiltoniana della forma:

$$H_0(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I)$$

con

$$\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\
y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\
I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\
\varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k
\end{aligned}$$

dove U è un insieme aperto di $\mathbb{R}^k$ ed A una matrice definita positiva.
Mostreremo che tale hamiltoniana possiede una varietà invariante $2k$-dimensionale:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, I, \varphi) : \ x = y = 0\,,\ I \in U\,,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\}\,,$$

consistente in una famiglia k-parametrica di tori k-dimensionali, cioè:

$$\mathbb{M} = \bigcup_{I \in U} \mathbb{T}(I)\,,$$

dove

$$\mathbb{T}(I) \equiv \{(0, 0, I, \varphi)\,, \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\}.$$

Inoltre, $\mathbb{M}$ possiede delle varietà stabili e instabili $(2k + l)$-dimensionali, date rispettivamente da:

$$\begin{aligned}
W^s(\mathbb{M}) &\equiv \{(0, y, I, \varphi) : \ y \in \mathbb{R}^l,\ I \in \mathbb{R}^k,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{x = 0\} \\
W^u(\mathbb{M}) &\equiv \{(x, 0, I, \varphi) : \ x \in \mathbb{R}^l,\ I \in \mathbb{R}^k,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{y = 0\}\,.
\end{aligned}$$

Più precisamente, $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ sono anch'esse delle varietà invarianti contenenti $\mathbb{M}$ (in particolare $W^s(\mathbb{M}) \cap W^u(\mathbb{M}) = \mathbb{M}$) e costituite da traiettorie che le si avvicinano asintoticamente per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$ rispettivamente. Ancora più precisamente, a ciascun toro k-dimensionale in $\mathbb{M}$

$$\mathbb{T}(I_0) = \{(0, 0, I_0, \varphi)\,, \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\},$$

possiamo associare delle varietà $(k+l)$-dimensionali, dette rispettivamente *baffi stabili* e *baffi instabili*:

$$\begin{aligned}
W^s(I_0) &\equiv \{(0, y, I_0, \varphi) : \ y \in \mathbb{R}^l,\ I \in \mathbb{R}^k,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{x = 0,\ I = I_0\} \\
W^u(I_0) &\equiv \{(x, 0, I_0, \varphi) : \ x \in \mathbb{R}^l,\ I \in \mathbb{R}^k,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{y = 0,\ I = I_0\}\,,
\end{aligned}$$

che costituiscono una foliazione di $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ e sono tali che:

$$W^s(I_0) \cap W^u(I_0) = \mathbb{T}(I_0)\,.$$

Quello che vorremmo mostrare è il seguente risultato (che in seguito enunceremo in una formulazione più quantitativa):

Sia $I_0 \in U$ tale che $\omega(I_0)$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino. Allora, sotto opportune ipotesi di non degenerazione per h, il toro invariante $\mathbb{T}(I_0)$ per la hamiltoniana H_0, con r sufficientemente grande, sopravvive insieme ai suoi baffi stabili e instabili, ad una perturbazione sufficientemente piccola e regolare del sistema.

Lo schema che useremo per dimostrare tale risultato è il seguente:

1. Mostreremo innanzitutto la conservazione (locale) di $W^u(\mathbb{M})$, cioè l'esistenza di una varietà che denoteremo con $W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})$, C^{r-1} - diffeomorfa a $W^u(\mathbb{M})$. Per far questo utilizzeremo delle tecniche proprie della teoria geometrica dei sistemi dinamici, rifacendoci a quanto sviluppato da Fenichel per le *varietà normalmente iperboliche*. Descriviamo più dettagliatamente il procedimento che seguiremo:

   - Considereremo un *intorno* N_λ della nostra varietà (costruito in maniera opportuna a partire dalla dinamica del sistema) e prenderemo in esame lo spazio delle sue *sezioni*, cioè applicazioni definite su $W^u(\mathbb{M})$ a valori in N_λ.

   - Rifacendoci ad un idea già usata da Hadamard (per dimostrare l'esistenza delle varietà stabile e instabile associate ad un punto fisso di un diffeomorfismo), definiremo una *trasformazione grafico* da un *sottospazio* dello spazio delle sezioni in se stesso; faremo vedere che tale applicazione è una contrazione e dedurremo l'esistenza di un punto fisso. Per come abbiamo definito la *trasformazione grafico*, i suoi punti fissi coincideranno con delle varietà *lipschitziane* invarianti (localmente) rispetto al flusso perturbato.

   - Il passo successivo sarà dimostrare la regolarità di tale varietà: dimostreremo che è più che lipschitziana; faremo vedere infatti che è C^{r-1}. Per far ciò, utilizzeremo un procedimento iterativo:

     a) Innazitutto faremo vedere che è C^1: ricaveremo un'equazione *formale* che la funzione deve soddisfare per essere C^1 ed utilizzando un procedimento iterativo mostreremo che una soluzione di tale equazione esiste e coincide proprio con la derivata della nostra funzione.

     b) Iterando lo schema arriveremo a dimostrare che è C^{r-1}.

2. In maniera analoga si dimostra la conservazione (locale) della varietà $W^s(\mathbb{M})$: infatti basta osservare che attraverso un'inversione temporale, tale varietà diventa proprio la varietà instabile del sistema così ottenuto.

3. Utilizzando tali risultati mostreremo la conservazione (sempre locale) della varietà $\mathbb{M}$, cioè l'esistenza di una varietà $\mathbb{M}_\varepsilon$, C^{r-1}-diffeomorfa ad $\mathbb{M}$ e

localmente invariante per il flusso perturbato.
I risultati fin qui dimostrati possono essere così riassunti:

Teorema 7. *Sia* $n = l + k \geq 2$ *(con* $k \geq 1$ *e* $l \geq 1$*),* $r \in \mathbb{N}$ *con* $r \geq 3$*,* $\rho_1,\ \rho_2 > 0$*.*
Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ *della forma:*

$$H_0(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I)$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k \end{aligned}$$

con U *aperto di* $\mathbb{R}^k$*.*

Assumiamo, inoltre, che valgano le seguenti proprietà:

(a) A *è una matrice definita positiva;*

(b) $|h|_{C^r} \leq M$ *.*

Allora esistono

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(l, k, M, A, r, \rho_1, \rho_2) \qquad e \qquad C = C(l, A, k, M, r, \rho_1, \rho_2)$$

tali che valga quanto segue. Se consideriamo una perturbazione hamiltoniana del nostro sistema

$$\begin{aligned} H(x, y, I, \varphi) &= H_0(x, y, I, \varphi) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi) = \\ &= x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi) \end{aligned}$$

con

$$H_1 \in C^r(B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_2}(I_0) \times \mathbb{T}^k)$$

tale che $B_{\rho_2}(I_0) \subset U$ *e* $\varepsilon \leq \varepsilon^*$*, allora le varietà* $\mathbb{M}$*,* $W^u(\mathbb{M})$ *e* $W^s(\mathbb{M})$ *sopravvivono localmente a tale perturbazione; in particolare:*

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_\varepsilon &= \left\{ x = \tilde{w}(I, \varphi),\ y = \tilde{u}(I, \varphi) : \quad I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \right\} \\ W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) &= \left\{ y = u(x, I, \varphi) : \quad x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \right\} \\ W^{s,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) &= \left\{ x = w(y, I, \varphi) : \quad y \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \right\}, \end{aligned}$$

con $\tilde{u}$*,* $\tilde{w}$*,* u *e* w *funzioni* C^{r-1} *nel loro dominio di definizione tali che*

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|,\ |\tilde{w}|,\ |u|,\ |w| &\leq \varepsilon \\ |D\tilde{u}|,\ |D\tilde{w}|,\ |Du|,\ |Dw| &\leq C\varepsilon\,. \end{aligned}$$

4. Restringeremo il sistema hamiltoniano a tale varietà $\mathbb{M}_\varepsilon$: dimostreremo innanzitutto un lemma tecnico che ci permetterà di concludere che il sistema così ottenuto è ancora hamiltoniano e che la sua hamiltoniana coincide proprio con l'hamiltoniana ristretta ad $\mathbb{M}_\varepsilon$. Otterremo quindi un sistema hamiltoniano (dipendente solo dalle I e dalle φ) quasi-integrabile, a cui sarà possibile applicare i risultati discussi nei capitoli 3 e 4, deducendo la conservazione dei tori parzialmente iperbolici sia nel caso standard che nel caso isoenergetico. Per quanto riguarda la conservazione dei loro *baffi*, questa è conseguenza della conservazione di $W^u(\mathbb{M})$ e $W^s(\mathbb{M})$.
   In particolare dimostreremo i seguenti due risultati:

   Teorema 8. (Conservazione tori parzialmente iperbolici, caso differenziabile)
   Sia $n = l + k \geq 2$ (con $k \geq 1$ e $l \geq 1$), $\tau > k - 1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $r > 2\tau + m + 3$ (con $r \in \mathbb{N}$), $M \geq 1$, $\rho_1, \rho_2 > 0$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ un vettore (γ, τ)-diofantino, cioè

$$|\omega_0 \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\,.$$

   Sia inoltre $U \subset \mathbb{R}^k$ un dominio aperto contenente $B_{\rho_2}(I_0)$.
   Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ della forma:

$$H(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi)$$

   dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k\,. \end{aligned}$$

   Assumiamo, inoltre, che:

   (a) A sia una matrice definita positiva;

   (b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial I}(I_0) = \omega_0 \\ |h|_{C^r} \leq M \\ \left| \left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I_0) \right)^{-1} \right| \leq M\,. \end{cases}$$

   Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0\,,$$

in modo che se

$$\tilde{c}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}$$

e per qualche $\delta \leq \delta^*$ si ha

$$|\varepsilon H_1|_{C^s} \leq M\delta^{r-s} \qquad \text{per ogni } \; 0 \leq s \leq r\,,$$

allora esiste una soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H,

$$\begin{cases} I = \hat{I}(\xi) + I_0 \\ \varphi = \hat{\varphi}(\xi) \\ x = \hat{x}(\xi) = u(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ y = \hat{y}(\xi) = v(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi))\,, \end{cases}$$

dove

$$u,\ v \in C^{r-1}(B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k)\,,$$

tale che:

(a)

$$\begin{cases} D_{\omega_0}\hat{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial I}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ \\ D_{\omega_0}\hat{I} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi))\,; \end{cases}$$

b) $\hat{\varphi}(\xi) - \xi$ *e* $\hat{I}(\xi)$ *sono periodiche con periodo* 1 *;*

c) $\hat{\varphi} \in C^s(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ *e* $\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1} + I_0 \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^k, B_{\rho_2}(I_0))$ *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$.
Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\hat{\varphi} - \mathrm{id}\,|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+1-s} & 0 < s \leq m+1\,, \\ |\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1}|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+\tau+1-s} & 0 < s \leq m+\tau+1\,, \end{cases}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$.

d) u *e* v *soddisfano le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} |u|,\ |w| &\leq \varepsilon \\ |Du|,\ |Dw| &\leq \tilde{c}\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Teorema 9. (Conservazione tori parzialmente iperbolici, caso differenziabile - isoenergetico)
Sia $n = l + k \geq 2$ *(con* $k \geq 1$ *e* $l \geq 1$*),* $\tau > k - 1$, $\gamma > 0$, $m > 0$,

$r > 2\tau + m + 3$ (con $r \in \mathbb{N}$), $M \geq 1$, ρ_1, $\rho_2 > 0$, $E \in \mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ un vettore (γ, τ)-diofantino, cioè

$$|\omega_0 \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\,,$$

tale che $|\omega_0| \leq M$. Sia inoltre $U \subset \mathbb{R}^k$ un dominio aperto contenente $B_{\rho_2}(I_0)$.
Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ della forma:

$$H(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi)$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k\,. \end{aligned}$$

Assumiamo, inoltre, che:

(a) A sia una matrice definita positiva;

(b)

$$\begin{cases} h(I_0) = E \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I_0) = \omega_0 \\ |h|_{C^r} \leq M \\ \left|(\mathcal{A}(I_0))^{-1}\right| \leq M\,, \end{cases}$$

dove

$$\mathcal{A}(I) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I) & -\left(\dfrac{\partial h}{\partial I}(I)\right)^T \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0\,,$$

in modo che se

$$\tilde{c}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}$$

e per qualche $\delta \leq \delta^*$ si ha

$$|\varepsilon\, H_1|_{C^s} \leq M\delta^{r-s} \qquad \text{per ogni } \ 0 \leq s \leq r\,,$$

allora esiste una soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H,

$$\begin{cases} I = \hat{I}(\xi) + I_0 \\ \varphi = \hat{\varphi}(\xi) \\ x = \hat{x}(\xi) = u(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ y = \hat{y}(\xi) = v(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \,, \end{cases}$$

dove

$$u,\ v\ \in C^{r-1}(B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k) \,,$$

tale che:

(a)

$$\begin{cases} D_{(1+\theta)\omega_0}\hat{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial I}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ \\ D_{(1+\theta)\omega_0}\hat{I} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \,, \end{cases}$$

con $|\theta| \leq 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}$ *(per un'opportuna costante* $\tilde{c}_2$*).*

b) $\hat{\varphi}(\xi) - \xi$ *e* $\hat{I}(\xi)$ *sono periodiche con periodo* 1 *;*

c) $H(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) = E$*, per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^k$*.*

d) $\hat{\varphi} \in C^s(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ *e* $\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1} + I_0 \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^k, B_{\rho_2}(I_0))$ *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*.*
Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\hat{\varphi} - \mathrm{id}\,|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+1-s} & 0 < s \leq m+1 \,, \\ |\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1}|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+\tau+1-s} & 0 < s \leq m+\tau+1 \,, \end{cases}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$ *.*

e) u *e* v *soddisfano le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} |u|,\ |w| \quad &\leq \quad \varepsilon \\ |Du|,\ |Dw| \quad &\leq \quad \tilde{c}\varepsilon \,. \end{aligned}$$

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che - in un modo o nell'altro - hanno contribuito alla realizzazione di questa tesi di Laurea. Un ringraziamento particolare va alla mia famiglia, per avermi sempre sostenuto nelle mie scelte; al mio relatore il prof. Luigi Chierchia per moltissimi buoni motivi che vanno oltre questo lavoro; al prof. Ugo Bessi per la costante disponibilità e pazienza dimostrata; ed infine, "*last but not the least*", al dott. Luca Biasco per l'insostituibile e impagabile aiuto mostrato nella fase di revisione di questa tesi.

Capitolo 1

Introduzione alla teoria KAM

> *"Speaking quite intuitively, we are familiar with systems with very unstable, even ergodic, behavior, as demanded by statistical mechanics. On the other hand, there are other systems exhibiting clearly stable behavior, as, for example, the planetary motion of the solar system. The problem is to decide which systems have stable and which unstable behavior."*
>
> [Moser, [49]]

Così Moser spiegava il vasto panorama di ricerca sulla stabilità dei sistemi hamiltoniani: l'interesse principale è studiare sistemi sufficientemente vicini a sistemi cosiddetti *integrabili* - sistemi di cui si conosce un numero sufficiente di integrali primi tale da renderne triviale lo studio e di conseguenza evidente la stabilità - e cercare di dedurre le proprietà fondamentali del loro comportamento utilizzando le conoscenze che abbiamo su questi ultimi. Quello che ci si potrebbe aspettare è che piccole perturbazioni di questi sistemi non possano alterarne troppo il comportamento stabile, a differenza di eccessive variazioni che potrebbero portare addirittura ad una degenerazione, se non ad una perdita della stabilità. Purtroppo questo è vero soltanto in parte: infatti, si può dimostrare che per piccole perturbazioni e sotto ipotesi di *non degenerazione* del sistema, *buona parte della stabilità viene preservata* (in un senso che chiariremo meglio in seguito); ciò nonostante, non possono escludersi fenomeni di instabilità dovuti alla distruzione delle orbite risonanti del sistema imperturbato.

Nei prossimi paragrafi cercheremo di comprendere meglio e discutere in maniera più quantitativa queste idee, seguendo le linee guida tracciate nei lavori di Kolmogorov, Arnol'd e Moser (da cui l'acronimo KAM) ed i successivi sviluppi in vari ambiti di ricerca.

1.1 Flussi lineari su tori

Una componente fondamentale dell'analisi svolta nei prossimi paragrafi è rappresentata dai moti lineari su un toro n-dimensionale; è per questo motivo che cominceremo il nostro lavoro con una breve discussione di tali moti.

Definizione 1.1.1. Un toro standard n-dimensionale è una varietà differenziabile $\mathbb{T}^n$ data dal prodotto cartesiano di n copie della circonferenza

$$S^1 \equiv \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} .$$

Un elemento $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$ è quindi una classe di equivalenza

$$\bar{x} = x + \mathbb{Z}^n = \{x + k\,,\ k \in \mathbb{Z}^n\} .$$

E' facile mostrare che $\mathbb{T}^n$ è una varietà differenziabile n-dimensionale (compatta, per il teorema di Tychonov). Infatti, come prima cosa si osserva che S^1 lo è: comunemente si usa l'atlante formato dalla coordinata angolare

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & e^{2\pi i x} \end{array}$$

con le carte $U_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $U_2 = (0, 1)$. Una volta dimostrato ciò, basta applicare la seguente proposizione (per la cui dimostrazione rimandiamo a [62]):

Proposizione. *Se X e Y sono varietà differenziabili, con $\dim(X) = n$ e $\dim(Y) = m$, allora il loro prodotto cartesiano $X \times Y$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n + m$.*

Osserviamo che in realtà tale varietà è più che differenziabile: possiede infatti una struttura analitica.

Osserviamo che è possibile introdurre una metrica su tale toro così definita:

$$\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{T}^n \qquad d(\bar{x}, \bar{y}) := \inf_{k \in \mathbb{Z}^n} |x - y + k|$$

dove $x \in \bar{x}$ e $y \in \bar{y}$ sono due rappresentanti di tali classi di equivalenza; è immediato verificare che si tratta di una metrica e che è ben definita, nel senso che è indipendente dalla scelta dei rappresentanti della classe.

Consideriamo ora il seguente moto lineare su $\mathbb{T}^n$:

$$\overline{x(t)} = \overline{x}_0 + \overline{\omega t}$$

cioè

$$x(t) = x_0 + \omega t \qquad (\text{mod. } 1)$$

con $\overline{x_0} \in \mathbb{T}^n$ e $\omega \in \mathbb{R}^n$ (*frequenza del moto*). Il risultato che dimostreremo ci permetterà di descrivere qualitativamente l'orbita descritta da tale moto a partire da alcune condizione di non risonanza della sua frequenza.

Osservazione. D'ora in poi, allo scopo di alleggerire la notazione, indicheremo i punti di $\mathbb{T}^n$ semplicemente attraverso un rappresentante della classe d'equivalenza, tenendo ben a mente la relazione d'equivalenza alla base di tale struttura (i.e. (mod. 1)).

Definizione 1.1.2. Si dice modulo di risonanza M_ω del vettore di frequenze ω il sottoinsieme di $\mathbb{Z}^n$ (evidentemente è un *sottomodulo*[1] di $\mathbb{Z}^n$) dato da

$$M_\omega = \{k \in \mathbb{Z}^n : \quad k \cdot \omega = 0\}.$$

La dimensione del modulo di risonanza M_ω (con $0 \leq \dim M_\omega \leq n$) rappresenta il numero di relazioni di risonanza $k \cdot \omega = 0$ indipendenti verificate da ω e viene anche detta *molteplicità della risonanza*; in particolare

(i) il caso $\dim M_\omega = n$ è possibile solamente se $\omega = (0, \ldots, 0)$, nel qual caso non vi è alcun moto, cioè tutti i punti del toro sono fissi;

(ii) se $\dim M_\omega = 0$, allora $M_\omega = \{(0, \ldots, 0)\}$ e la frequenza ω è detta *non risonante* (o anche *razionalmente indipendente*);

(iii) se $\dim M_\omega = n-1$, allora la frequenza ω è detta *completamente risonante.*

Vediamo ora come queste proprietà puramente aritmetiche della frequenza ω siano in realtà collegate con la natura topologica dell'orbita descritta dal moto.

Teorema 1.1.3. *Sia M_ω il modulo di risonanza associato al vettore di frequenze ω del moto; se $m = \dim M_\omega$, allora l'orbita è densa su un toro di dimensione $n - m$ immerso in $\mathbb{T}^n$.*

Dimostrazione. Vedi Appendice A. □

Segue immediatamente il seguente corollario:

Corollario 1.1.4. *Sia M_ω il modulo di risonanza associato al vettore di frequenze ω dei moti e sia $m = \dim M_\omega$; allora:*

---

[1] Per *A-Modulo* (dove A è un anello commutativo unitario) intendiamo un gruppo abeliano additivo M, dotato di un operazione di *moltiplicazione per uno scalare* con elementi di A, cioè esiste un'applicazione

$$\cdot : A \times M \longrightarrow M$$

tale da soddisfare le seguenti proprietà:

i) $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m' \qquad \forall\, r \in A$ e $m, m' \in M$,

ii) $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m \qquad \forall\, r, r' \in A$ e $m \in M$,

iii) $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m) \qquad \forall\, r, r' \in A$ e $m \in M$,

iv) $1_A \cdot m = m \qquad \forall\, m \in M$.

Chiaramente $\mathbb{Z}^n$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo.
[R.Y. Sharp, "*Steps in commutative algebra*", London Mathematical society 1990]

1. *l'orbita è periodica se e solo se* $m = n - 1$ *(risonanza completa);*
2. *se* $m = 0$ *l'orbita è densa su tutto il toro* $\mathbb{T}^n$*;*
3. *se* $1 \leq m \leq n-1$ *l'orbita è densa su un toro di dimensione* $n-m$ *immerso in* $\mathbb{T}^n$.

Definizione 1.1.5. I moti corrispondenti ai casi (2) e (3) si dicono *quasi-periodici.*

1.2 Meccanica hamiltoniana

Definizione 1.2.1. Sia $M = M^{2n}$ una varietà regolare di dimensione pari. Una struttura simplettica su M è definita attraverso una 2-forma ω^2, soddisfacente le seguenti proprietà:

i) $d\omega^2 = 0$, i.e. ω^2 è una *forma chiusa*;

ii) ω^2 è *non degenere*, cioè per ogni spazio tangente T_xM si deve avere:

$$\omega^2(\eta, \xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in T_xM \qquad \Longrightarrow \qquad \eta = 0.$$

La coppia (M, ω^2) è detta *varietà simplettica.*

Quello che si può mostrare è che in un intorno sufficientemente piccolo di ciascun punto di M, tale struttura simplettica si può ridurre, con opportune coordinate locali $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, in una forma particolarmente semplice.

Teorema 1.2.2 (Darboux). *Supponiamo che* ω^2 *sia una* 2*-forma non degenere, su una varietà* M *di dimensione* $2n$*. Allora* $d\omega^2 = 0$ *se e solo se in ogni punto* $p \in M$ *ci sono delle coordinate* (U, φ)*, dove*

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \rightarrow p \in U \subset M$$

tali che $\varphi(0) = p$ *e* [2]

$$\varphi^*\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i \, .$$

Per la dimostrazione di tale risultato si rimanda a [6].
Tali coordinate $(x,\, y)$ prendono il nome di *coordinate simplettiche* o *canoniche.*

La forma ω^2 permette di costruire un isomorfismo naturale dallo spazio tangente T_xM nello spazio cotangente T_x^*M, che manda ciascun vettore $\xi \in T_xM$ nella corrispondente 1-forma $\omega_\xi^1 \in T_x^*M$ così definita:

$$\omega_\xi^1(\eta) := \omega^2(\eta, \xi)\, , \qquad \eta \in T_xM\, .$$

[2]Con $\varphi^*\omega^2$ intendiamo il *pull-back* della due-forma ω^2.

Poiché ω^2 è bilineare e non degenere, la mappa

$$\xi \longmapsto \omega^1_\xi$$

è proprio un isomorfismo lineare tra i due spazi.

Sia H una funzione regolare su M (che può eventualmente dipendere dal tempo). Osserviamo che il differenziale dH è una 1-forma (cioè un elemento dello spazio cotangente) e quindi insieme con ω^2 determina un campo vettoriale X_H dato da:

$$(i_{X_H})(x) = \omega^2(X_H(x), \cdot) = -dH(x)$$

con $x \in M$.

Tale campo vettoriale X_H è detto *campo vettoriale hamiltoniano* associato alla hamiltoniana H. Il corrispondente sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = X_H(x)$$

prende il nome di *equazioni di Hamilton*.

Considereremo ora lo spazio simplettico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2)$, dove

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i \,.$$

Consideriamo quindi una hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

a cui possiamo associare un campo vettoriale X_H su $\mathbb{R}^{2n}$ richiedendo:

$$\omega^2(X_H(x), a) = -dH(x)a \tag{1.1}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}^{2n}$. Poiché ω^2 è non degenere, il campo vettoriale X_H è determinato univocamente. Osserviamo inoltre che la condizione (1.1) è equivalente a:

$$(JX_H(x)) \cdot a = -\nabla H(x) \cdot a$$

dove J è la matrice $2n \times 2n$ definita da:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Perciò

$$JX_H(x) = -\nabla H(x)$$

ed utilizzando il fatto che :

$$J^2 = -\mathbb{I}$$

otteniamo la rappresentazione:

$$X_H(x) = J\nabla H(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{2n}\,.$$

Di conseguenza le equazioni di Hamilton, possono essere rappresentate nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dot{y} = \quad \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,. \end{cases}$$

Definizione 1.2.3. Consideriamo una trasformazione differenziabile e invertibile da M in M:

$$g:\ (q,p) \longmapsto (x,y)\,.$$

Diremo che tale trasformazione *conserva la struttura canonica delle equazioni di Hamilton*, se, comunque scelta una hamiltoniana $H = H(q,p)$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi^t_H} & M \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{\Phi^t_{H\circ g^{-1}}} & M \end{array}$$

Una classe molto ampia di trasformazioni che preservano la struttura canonica è individuata dalle trasformazioni simplettiche:

Definizione 1.2.4. Una trasformazione di coordinate

$$(x,y) = g(q,p,t)$$

differenziabile e invertibile si dice *simplettica* se la sua matrice jacobiana ∇G è tale che:

$$J = (\nabla g)J(\nabla g)^T\,.$$

Una matriche che soddisfa tale uguaglianza è detta *simplettica*.

Proposizione 1.2.5. *Le trasformazioni simplettiche preservano la struttura canonica delle equazioni di Hamilton.*

Per la dimostrazione si rimanda a [27].

1.3 Sistemi hamiltoniani integrabili

Consideriamo una varietà simplettica (M, ω^2) con $\dim M = 2n$.

Definizione 1.3.1. Un campo vettoriale hamiltoniano X_H su M è detto *integrabile* se esistono n funzioni

$$F_j : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 1 \leq j \leq n$$

che soddisfano in ogni punto di M le seguenti condizioni:

(i) $\nabla F_1, \ldots, \nabla F_n$ sono linearmente indipendenti;

(ii) $\{F_i, F_j\} = 0$ per ogni $i \neq j$, dove:

$$\{F_i, F_j\} \equiv -\omega^2(X_{F_i}, X_{F_j})$$

(si dice che tali funzioni sono in *involuzione*);

(iii) $\{H, F_j\} = 0$ per ogni j.

Introduciamo la mappa

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))\,;$$

possiamo concludere da (i) che gli insiemi di livello

$$N_c = \{x \in M : \quad F(x) = c\} \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

sono delle sottovarietà n-dimensionali di M.

Si può dimostrare il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [38].

Teorema 1.3.2. (Arnol'd-Jost)
Sia (M, ω^2) una varietà simplettica con $\dim M = 2n$*. Assumiamo che esistano n funzioni F_j tali da soddisfare* (i) *e* (ii) *in ogni punto. Assumiamo, inoltre, che un insieme di livello, ad esempio $N = F^{-1}(0) \subset M$, sia compatto e connesso. Allora:*

1. *N è l'immersione di un toro n dimensionale $\mathbb{T}^n$.*

2. *Esiste un intorno aperto U di N in M, in cui possiamo introdurre delle variabili (x, y) dette* variabili di azione-angolo*, così definite. Siano D_1*

e D_2 due domini di $\mathbb{R}^n$ contenenti l'origine. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ sono le coordinate sul toro $\mathbb{T}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in D_1$, allora esiste un diffeomorfismo

$$\psi : \mathbb{T}^n \times D_1 \longrightarrow U = \bigcup_{c \in D_2} \left(F^{-1}(c) \cap U\right)$$

e un diffeomorfismo $\mu : D_2 \longrightarrow D_1$, con $\mu(0) = 0$, tale che:

$$\psi^* \omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j \equiv \omega_0^2$$
$$\mu \circ F \circ \psi(x, y) = y\,.$$

In particolare, ψ mappa il toro $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ diffeomorficamente in $F^{-1}(0) = N$ ed il toro $\mathbb{T}^n \times \{y\}$ diffeomorficamente in $N_c \cap U$, dove $y = \mu(c)$.

Corollario 1.3.3. *Ogni sistema hamiltoniano integrabile associato alla hamiltoniana H, che soddisfi le ipotesi del teorema precedente, viene trasformato, tramite il diffeomorfismo simplettico ψ, nel seguente sistema hamiltoniano su $(\mathbb{T}^n \times D_1, \omega_0^2)$ definito dalla funzione di Hamilton:*

$$H \circ \psi(x, y) = h(y)\,;$$

tale hamiltoniana dipende solamente dalle variabili di azione *e non dagli* angoli.

Osserviamo che se un sistema è integrabile, si ha che in tali nuove coordinate le equazioni di Hamilton assumono una forma particolarmente semplice:

$$\begin{cases} \dot{y} = -\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \\ \dot{x} = \dfrac{\partial h}{\partial y} \equiv \omega(y)\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Quello su cui vogliamo soffermare ora la nostra attenzione è la geometria delle varietà invarianti di tali sistemi integrabili.

Il sistema (1.2) si integra immediatamente:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 \\ x(t) = x_0 + \omega(y_0)t \equiv x_0 + \omega_0 t \end{cases} \tag{1.3}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo quindi che le *azioni* sono un sistema di n integrali primi del moto indipendenti ed in involuzione (cioè $\{y_i, y_j\} = 0$ per ogni $i \neq j$).

Possiamo concludere quindi, che i moti di un sistema integrabile sono *limitati* e *quasi-periodici*; infatti, visti nello spazio $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, rappresentano delle retta e quindi, tenendo conto dell'identificazione delle coordinate x (mod. 1), non sono altro che delle curve che si avvolgono su un *toro invariante*

$$\mathcal{T}_{y_0} = \mathbb{T}^n \times \{y_0\}$$

con frequenze costanti $\omega_0 = (\omega_{0_1}, \ldots, \omega_{0_n})$. Quindi l'intero spazio delle fasi è foliato in una famiglia ad n parametri di tori invarianti $\mathcal{T}_{y_0}$ - detti *Tori di Kroenecker* - sui quali il flusso hamiltoniano è lineare (*flusso di Kroenecker*) con frequenze costanti ω_0. Questa è la raffigurazione geometrica di un sistema hamiltoniano integrabile. In particolare:

(i) se le frequenze ω_0 sono non risonanti (razionalmente indipendenti), allora il moto è denso sul toro n-dimensionale invariante $\mathcal{T}_{y_0}$;

(ii) se le frequenze ω_0 sono risonanti (razionalmente dipendenti) e il modulo di risonanza $\dim M_{\omega_0} = m$ (con $1 \leq m \leq n-1$), allora il toro invariante $\mathcal{T}_{y_0}$ si decompone in una famiglia con m parametri, di tori invarianti $n-m$ dimensionali; quindi il moto è denso su uno di questi tori di dimensione inferiore (il toro in questione dipenderà dal dato iniziale x_0).

Un caso particolarmente interessante si ha quando $m = n-1$ (cioè le frequenze soddisfano $n-1$ relazioni di risonanza indipendenti); in tal caso $\omega_{0_1}, \ldots, \omega_{0_n}$ sono tutti multipli interi di una fissata frequenza non nulla ω^*. Quindi $\mathcal{T}_{y_0}$ sarà ricoperto da orbite *periodiche* con periodo $\dfrac{1}{\omega^*}$.

Osservazione. E' bene sottolineare che l'introduzione delle variabili d'azione-angolo fa si che le soluzioni siano collegate alle soluzioni "*nel mondo reale*" da una trasformazione che è periodica in $x_1, \ldots, x_n$. Espandendo la trasformazione ψ nella sua serie di Fourier e sostituendo le soluzioni sopra trovate, otteniamo che le soluzioni "reali" (cioè nel mondo fisico) sono rappresentate da una serie della forma:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(y_0) e^{2\pi i (k \cdot x_0) + 2\pi i\, t (k \cdot \omega_0)} \qquad c_k \in \mathbb{R}^{2n}$$

dove $\cdot$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^{2n}$. Quindi ogni soluzione, nel "mondo reale", è ottenuta come sovrapprosizione di diverse oscillazioni, ciascuna con la propria frequenza. Questa idea *aristotelica* che i moti si possano sempre considerare come composti da moti circolari uniformi è un'idea molto antica che si può far risalire addirittura ad Ipparco (da Nicea, 194-120 a.C.) e trae molto probabilmente origine dalla perfezione e dalla semplicità di tale moto (di cui il moto rettilineo può intuitivamente essere considerato come un caso limite). (Cfr. [30])

Vediamo ora di discutere brevemente la relazione esistente fra l'insieme dei tori invarianti di un sistema hamiltoniano integrabile e l'insieme delle frequenze del flusso su tali tori. Consideriamo la mappa delle frequenze

$$\begin{aligned} \omega : D &\longrightarrow \Omega \\ y &\longmapsto \omega(y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y) \end{aligned}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Assumiamo che la nostra hamiltoniana sia *non degenere*, nel senso che

$$\det \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \det \frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$$

su D. Osserviamo che le componenti di $\omega(y) = (\omega_1(y), \ldots, \omega_n(y))$ costituiscono n integrali primi del moto in involuzione; la condizione di non degenerazione è equivalente quindi a richiedere che tali integrali primi siano funzionalmente indipendenti. Con tale ipotesi si ha che $\frac{\partial h}{\partial y}$ è un diffeomorfismo locale tra D e un dominio Ω nello spazio delle frequenze, e quindi vi è un'effettiva dipendenza della frequenza dall'azione y, cioè possiamo - almeno localmente - parametrizzare i tori attraverso le loro frequenze. Ne segue che *i tori risonanti stanno ai tori non risonanti*, così come *i numeri razionali stanno ai numeri irrazionali*; detto più esplicitamente:

- i tori non risonanti formano un insieme di misura piena e denso nello spazio delle fasi;

- i tori risonanti formano un insieme di misura nulla, anch'esso denso nello spazio delle fasi; addirittura l'insieme dei tori risonanti di dimensione fissata (tra 1 e $n-1$) è ancora denso ed in particolare le traiettorie periodiche sono dense nello spazio delle fasi.

Osservazione. La condizione di non degenerazione della hamiltoniana è essenziale per tale conclusione (vedi paragrafo 4.1). Prendiamo ad esempio un sistema lineare in cui la frequenza è costante in tutto lo spazio delle fasi: questo è chiaramente degenere e contraddice i risultati sopra enunciati. Questa geometria particolare dei sistemi integrabili non degeneri è di fondamentale importanza nello studio della stabilità di tali sistemi e delle relative perturbazioni, come vedremo meglio in seguito.

1.4 Sistemi hamiltoniani quasi-integrabili

La questione centrale che ora andremo a considerare è lo studio dei sistemi la cui hamiltoniana è una "piccola" perturbazione della hamiltoniana di un sistema integrabile. Secondo Poincaré è questo *"il problema fondamentale della meccanica classica"* (Poincaré H., [52]).

Definizione 1.4.1. Un sistema hamiltoniano si dice *quasi-integrabile* se la sua hamiltoniana è della forma

$$H(q,p,\varepsilon) = H_0(q,p) + \varepsilon F(q,p)$$

dove (q,p) sono definite in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ è un piccolo parametro e H_0 è la hamiltoniana di un sistema integrabile con superfici di livello compatte e connesse.[3]

Osservazione. Poiché il sistema di hamiltoniana H_0 è integrabile, esiste una trasformazione simplettica dalle variabili (q,p) a nuove variabili (x,y) di azione-angolo, nelle quali la hamiltoniana H_0 si esprime mediante una funzione h_0 che dipende unicamente dalle variabili d'azione. Quindi possiamo assumere, qui e in seguito, che la nostra hamiltoniana sia della forma

$$h(x,y,\varepsilon) = h_0(y) + \varepsilon f(x,y)$$

con $(x,y) \in \mathbb{T}^n \times \Omega$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Assumeremo inoltre che le funzioni h, h_0 e f siano analitiche (o sufficientemente differenziabili, come discuteremo meglio nei capitoli successivi) in ciascuno dei loro argomenti (discuteremo in seguito il perchè di tale assunzione e analizzeremo dettagliatamente nei capitoli successivi, come sia possibile estendere tali risultati al caso differenziabile).

Quello che cercheremo di studiare ora è il "destino" dei tori invarianti del sistema imperturbato, in seguito alla perturbazione, cioè come varia la *geometria* del sistema per effetto dei termini perturbativi. Quello che ci si aspetta è che alcuni di questi tori persistano mentre altri vengano distrutti generando fenomeni interessanti quali ad esempio *fenomeni di diffusione*.

Un primo risultato in tale direzione è dovuto a Poincaré, ma è tutt'altro che di buon auspicio: egli infatti osservò che perturbazioni, seppure arbitrariamente piccole, in generale comportino la *distruzione* di alcuni dei tori risonanti. In particolare, egli dimostrò che nel caso di un toro invariante foliato da una famiglia ad $n-1$ parametri di orbite periodiche (i.e. tori invarianti di dimensione 1), generalmente solo una quantità finita di orbite sopravvive, mentre le altre

[3] Osserviamo che l'ipotesi di compattezza delle superfici di livello è fondamentale. Consideriamo infatti un sistema di particelle libere, con hamiltoniana:

$$H(p,q) = \frac{1}{2}|p|^2 .$$

Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 & \Longrightarrow \quad p = p_0 \\ \dot{q} = p & \Longrightarrow \quad q = q_0 + p_0 t . \end{cases}$$

Questo sistema non verifica le ipotesi del teorema di Arnol'd-Jost perchè, pur avendo n integrali indipendenti ed in involuzione dati dalle coordinate $F_i = p_i$, gli insiemi di livello non sono compatti.

si *disintegrano*. Quindi, nel caso di sistemi hamiltoniani non degeneri, esiste addirittura un insieme denso di tori che viene distrutto... sembrerebbe quindi non esserci alcuna speranza che gli altri tori sopravvivano. Nel 1954, invece, Kolmogorov provò che in realtà la maggioranza dei tori non risonanti - quelli corrispondenti a frequenze *fortemente non risonanti*, nel senso che poi chiariremo - si conserva, subendo soltanto una leggera *deformazione* dovuta alla perturbazione. Possiamo enunciare - in maniera qualitativa - il teorema di Kolmogorov nel seguente modo:

Teorema 1.4.2 (Kolmogorov). *Se un sistema hamiltoniano integrabile è non degenere, allora per una perturbazione hamiltoniana conservativa sufficientemente piccola, la maggioranza dei tori invarianti non risonanti non viene distrutta, ma si deforma leggermente. In altre parole, nello spazio delle fasi del sistema perturbato continuano ad esistere dei tori invarianti su cui sono ovunque dense le orbite con numero di frequenze razionalmente indipendenti pari al numero di gradi di libertà del sistema. I tori invarianti indicati sono la maggioranza, nel senso che la misura del complementare della loro unione è piccola insieme alla perturbazione.*

Nei prossimi capitoli affronteremo e dimostreremo in maniera analitica tale risultato.

Prima di andare avanti, cerchiamo di chiarire meglio e approfondire alcuni concetti sopra enunciati.

Innanzitutto spieghiamo meglio cosa significa che tali tori invarianti vengono leggermente deformati.

Definizione 1.4.3. Sia $\varepsilon_0 > 0$ fissato. Una famiglia a un parametro

$$\{\mathcal{T}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$$

di sottovarietà n-dimensionali di $\mathbb{R}^{2n}$ è una *deformazione analitica* di un toro $\mathcal{T}_0 = \mathbb{T}^n \times \{y_0\}$, se per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ si ha che $\mathcal{T}_\varepsilon$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} y = y_0 + \varepsilon A(\theta, \varepsilon) \\ x = \theta + \varepsilon B(\theta, \varepsilon) \quad (\text{mod. } 1)\,, \end{cases} \tag{1.4}$$

dove $\theta \in \mathbb{T}^n$, mentre A e B sono due funzioni analitiche $\mathbb{T}^n \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$.

Si noti che per $\varepsilon = 0$ si ritrovano le equazioni parametriche del toro $\mathcal{T}_0$.

Definizione 1.4.4. Consideriamo una hamiltoniana *quasi-integrabile*

$$h(x, y, \varepsilon) = h_0(y) + \varepsilon f(x, y)$$

con $(x, y) \in \mathbb{T}^n \times \Omega$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$.
Una deformazione $\{\mathcal{T}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$ di $\mathcal{T}_0$ è una *deformazione* di $\mathcal{T}_0$ in tori invarianti

per il sistema quasi integrabile, se, fissato $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, comunque si scelga $\theta_0 \in \mathbb{T}^n$ il flusso hamiltoniano $(x(t,\theta_0),\, y(t,\theta_0))$ si ottiene dalle (1.4) ponendo $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$ (dove $\omega_0 \equiv \dfrac{\partial h}{\partial y}(y_0)$):

$$\begin{cases} y(t,\theta_0) = y_0 + \varepsilon A(\theta_0 + \omega_0 t,\, \varepsilon) \\ x(t,\theta_0) = \theta_0 + \omega_0 t + \varepsilon B(\theta_0 + \omega_0 t, \varepsilon) \end{cases}$$

e quindi $(x(t,\theta_0),\, y(t,\theta_0))$ appartiene a $\mathcal{T}_\varepsilon$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione. I moti su $\mathcal{T}_\varepsilon$ sono quasi-periodici con lo stesso vettore di frequenze ω_0 dei moti su $\mathcal{T}_0$.

Analizziamo ora, invece, un fatto cruciale nella dimostrazione del teorema di Kolmogorov, cioè l'esistenza di *frequenze fortemente non risonanti* che corrispondono ai tori conservati dalla perturbazione. Tali frequenze sono dette *diofantine* .

Definizione 1.4.5. *Un vettore $\omega \in \mathbb{R}^n$ si dice* (γ, τ)-diofantino *se*

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

dove $|k| = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|$.

Tale condizione è anche detta *condizione di diofantinità.*

La domanda naturale che viene da porsi è: esistono dei vettori interi che soddisfano tale condizione? La risposta è affermativa e si verificano facilmente i seguenti risultati (per la cui dimostrazione rimandiamo all' Appendice B):

Proposizione 1.4.6. *Se $\tau > n-1$ l'insieme dei vettori diofantini*

$$\mathcal{D}_\tau \equiv \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{D}_{\gamma,\tau} \equiv \bigcup_{\gamma>0} \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n : \quad |\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}\ \forall\, k \neq 0 \right\}$$

ha misura piena, cioè il suo complementare ha misura nulla.

In altre parole, per $\tau > n-1$ quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}^n$ appartiene a $\mathcal{D}_\tau$.

Osservazione. Per $\tau < n-1$ si dimostra che $\mathcal{D}_\tau = \emptyset$ (vedi Appendice B). Invece se $\tau = n-1$, l'insieme $\mathcal{D}_{n-1}$ ha misura nulla ma non è vuoto; infatti si può dimostrare che ha misura di Hausdorff n: quindi esiste un insieme con la cardinalità del continuo di frequenze diofantine di esponente $n-1$, ma di misura nulla (vedi [59]).

Osservazione. Nonostante le frequenze diofantine con $\tau > n-1$ fissato formino un insieme di misura piena, non è vero che *quasi tutti* i tori invarianti sopravvivono simultaneamente alla perturbazione, per quanto questa possa essere piccola. Infatti, nella dimostrazione del teorema di Kolmogorov si vede come il parametro γ, nella condizione di non risonanza, limiti la taglia della perturbazione con la condizione

$$\varepsilon \ll \gamma^2 .$$

Quindi, per effetto di un fattore perturbativo di taglia ε, si conserveranno solo i tori invarianti con frequenze (γ, τ)-diofantine, con $\tau > n - 1$ e

$$\gamma \gg \sqrt{\varepsilon} .$$

Si dimostra che l'insieme $\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ (cioè l'insieme dei vettori (γ, τ)-diofantini), è un *insieme di Cantor* - cioè chiuso, perfetto e denso - e che la misura del suo complementare è dell'ordine di $\sqrt{\varepsilon}$. Quindi leggendo questo risultato nello spazio delle fasi, possiamo dedurre l'esistenza di un sottoinsieme delle azioni

$$\Omega_\gamma \subset \Omega$$

cui corrispondono tori invarianti per il sistema imperturbato - con frequenze appartenenti a $\mathcal{D}_{\gamma,\tau}$ - la cui sopravvivenza viene garantita dal teorema KAM. Tale insieme è ancora un insieme di Cantor e la sua misura di Lebesgue sarà abbastanza grande, in relazione alla piccolezza della perturbazione, cioè:

$$|\Omega \setminus \Omega_\gamma| = O(\gamma) = O(\sqrt{\varepsilon}) .$$

Osserviamo però, che nonostante la misura sia relativamente grande si tratta pur sempre di un insieme di Cantor, quindi con interno vuoto; questo rende impossibile dire con assoluta precisione se un dato iniziale si trova su un toro invariante oppure in un *gap* creatosi tra tali tori. Il teorema KAM ci fornisce piuttosto una risposta *metrica* (da un certo punto di vista quasi *probabilistica*) del problema: scegliendo in maniera casuale un dato iniziale, la probabilità che la sua evoluzione sia *eternamente stabile* (cioè l'orbita corrispondente giaccia su un toro invariante) è $1 - O(\sqrt{\varepsilon})$. Osserviamo che quando $\varepsilon \to 0$, tale probabilità tende a 1, confermando quanto discusso nel paragrafo precedente a proposito dei sistemi integrabili.

1.5 Stabilità ed instabilità dei sistemi quasi-integrabili

Abbiamo discusso nel paragrafo precedente come la presenza di tori invarianti nello spazio delle fasi del sistema perturbato significhi che, per la maggior parte delle condizioni iniziali, il moto di un sistema vicino a quello integrabile resta quasi periodico, con un numero massimo di frequenze razionalmente indipendenti (cioè corrisponde ad un toro invariante non risonante). Viene spontaneo domandarsi che cosa accade per le condizioni iniziali che si trovano nei *gaps* formatisi tra i tori invarianti in seguito alla distruzione dei tori risonanti (per il sistema imperturbato). Sebbene nella dimostrazione del teorema KAM non vi sia alcuna differenza essenziale tra i sistemi a due gradi di libertà e sistemi ad un grado maggiore ($n \geq 3$), il comportamento del flusso in tali gaps dello spazio delle fasi è qualitativamente diverso. Consideriamo il caso di un sistema hamiltoniano *isoenergeticamente non degenere* (vedi paragrafo 4.1): in tal caso la conservazione di tali tori invarianti è garantita su ciascun livello energetico (vedi Capitolo 4).

- Nel caso $n = 2$ la presenza di una numerosa famiglia di tori invarianti implica che per tutti (e non soltanto la maggioranza) dei dati iniziali, i valori delle variabili d'azione rimangono eternamente in un intorno dei valori iniziali. Infatti in tal caso lo spazio delle fasi ha dimensione 4, e di conseguenza ciascun livello energetico avrà dimensione 3 e sarà fibrato (in gran parte) da tori invarianti 2-dimensionali, che possiamo immaginare - nello spazio tridimensionale - come una famiglia di tori concentrici, immersi l'uno nell'altro. Un'orbita che ha origine in un gap tra tali tori del sistema perturbato è destinata a rimanere per sempre intrappolata in tale spazio. Infatti, le corrispondenti variabili d'azione rimarranno per sempre in un intorno dei loro dati iniziali dell'ordine di $\sqrt{\varepsilon}$ (in quanto la misura del gap e la differenza fra un toro e il toro imperturbato associato (y=cost) sono limitate da quantità di tale ordine di grandezza).

- Se $n \geq 3$ la superficie d'energia ha dimensione $2n - 1$ e i tori invarianti su questa superficie hanno codimensione $n - 1 \geq 2$ - cioè sono disposti in essa come i punti nel piano, o le rette nello spazio - e di conseguenza non vi sono più soltanto regioni invarianti limitate. Questo rende possibile la presenza di dati iniziali la cui evoluzione si allontani *indefinitivamente* dal valore iniziale; infatti i vari gaps - corrispondenti alle varie risonanze - sono "uniti" tra loro e perciò i tori invarianti non impediscono ad un'orbita, il cui dato iniziale è in un intorno della risonanza, di *insinuarsi* tra tali gaps ed allontanarsi dai dati iniziali.

La domanda che ci si pone è la seguente: *Ci sono orbite che traggono vantaggio da questa libertà e fuggono dalla regione di origine? E se così, qual è il tempo necessario per assistere a tale allontanamento?*
Arnol'd costruì un esempio che rispondeva in maniera affermativa alla prima di tali domande. Inoltre, mostrò che il comportamento di tali orbite è *molto caotico*. Il suo esempio riguardava un sistema con 3 gradi di libertà e prendeva in considerazione un toro 2-dimensionale con *baffi*[4] di dimensione 3. L'esempio

[4]Arnol'd denominò in tale maniera molto suggestiva le varietà stabili e instabili del toro (vedi cap. 5), costituite dalle orbite che si avvicinano o si allontanano asintoticamente da esso.

considerato da Arnol'd è il seguente:[5]

$$H(I,\varphi,p,q,t;\varepsilon,\mu) := \frac{I^2}{2} + \frac{p^2}{2} + \varepsilon(\cos q - 1) + \varepsilon\mu f(\varphi,q,t)$$

con $I,p \in \mathbb{R}$, $\varphi,q,t \in \mathbb{T}$ ed ε e μ parametri sufficientemente piccoli. Prendendo

$$f(\varphi,q,t) := (\cos q - 1)(\sin\varphi + \cos t)\,,$$

Arnol'd dimostrò che per valori di μ esponenzialmente piccoli rispetto a $\sqrt{\varepsilon}$, esiste un tempo $t_0 > 0$ tale che $|I(t_0) - I(0)| \geq c > 0$, cioè le variabili d'azione si allontanano dai dati iniziali di una quantità di ordine 1. La tecnica usata in tale dimostrazione è puramente geometrica ed è basata sulla costuzione di *catene di transizione*, cioè sull'esistenza di catene di intersezioni tra le varietà stabili e instabili di tori invarianti distinti.[6] Questa struttura fa da supporto al movimento di orbite dall'intorno di un toro all'intorno di un altro, garantendo così la diffusione.

Prima di entrare maggiormente nei dettagli di tale metodo, sottolineiamo che nel 1996 Bessi ha dimostrato il medesimo risultato di Arnol'd con tecniche variazionali e ciò gli ha consentito in particolare di ottenere stime realistiche sul tempo di diffusione (dell'ordine di $e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$). Tale lavoro traduce le condizioni imposte da Arnol'd nel linguaggio dei funzionali di azione, mostrando come tali ipotesi garantiscano l'esistenza di un minimo relativo per questo funzionale, corrispondente all'orbita di diffusione trovata da Arnol'd (cfr. [10]). Cerchiamo di descrivere brevemente il metodo seguito da Arnol'd. Si osserva innanzitutto che per $\mu = 0$, il sistema hamiltoniano associato ad H ammette una famiglia continua di tori parzialmente iperbolici 2-dimensionali

$$\mathbb{T}(\bar{I}) = \{(\varphi,t) \in \mathbb{T}^2 : \quad I = \bar{I},\ q = p = 0\}$$

che possiedono delle varietà stabili e instabili ("*baffi*") di dimensione 3

$$W_0^s(\bar{I}) = W_0^u(\bar{I}) = \{(\varphi,t) \in \mathbb{T}^2 : \quad I = \bar{I},\ (p^2/2) + \varepsilon(\cos q - 1) = 0\}\,.$$

Il passo successivo è quello di costruire, per $\mu \neq 0$, una catena di transizione, cioè una catena di tori parzialmente iperbolici perturbati $\mathbb{T}^\mu(\bar{I})$ vicini a $\mathbb{T}(\bar{I})$, connessi tra loro da orbite eterocline. Questo è uno dei passi più complicati, che coinvolge due problematiche principali:

[5]La hamiltoniana H può essere scritta in forma *autonoma* (i.e. cioè indipendente dal tempo), introducendo la variabile angolare $\varphi_3 = t$ e la sua azione coniugata I_3 e rinominando $I_1 = I$, $\varphi_1 = \varphi$, $I_2 = p$, $\varphi_2 = q$, ottenendo:

$$H(I,\varphi;\varepsilon,\mu) := \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} + I_3 + \varepsilon(\cos\varphi_2 - 1) + \varepsilon\mu f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\,.$$

[6]In effetti già Poincaré aveva messo in evidenza la possibilità che le *intersezioni eterocline* fossero la sorgente del caos nella dinamica deterministica.

(i) Splitting problem: cioè provare, per valori di $\mu \neq 0$ sufficientemente piccoli, la conservazione dei tori iperbolici $\mathbb{T}^{\mu}(\bar{I})$ e mostrare che le varietà stabili e instabili perturbate subiscono uno "splitting " e si intersecano trasversalmente, cercando di fornire misure esplicite degli "angoli di splitting".

(ii) Costruzione della catena di transizione: i tori perturbati $\mathbb{T}^{\mu}(\bar{I})$ sono separati dai *gaps* che compaiono in seguito alla perturbazione: due di questi tori potrebbero essere troppo distanti tra loro, impedendo l'esistenza di intersezioni eterocline tra $W^s_{\mu}(\bar{I})$ e $W^u_{\mu}(\bar{I})$ (questo è conosciuto come *gap-problem*).[7]

Infine si prova, attraverso uno "*shadowing argument*", l'esistenza di un'orbita di diffusione vicina alla catena di transizione.

Arnol'd congetturò che un aspetto generale dei sistemi dinamici *quasi-integrabili* con più di due gradi di libertà fosse l'instabilità delle variabili d'azione, quella che egli chiamò *instabilità topologica.* Egli formulò la seguente congettura (Cfr. [6]):

Congettura (Arnol'd). *Attraverso un intorno arbitrariamente piccolo di ogni punto, passano traiettorie lungo le quali le* variabili lente *(cioè le variabili di azione) si allontanano dai valori iniziali di una quantità di ordine* 1.

Sottolineiamo che tale fenomeno è un effetto sottile, difficile da quantificare e riconoscere in specifici sistemi fisici: abbiamo accennato infatti (parlando del modello di Arnol'd) che i tempi di diffusione (cioè i tempi necessari affinché tale fenomeno si verifichi) sono esponenzialmente lunghi. Questa è una caratteristica tutt'altro che peculiare del modello di Arnol'd, che può essere generalizzata a tutti i sistemi hamiltoniani che soddisfano delle opportune condizioni di *trasversalità* (dette anche *steepness conditions*)[8]. Tale importantissimo contributo relativo alla *stabilità delle azioni su tempi esponenzialmente lunghi* si deve a Nekhoroshev (vedi [51], [55] e [41]):

Teorema. *Consideriamo una hamiltoniana reale analitica*

$$H(x,y) = h(y) + \varepsilon f(x,y)\,,$$

[7]Nell'esempio di Arnol'd questo problema viene superato grazie alla scelta del fattore perturbativo

$$f(\varphi,q,t) := (\cos q - 1)(\sin\varphi + \cos t)\,,$$

il cui gradiente si annulla sui tori imperturbati $\mathbb{T}(I)$, lasciandoli tutti invarianti anche per $\mu \neq 0$.

[8]Non entreremo nel dettaglio di tali condizioni, rimandando il lettore interessato alla bibliografia sopra menzionata. Osserviamo soltanto che un caso particolare di tali condizioni è rappresentato dalla *convessità* e dalla *quasi-convessità* (cioè la convessità su ciascun insieme di livello) della hamiltoniana h (vedi [55] e [41]).

con la parte integrabile h che soddisfa delle opportune condizioni di trasversalità. *Allora le variabili di azione sono stabili su periodi esponenzialmente lunghi; i.e se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, allora per ogni dato iniziale (x_0, y_0) si ha che:*

$$|y(t) - y_0| \leq R(\varepsilon) = c_1\, \varepsilon^b \qquad \text{per } \ |t| \leq \mathcal{T}(\varepsilon) = c_2 e^{\varepsilon^{-a}}$$

Chiameremo $R(\varepsilon)$ e $\mathcal{T}(\varepsilon)$ rispettivamente *raggio di stabilità* e *tempo di stabilità*, mentre (a, b) sono detti *esponenti di stabilità*: questi dipenderanno dal numero di gradi di libertà n e dal cosiddetto *indice di steepness*, e tenderanno a zero quando n tende all'infinito.

Nel caso di sistemi hamiltoniani convessi o quasi convessi, si ottengono (vedi [55]) le migliore stime per questi *esponenti di stabilità*:

$$a = \frac{1}{2n} \qquad \text{e} \qquad b = a$$

in tutto lo spazio delle fasi; inoltre l'esponente a migliora in un piccolo intorno delle risonanze fino al valore $a = \frac{1}{2}$ in prossimità delle orbite periodiche.

A tal fine vogliamo sottolineare che J. Mather ha recentemente annunciato la soluzione della *Congettura di Arnol'd* sopra menzionata per una classe *generale* di perturbazioni. Riportiamo per maggiore completezza l'abstract di un seminario dal titolo "*Arnol'd diffusion*" tenuto da Mather durante la conferenza "*Dynamishe Systeme* " in Oberwolfach nel luglio 2001:

Consideriamo una piccola perturbazione di un sistema hamiltoniano integrabile con hamiltoniana

$$H_\varepsilon := h(I) + \varepsilon P(\theta, I, t, \varepsilon)$$

dove $I = (I_1, \ldots, I_n) \in B_2^n$ (palla di raggio 2 in $\mathbb{R}^n$), $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$, $t \in \mathbb{T}$ (i.e. il sistema è periodico con periodo 1 rispetto al tempo) e $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ è un parametro sufficientemente piccolo. Studieremo le soluzioni delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \ \ \partial_I H \\ \dot{I} = -\partial_\theta H\,. \end{cases}$$

L'oscillazione $Osc\,(I)$ lungo una traiettoria è definita come

$$Osc\,(I) := \sup |I(t_1) - I(t_0)|\,.$$

Una particolare perturbazione H_ε si dice che esibisce diffusione di Arnol'd se esiste una traiettoria per cui l'oscillazione ≥ 1. In questo seminario annunciamo l'esistenza di una grande classe di perturbazioni che esibiscono diffusione di Arnol'd, nel caso in cui $h'' > 0$.

Sia E uno spazio vettoriale topologico, diremo che un suo sottoinsieme W è un "cusp-residual" se valgono le seguenti proprietà:

1. *Esiste un sottoinsieme aperto denso U di E tale che*

$$v \in U \quad e \quad \lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda v \in U\,.$$

2. *Esiste un sottoinsieme aperto V di U tale che se*

$$\gamma : [0, \delta_0] \longrightarrow E$$

   è una curva C^1, con $\gamma(0) = 0$ e $\gamma'(0) \in U$, allora esiste $0 < \delta \leq \delta_0$ tale che $\gamma((0, \delta)) \subset V$.

3. *W è un sottoinsieme aperto e denso di V.*

In seguito assumeremo che $h \in C^r$, con r intero sufficientemente grande, ∞ oppure ω.

Teorema. *Esiste un insieme W "cusp-residual" nello spazio delle perturbazioni C^r di h, tale che ogni perturbazione in W esibisce diffusione di Arnol'd.*

Sottolineiamo che l'approccio seguito da Mather, a differenza del metodo geometrico usato da Arnol'd, è di tipo variazionale. E' opportuno inoltre notare che una dimostrazione di tale affermazione non è ancora disponibile.

Concludiamo qui questo rapido (e non troppo tecnico) *excursus*, rimandando il lettore particolarmente interessato alla vasta letteratura a riguardo, quale - tanto per citare alcuni (ma non i soli) dei lavori più significativi - [5], [9], [8] [10] [18], [22], [31], [32], [43], [68] e [70].

Capitolo 2

Teorema KAM: caso analitico (schema di Kolmogorov, versione di Salamon)

"It was a surprise to me that I would have to present a paper at the final session of the Congress in this large hall, which was known to me rather as a place for the performance of the great musical compositions of the world, conducted by Mengelberg. The paper I have prepared [...] is devoted to a rather special range of problems. My aim is to elucidate ways of applying basic concepts and results in modern general metric and spectral theory of dynamical systems to the study of conservative dynamical systems in classical mechanics. However, it seems to me that the subject I have chosen may also be of broader interest, as one of the examples of the appearance of new, unexpected, and profound relationships among different branches of classical and modern mathematics.
In his famous address at the Congress in 1900, David Hilbert said that the unity of mathematics and the impossibility of its division into the independent branches stem from the very nature of this science. The most convincing evidence for the correctness of this idea is the appearance of new focal points at each stage in the development of mathematics, where, in the solution of quite specific problems, notions and methods from quite different mathematical disciplines become necessary and are involved in new interrelations."

[Kolmogorov, Amsterdam 1954]

E' con queste parole che si apriva l'ultima *plenary lecture* a conclusione dell' *International Congress of mathematicians* del 1954 ad Amsterdam. L'onore di tenere il discordo conclusivo era stato concesso all' "*Euclide della probabilità*", l'uomo che aveva fornito una base assiomatica al calcolo delle probabilità, fondata sulla teoria della misura: il matematico russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov. Kolmogorov fu un grande matematico in grado di costruire collegamenti tra differenti settori della matematica, capace di vedere relazioni che nessuno aveva neanche sospettato prima. E' con queste parole che iniziò il suo intervento conclusivo, il cui argomento risultò abbastanza inaspettato: non aveva intenzione di parlare di probabilità, ma di sistemi dinamici, con un discorso dal titolo: "*On the general theory of dynamical systems and classical mechanics*". Con tali parole volle affermare la sua ampia visione della matematica e al tempo stesso preparare il terreno per quella che sarebbe stata uno delle più notevoli conquiste matematiche del secolo scorso: la teoria KAM [1].

Nello stesso anno Kolmogorov pubblicò un *outline* della sua rivoluzionaria idea (cfr. [40]), limitandosi a fornire le idee chiavi alla base delle tecniche usate, fuggendo l'eccessiva tecnicità. Ci vollero altri otto anni prima che Moser e Arnol'd, lavorando indipendentemente e in ambiti diversi, pubblicassero i dettagli a sostegno della validità del lavoro di Kolmogorov. Nell'introduzione di uno dei suoi lavori Arnol'd definì l'idea di Kolmogorov come:

> *"simple and novel* [. . .] *the combination of very classical and essentially modern methods, the solution of a* 200*-year-old problem, a clear geometrical picture and a great breadth of outlook - these are merits of the work. Its deficiency has been that complete proofs have never been published."*

Questa *deficienza* di cui parla Arnol'd è chiaramente opinabile: chiunque abbia letto il lavoro di Kolmogorov (cfr. [40]) concorderà certamente che tale *mancanza* è ampiamente colmata da una chiarezza espositiva e una *lucidità matematica*, che rende inopportuno ogni ulteriore chiarimento.

L'idea originale di Kolmogorov può essere così schematizzata:

- fissata una frequenza diofantina, si cerca nell'intorno del toro invariante non risonante del sistema imperturbato un toro invariante per il sistema perturbato, sul quale avvenga un moto quasi periodico esattamente con le stesse frequenze che abbiamo fissato. Quindi, invece di variare le frequenze (come si fa abitualmente in molti schemi della teoria delle perturbazioni) si

[1] L'acronimo KAM deriva dai nomi di Andrei Nikolaevich Kolmogorov, Vladimir Igorevich Arnol'd e Jürgen Moser, i tre matematici che posero le fondamenta di tale teoria, tra il 1954 e il 1963.

cerca di mantenerle costanti attraverso una piccola variazione delle condizioni iniziali, dell'ordine della perturbazione: questo è possibile in quanto, per la condizione di non degenerazione della hamiltoniana imperturbata, le frequenze variano con le variabili d'azione.

- L'osservazione cruciale è sostituire, nella ricerca del toro invariante, gli sviluppi in serie di potenze della perturbazione con un metodo rapidamente convergente del tipo di quello delle tangenti di Newton: tale metodo - per la ricerca delle radici di un'equazione algebrica - partendo da un errore iniziale di ordine ε, dà dopo n approssimazioni un errore dell'ordine ε^{2^n}: è tale *superconvergenza* che permette di neutralizzare l'effetto dei piccoli denominatori che compaiono ad ogni approssimazione! Con tale tecnica si riesce ad effettuare una successione infinita di approssimazioni e a dimostrare la convergenza di tutta lo schema.

Osservazione. Le ipotesi necessarie per applicare tale schema rapidamente convergente consistono nell'analiticità e non degenerazione della hamiltoniana non perturbata e nell'analiticità del fattore perturbativo. Purtroppo tale tecnica non può essere applicata direttamente al caso differenziabile; infatti, in tale caso si riesce ad applicare lo schema iterativo solo un numero finito di volte, a causa di una *perdita di differenziabilità* cui si assiste ad ogni passo. Si deve a Moser un primo risultato analogo per la classe delle hamiltoniane differenziabili: la condizione di analiticità può essere sostituita dalla differenziabilità d'ordine sufficientemente elevato, se si combina il metodo di Newton con una tecnica di approssimazione sviluppata da Bernstein, Jackson, Moser e Zehnder, ossia se si applica il teorema KAM analitico ad una successione di funzioni analitiche che approssimano la hamiltoniana in un'opportuna topologia. Quello che si osserva è che, a differenza dei risultati ottenuti nella categoria analitica, nel caso differenziabile si assiste ad una perdita di differenziabilità: se H è C^r (con r sufficientemente grande), allora il teorema di Moser fornisce l'esistenza di un toro invariante di classe C^{r-d}, dove $d > 0$ dipende dal numero n di gradi di libertà e dall'esponente diofantino τ (vedi definizione 1.4.5), ma non dall'ordine di differenziabilità r. Pöschel nel suo lavoro [54] migliora il risultato di Moser, dimostrando che è sufficiente considerare $r > 2\tau + 2 > 2n$: si tratta di un risultato ottimale, come discuteremo meglio in seguito (vedi capitolo 3).

Lo scopo dei prossimi paragrafi sarà fornire una dimostrazione completa e dettagliata del teorema KAM nel caso analitico, seguendo principalmente un lavoro - non pubblicato - di Dietmar Salamon (vedi [60]). Successivamente estenderemo tale risultato alla classe delle funzioni hamiltoniane differenziabili (capitolo 3), e, in seguito, passeremo ad analizzare il caso isoenergetico (capitolo 4).

2.1 Alcune premesse

Prima di entrare nei dettagli della dimostrazione, vogliamo discutere brevemente alcune proprietà di tali tori invarianti, che ci permetteranno di comprendere meglio le idee che stanno alla base delle tecniche usate.

Consideriamo un hamiltoniana $H(x,y)$ da $\mathbb{T}^n \times \Omega$ in $\mathbb{R}$ e il sistema hamiltoniano associato

$$\begin{cases} \dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ \\ \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n\,. \tag{2.1}$$

Supponiamo che $(x(t), y(t))$ sia una soluzione quasi-periodica di (2.1), cioè esistano un vettore razionalmente indipendente $\omega \in \mathbb{R}^n$ e due funzioni

$$w,\, v \in C^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$$

tali che

$$\begin{cases} y(t) = v(\omega t) \\ x(t) = \omega t + w(\omega t) \end{cases} \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.2}$$

Differenziamo ora tale soluzione rispetto a t ed otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{y} = Dv(\omega t) \\ \dot{x} = \omega + Dw(\omega t)\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

dove

$$D = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

Osservazione. Osserviamo che tale operatore differenziale è strettamente legato alla frequenza ω considerata, e quindi sarebbe più corretto (ma rischierebbe di appesantire troppo la notazione) indicarlo D_ω.

Usando ora il fatto che $(x(t), y(t))$ è una soluzione di (2.1) e confrontando (2.2) con (2.3), otteniamo:

$$\begin{cases} Dv_i(\omega t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(\omega t + w(\omega t), v(\omega t)) \\ \omega_i + Dw_i(\omega t) = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}(\omega t + w(\omega t), v(\omega t)) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

che, per la densità delle traiettorie $t \mapsto \omega t$ su $\mathbb{T}^n$, è equivalente a:

$$\begin{cases} Dv_i(\xi) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(\xi + w(\xi), v(\xi)) \\ \omega_i + Dw_i(\xi) = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}(\xi + w(\xi), v(\xi)) \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{T}^n \,. \tag{2.4}$$

Denotiamo ora $u(\xi) = \xi + w(\xi)$; quindi trovare le soluzioni di (2.1) è equivalente a trovare u e v soluzioni dell'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare e degenere:

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u, v) \\ \\ Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u, v) \,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Osservazione. Abbiamo quindi il seguente embedding del toro invariante nello spazio delle fasi $\mathbb{T}^n \times \Omega$:

$$\begin{cases} y(\xi) = v(\xi) \\ x(\xi) = u(\xi) \end{cases} \qquad \text{con } \xi \in \mathbb{T}^n$$

dove $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ sono entrambe periodiche di periodo 1 in tutte le loro componenti ed u rappresenta un diffeomorfismo del toro in se stesso; quindi tale immersione ci permette di mappare le soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{\xi} = \omega$ nelle soluzioni del sistema hamiltoniano iniziale (2.1).

Come abbiamo già avuto modo di sottolineare, la teoria KAM si occupa principalmente dello studio di problemi perturbativi; quindi dobbiamo assumere l'ulteriore ipotesi che la funzione hamiltoniana $H(x, y)$ sia sufficientemente vicina ad una funzione $F(x, y)$ per le quali una soluzione sia nota. A meno di effettuare un cambiamento di coordinate, ciò si traduce nella condizione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, 0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, 0) = \omega \,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Inoltre, dobbiamo assumere che la hamiltoniana imperturbata soddisfi una condizione di non degenerazione (di Legendre)[2]:

$$\det \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\cdot, 0) \right\rangle \neq 0 \; . \tag{2.7}$$

Osservazione. Osserviamo come il problema sopra impostato, sia più generale di quello discusso nel capitolo precedente: il caso dei sistemi quasi integrabili è chiaramente un sottocaso.

Discutiamo ancora un'ulteriore proprietà di tali tori invarianti. Se le frequenze ω sono razionalmente indipendenti, si deduce da (2.5) che il toro è una sottovarietà lagrangiana [3] di $\mathbb{T}^n \times \Omega$ e quindi

$$u_\xi^T v_\xi = v_\xi^T u_\xi \; . \tag{2.8}$$

Questo implica che l'embedding del toro invariante nello spazio delle fasi si estende ad una trasformazione simplettica $z = \phi(\zeta)$, dove $z = (x, y)$ e $\zeta = (\xi, \eta)$. Più esplicitamente:

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta \; . \end{cases} \tag{2.9}$$

Si verifica che le trasformazioni della forma (2.9) che soddisfano la proprietà (2.8) formano un sottogruppo delle trasformazioni simplettiche di $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Vogliamo anche sottolineare che la funzione hamiltoniana trasformata $K = H \circ \phi$ soddisfa la condizione

$$\frac{\partial K}{\partial \xi}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \eta}(\xi, 0) = \omega \tag{2.10}$$

se e soltanto se u e v soddisfano la condizione (2.5).

Dalla (2.8) segue che la trasformazione $z = \phi(\zeta)$ definita da (2.9) si può rappresentare in termini della sua funzione generatrice

$$S(x, \eta) = U(x) + V(x) \cdot \eta \tag{2.11}$$

dove la funzione scalare $U(x)$ e il campo vettoriale $V(x)$ sono scelti in maniera da soddisfare

$$V \circ u = \mathrm{id}, \quad U_x \circ u = v \tag{2.12}$$

[2] Data una funzione

$$f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$$

denoteremo con $\langle f(\cdot) \rangle$ la sua media su $\mathbb{T}^n$, cioè:

$$\langle f(\cdot) \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, dx \, .$$

[3] Una *sottovarietà lagrangiana* dello spazio delle fasi è una varietà la cui dimensione è uguale alla dimensione dello spazio delle configurazioni (i.e. n) e sulla quale si annulla identicamente la 2-forma ω^2 che definisce la struttura simplettica sullo spazio delle fasi.

cosicché $z = \phi(\zeta)$ se e solo se

$$\begin{cases} y = S_x(x, \eta) \\ \xi = S_\eta(x, \eta) \, . \end{cases}$$

Osserviamo che le funzioni $V(x) - x$ e $U_x(x)$ sono periodiche con periodo 1 in tutte le loro componenti; inoltre il toro invariante può essere rappresentato come il grafico della funzione

$$y = U_x(x) \tag{2.13}$$

ed il flusso su di esso può essere descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, U_x) \, . \tag{2.14}$$

La richiesta che l'equazione (2.13) definisca un toro invariante per (2.1) è equivalente all'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(x, U_x) = \text{costante} \, . \tag{2.15}$$

In particolare, il sistema hamiltoniano (2.1) si può comprendere meglio in termini delle caratteristiche dell'equazione differenziale alle derivate parziali (2.15): stiamo cercando una soluzione $U(x)$ di tale PDE in modo che $U(x)$ sia di periodo 1 e tale che esista un diffeomorfismo $\xi = V(x)$ del toro che trasformi l'equazione differenziale (2.14) in $\dot{\xi} = \omega$. Quest'ultima condizione può essere espressa da

$$V_x H_y(x, U_x) = \omega \, . \tag{2.16}$$

Osserviamo che le equazioni (2.15) e (2.16) insieme sono equivalenti alla condizione (2.10) e quindi alla (2.5).

2.1.1 Alcune stime

Prima di procedere, fissiamo un po' di notazione; introduciamo lo spazio W_r delle funzioni reali analitiche $w(\xi)$ nella striscia

$$\Sigma_r \equiv \{\xi = u + iv \in \mathbb{C}^n \, , \; |\mathrm{Im}\, \xi| \leq r\}$$

limitate e periodiche di periodo 1 in tutte le loro componenti (stiamo denotando con $|\mathrm{Im}\, \xi|$ la norma euclidea di $\mathrm{Im}\, \xi = (\mathrm{Im}\, \xi_1, \ldots, \mathrm{Im}\, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$).[4] Introduciamo su tale spazio la *norma del sup*:

$$|w|_r \;\; = \;\; \sup\{|w(\xi)| \, ; \; |\mathrm{Im}\, \xi| \leq r\} \, .$$

[4] Qui e in seguito adotteremo la seguente notazione:

$$\mathrm{Re}\, x = (\mathrm{Re}\, x_1, \ldots, \mathrm{Re}\, x_n) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\, x = (\mathrm{Im}\, x_1, \ldots, \mathrm{Im}\, x_n) \, ,$$

per $x \in \mathbb{C}^n$.

Considereremo inoltre la seguente norma L^2 definita sul nostro spazio:

$$\|w\|_{L^2,\,\Sigma_r} = \sup\left\{ \left(\int_{\mathbb{T}^n} |w(u+iv)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;;\quad |v| \leq r \right\} ;$$

chiaramente

$$\|w\|_{L^2,\,\Sigma_r} \leq |w|_r \,.$$

Denotiamo, infine, con W_r^0 il sottospazio di W_r costituito da tutte le funzioni che hanno media nulla su $\operatorname{Im}\xi = 0$. Osserviamo che ogni $w \in W_r$ può essere rappresentata attraverso la sua serie di Fourier:

$$w(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} w_j e^{2\pi i\,(j\cdot\xi)}$$

dove

$$w_j = \left(\int_{\mathbb{T}^n} w(u+iv) e^{-2\pi i\,(j\cdot u)}\, du \right) e^{2\pi\,(j\cdot v)} \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

e

$$w_{-j} = \overline{w}_j \;.$$

Ovviamente $w \in W_r^0$ se e soltanto se $w_0 = 0$.

Dimostriamo ora una serie di disuguaglianze che ci torneranno particolarmente utili in seguito.

Proposizione 2.1.1. *Sia* $0 < \rho < r \leq 1$. *Esiste una costante* $d = d(n)$ *tale che per ogni* $w \in W_r$ *e per ogni* $\xi \in \Sigma_\rho$, *valgano le seguenti disuguaglianze:*[5]

(i) $|w_j| \leq \|w\|_{L^2,\,\Sigma_r} e^{-2\pi|j|r}$,

(ii) $|w(\xi)| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |w_j| e^{-2\pi(j\cdot\operatorname{Im}\xi)} \leq \dfrac{d}{(r-\rho)^{\frac{n}{2}}} \|w\|_{L^2,\,\Sigma_r}$,

(iii) $|\partial_\xi w|_\rho \leq \dfrac{1}{r-\rho} |w|_r$ *(stime di Cauchy)*.

Dimostrazione. (i) Fissiamo un $j \in \mathbb{Z}^n$ e sia

$$v = -\frac{j}{|j|} r \,.$$

Per la definizione dei coefficienti di Fourier abbiamo:

$$|w_j| \leq \left(\int_{\mathbb{T}^n} |w(u+iv)|\, du \right) e^{2\pi(j\cdot v)} \leq \|w\|_{L^2,\,\Sigma_r} e^{-2\pi|j|r} \,.$$

[5] In tale contesto denoteremo con $|\cdot|$ la norma euclidea, anche per i vettori interi.

(ii) La prima disuguaglianza è ovvia. Dimostriamo la seconda parte. Fissiamo un vettore $\xi \in \Sigma_\rho$ e consideriamo l'insieme[6]

$$I_0 = \left\{ j \in \mathbb{Z}^n : \quad (j \cdot \operatorname{Im} \xi) \leq -\frac{|j|}{\sqrt{n}}\rho \right\} .$$

Useremo, inoltre, la seguente uguaglianza (l'*uguaglianza di Parseval*):

$$\int_{\mathbb{T}^n} |w(u+iv)|^2 du = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |w_j|^2 e^{-4\pi\,(j\cdot v)} .$$

Ponendo $\mu = \dfrac{r}{\rho} > 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I_0} |w_j| e^{-2\pi(j\cdot \operatorname{Im}\xi)} &\leq \sum_{j \in I_0} |w_j| e^{-2\pi\mu(j\cdot \operatorname{Im}\xi)} e^{-2\pi(\mu-1)(j\cdot\operatorname{Im}\xi)} \leq \\
&\leq \sum_{j\in I_0} |w_j| e^{-2\pi(j\cdot\mu\operatorname{Im}\xi)} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{n}}|j|(r-\rho)} \leq \\
&\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |w_j|^2 e^{-4\pi(j\cdot\mu\operatorname{Im}\xi)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{n}}|j|(r-\rho)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{(r-\rho)^{\frac{n}{2}}} \|w\|_{L^2,\,\Sigma_r} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} (r-\rho)^n e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{n}}|j|(r-\rho)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{d_1^{\frac{1}{2}}}{(r-\rho)^{\frac{n}{2}}} \|w\|_{L^2,\,\Sigma_r} ,
\end{aligned}$$

dove

$$d_1 = d_1(n) = \sup_{0<\lambda\leq 1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \lambda^n e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{n}}|j|\lambda} < \infty .$$

Consideriamo ora una collezione $e_1, \ldots, e_s$ di vettori unitari in $\mathbb{R}^n$, tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esista un $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$ con [7]

$$(x \cdot e_\sigma) \geq \frac{|x|}{\sqrt{n}} .$$

---

[6] In tale dimostrazione utilizzeremo la norma euclidea anche per i vettori interi.

[7] Osserviamo che è sufficiente prendere i vettori le cui componenti sono determinate da $\pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, i.e:

$$e_\sigma = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}, \ \ldots, \ \pm\frac{1}{\sqrt{n}} \right) .$$

Chiaramente si tratta di vettori unitari (con la norma euclidea); inoltre, preso un qualsiasi $x \in \mathbb{R}^n$ esiste uno di questi vettori, in modo che

$$\begin{aligned}
(x \cdot e_\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{n}} (|x_1| + |x_2| + \ldots |x_n|) \geq \\
&\geq \frac{|x|}{\sqrt{n}} .
\end{aligned}$$

In particolare, abbiamo che $s = 2^n$.

Quindi, ogni vettore intero che non sta in I_0 appartiene ad almeno uno di questi insiemi I_σ così definiti:

$$I_\sigma = \left\{ j \in \mathbb{Z}^n : \quad (j \cdot \operatorname{Im}\xi) > -\frac{|j|}{\sqrt{n}}\rho, \quad (j \cdot e_\sigma) \geq \frac{|j|}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Inoltre, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I_\sigma} |w_j| e^{-2\pi(j \cdot \operatorname{Im}\xi)} &\leq \sum_{j \in I_\sigma} |w_j| e^{\frac{2\pi}{\sqrt{n}}|j|\rho} \leq \\
&\leq \left(\sum_{j \in I_\sigma} |w_j|^2 e^{\frac{4\pi}{\sqrt{n}}|j| r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in I_\sigma} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{n}}|j|(r-\rho)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |w_j|^2 e^{4\pi(j \cdot r e_\sigma)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in I_\sigma} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{n}}|j|(r-\rho)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{d_1^{\frac{1}{2}}}{(r-\rho)^{\frac{n}{2}}} \|w\|_{L^2,\, \Sigma_r}
\end{aligned}$$

e quindi la disuguaglianza è soddisfatta con $d = d_1^{\frac{1}{2}}(s+1)$, dove d_1 e s dipendono entrambi da n (in particolare abbiamo già osservato che possiamo prendere $s = 2^n$).

(iii) Questa disuguaglianza segue dalla formula integrale di Cauchy

$$|w_\xi(\xi)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{w\left(\xi + \lambda |w_\xi|^{-1} \overline{w_\xi(\xi)}\right)}{\lambda^2} d\lambda \right|$$

con

$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| = r - \rho\}.$$

$\square$

Siamo ora in grado di dimostrare un primo interessante risultato.

Lemma 2.1.2 (Moser, Rüssmann). *Siano $n \geq 2$, $\gamma > 0$ e $\tau > n-1$ e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino. Sia inoltre $0 < r \leq 1$ e $g \in W_r^0$; allora l'equazione lineare*

$$Df = g$$

ammette un'unica soluzione $f \in W_\rho^0$ (con $\rho < r$) e tale soluzione soddisfa la disuguaglianza

$$|f|_\rho \leq \frac{c_1}{(r-\rho)^\tau} \|g\|_{L^2,\, \Sigma_r} \tag{2.17}$$

per ogni $\rho < r$ e per qualche costante $c_1 = c_1(\gamma, \tau, n) > 0$.

Osservazione. Assegnata una funzione g stiamo cercando una soluzione dell'equazione lineare $Df = g$. In generale tale equazione non è sempre risolubile, a meno di porre ulteriori condizioni di compatibilità sulla funzione g; infatti, sviluppando in serie di Fourier entrambi i lati dell'uguaglianza otteniamo:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} g_j e^{2\pi i\,(j\cdot\xi)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} 2\pi i(\omega\cdot j)\, f_j\, e^{2\pi i\,(j\cdot\xi)}\,,$$

da cui, guardando i termini corrispondenti a $j = 0$, otteniamo la condizione:

$$g_0 = 0$$

che è equivalente a richiedere

$$g \in W_r^0\,.$$

Formalmente, quindi, una soluzione si otterrà ponendo

$$f_j = \frac{g_j}{2\pi i(\omega\cdot j)}$$

per ogni $j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Il problema è rappresentato dalla convergenza della serie formale così ottenuta, in quanto il denominatore $(\omega\cdot j)$ potrebbe diventare arbitrariamente piccolo (è il cosiddeto *problema dei piccoli denominatori*): è qui che interviene la condizione di diofantinità del vettore ω.

Dimostrazione. [8] Come già osservato, rappresentando $f \in W_\rho^0$ e $g \in W_r^0$ attraverso le loro serie di Fourier si ottiene che l'equazione $Df = g$ è equivalente alla condizione

$$f_j = \frac{g_j}{2\pi i(\omega\cdot j)} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Questo dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione: infatti la condizione di diofantinità di ω permette di dimostrare la convergenza della serie formale così ottenuta.

La parte più delicata della dimostrazione consiste nel dimostrare la disuguaglianza (2.17). Indichiamo con $J_0 \subset \mathbb{Z}^n$ l'insieme dei vettori interi $j \neq 0$ tali che $|j\cdot\omega| \geq \dfrac{\gamma}{2}$ e definiamo

$$f^0(\xi) = \sum_{j\in J_0} f_j e^{2\pi i(j\cdot\xi)}\,.$$

Usando la disuguaglianza (ii) nella proposizione (2.1.1) per $|\mathrm{Im}\,\xi| \leq \rho < r$ e la definizione della costante d in tale proposizione, otteniamo:

$$\begin{aligned}
|f^0(\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in J_0} |j\cdot\omega|^{-1}|g_j|e^{-2\pi(j\cdot\mathrm{Im}\,\xi)} \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi\gamma}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |g_j|e^{-2\pi(j\cdot\mathrm{Im}\,\xi)} \leq \\
&\leq \frac{d}{\pi\gamma(r-\rho)^\tau}\|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}\,,
\end{aligned}$$

[8] Da qui in poi, torneremo a considerare la norma 1 per i vettori interi.

in cui abbiamo usato che $\tau > n-1 \geq \frac{n}{2}$ (in quanto $n \geq 2$).

La parte più problematica consiste nello stimare i termini della serie corrispondenti ai vettori in $\mathbb{Z}^n \setminus J_0$; l'osservazione cruciale è che "solamente una piccola parte dei denominatori $(j \cdot \omega)$ è veramente piccola"; questo fatto è stato già usato nei lavori di Siegel ([63]), Arnol'd ([3]), Rüssmann ([59]) e Pöschel ([53]).

Sia $K \geq 1$ un numero fissato e per $\nu = 1, 2, \dots$ definiamo il seguente sottoinsieme di vettori interi non nulli:

$$\begin{aligned} J(\nu, K) &= \{j \in \mathbb{Z}^n,\ 0 < |j| \leq K : \quad 2^\nu \gamma^{-1} < |j \cdot \omega|^{-1} \leq 2^{\nu+1}\gamma^{-1}\} = \\ &= \{j \in \mathbb{Z}^n,\ 0 < |j| \leq K : \quad 2^{-(\nu+1)}\gamma \leq |j \cdot \omega| < 2^{-\nu}\gamma\}\,. \end{aligned}$$

Al fine di stimare il numero di elementi in $J(\nu, K)$, assumiamo, senza alcuna perdita di generalità, che $|\omega_k| \leq |\omega_n|$ per ogni $k = 1, \dots, n-1$ e definiamo

$$\hat{\jmath} = (j_1, \dots, j_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}\,.$$

Fissiamo ora un $\hat{\jmath} \neq 0$ e cerchiamo j_n in modo che il vettore $j_{min} = (\hat{\jmath}, j_n)$, minimizzi $|j \cdot \omega|$. Indicheremo inoltre con

$$\hat{\omega} = (\omega_1,\ \dots\ , \omega_{n-1})$$

le prime $n-1$ componenti del vettore delle frequenze.
Poiché

$$\begin{aligned} |j \cdot \omega| &= |\hat{\jmath} \cdot \hat{\omega} + j_n \omega_n| = \\ &= |\omega_n| \left| \hat{\jmath} \cdot \frac{\hat{\omega}}{\omega_n} + j_n \right| \end{aligned}$$

possiamo prendere j_n in modo che:

$$\left| \hat{\jmath} \cdot \frac{\hat{\omega}}{\omega_n} + j_n \right| \leq 1\,,$$

cioè

$$\begin{aligned} |j_n| &\leq 1 + \left(\sup_{i=1,\dots,n-1} \left\{ \frac{\omega_i}{\omega_n} \right\} \right) |\hat{\jmath}| \leq \\ &\leq 1 + |\hat{\jmath}| \leq 2|\hat{\jmath}|\,, \end{aligned}$$

in quanto stiamo supponendo che $\hat{\jmath} \neq 0$ e quindi $|\hat{\jmath}| \geq 1$.
Questo implica che:

$$|j_{min}| = |\hat{\jmath}| + |j_n| \leq 3|\hat{\jmath}|\,,$$

quindi per ogni $j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, con $\hat{\jmath} \neq 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} |j \cdot \omega| &\geq |j_{min} \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|j_{min}|^\tau} \geq \\ &\geq \frac{\gamma}{3^\tau |\hat{\jmath}|^\tau}\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Consideriamo ora due vettori j, $j' \in J(\nu, K)$ con $j \neq j'$; si verifica che tali vettori devono soddisfare la condizione $\hat{\jmath} \neq \hat{\jmath}'$. Infatti, supponiamo per assurdo che $j \neq j'$, ma $\hat{\jmath} = \hat{\jmath}'$; osservando che $|\omega_n| \geq \gamma$ (come segue facilmente applicando la condizione di diofantinità con il vettore $(0, \ldots, 0, 1)$) e che $|j_n - j'_n| \geq 1$ (in quanto stiamo supponendo che siano diversi), giungiamo immediatamente ad una contraddizione:

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq |\omega_n| \leq |j_n - j'_n||\omega_n| = |(j_n - j'_n)\omega_n| = \\
&= |(j_n - j'_n)\omega_n + (\hat{\jmath} - \hat{\jmath}') \cdot \hat{\omega}| = |(j - j') \cdot \omega| \leq \\
&\leq |j \cdot \omega| + |j' \cdot \omega| < 2\frac{\gamma}{2^\nu} < \gamma \,.
\end{aligned}$$

Cerchiamo ora di ricavare una stima sulla distanza di due vettori (distinti) in $J(\nu, K)$. Siano j, $j' \in J(\nu, K)$ con $j \neq j'$ e, per quanto appena mostrato, $\hat{\jmath} \neq \hat{\jmath}'$. Usando la (2.18) otteniamo:

$$\begin{aligned}
|\hat{\jmath} - \hat{\jmath}'|^{-\tau} &\leq \frac{3^\tau}{\gamma}|(j - j') \cdot \omega| \leq \\
&\leq \frac{3^\tau}{\gamma}\left(|j \cdot \omega| + |j' \cdot \omega|\right) \leq \\
&\leq 2\frac{3^\tau}{\gamma}2^{-\nu}\gamma \leq \\
&\leq 3^\tau 2^{-(\nu-1)}
\end{aligned}$$

e di conseguenza la distanza

$$|\hat{\jmath} - \hat{\jmath}'| \geq \frac{2^{\frac{\nu-1}{\tau}}}{3}$$

diventa molto grande al crescere di ν. Questo prova che il numero di punti in $J(\nu, K)$ può essere stimato da

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card} J(\nu, K) &\leq \tilde{d}_2 K^{n-1} 2^{-\frac{(\nu-1)(n-1)}{\tau}} \leq \\
&\leq d_2 K^{n-1} 2^{-\frac{\nu(n-1)}{\tau}} \,,
\end{aligned}$$

per qualche costante $\tilde{d}_2 = \tilde{d}_2(n) > 0$ e $d_2 = d_2(n) > 0$. Osserviamo che $J(\nu, K) = \emptyset$ per $K \leq 2^{\frac{\nu}{\tau}}$, come segue facilmente usando la condizione di diofantinità; infatti, supponendo per assurdo l'esistenza di un vettore j in tale insieme, otterremmo una palese contraddizione:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{2^\nu} &> |j \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \\
&\geq \frac{\gamma}{K^\tau} \geq \frac{\gamma}{2^\nu} \,.
\end{aligned}$$

Denotando ora con $J(K)$ l'insieme dei vettori interi non nulli che soddisfano le condizioni

$$0 < |j| \leq K \,, \qquad |j \cdot \omega|^{-1} > \frac{2}{\gamma}$$

ci si convince immediatamente che è l'unione degli insiemi $J(\nu, K)$ al variare di $\nu = 1, 2, \ldots$, e si può concludere che

$$
\begin{aligned}
\sum_{J(K)} |j \cdot \omega|^{-1} &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j \in J(\nu,K)} |j \cdot \omega|^{-1} \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j \in J(\nu,K)} \frac{2^{\nu+1}}{\gamma} = \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu+1}}{\gamma} \operatorname{Card} J(\nu, K) \leq \\
&\leq \sum_{2^{\frac{\nu}{\tau}} \leq K} \frac{2^{\nu+1}}{\gamma} d_2 K^{n-1} 2^{-\frac{\nu(n-1)}{\tau}} \\
&\leq \frac{2d_2}{\gamma} K^{n-1} \sum_{2^{\frac{\nu}{\tau}} \leq K} 2^{\frac{\nu(\tau+1-n)}{\tau}} \leq \\
&\leq \frac{2d_2}{\gamma} K^{n-1} \sum_{2^{\frac{\nu}{\tau}} \leq K} K^{\tau+1-n} \leq \\
&\leq \frac{2d_2}{\gamma} K^{\tau} \log_2 K^{\tau} \leq \\
&\leq \frac{4d_2}{\gamma} K^{2\tau}.
\end{aligned}
$$

Usando le disuguaglianze (i) e (ii) in (2.1.1) e

$$
e^{-s} - e^{-(s+\varepsilon)} \leq \varepsilon\, e^{-s}
$$

per qualche $s > 0$ e $\varepsilon > 0$, possiamo concludere la stima di $|f|_r$ cercata; infatti:

$$
\begin{aligned}
|f - f^0|_\rho &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j \notin J_0} |g_j| |j \cdot \omega|^{-1} e^{2\pi |j| \rho} \leq \\
&\leq \frac{\|g\|_{L^2, \Sigma_r}}{2\pi} \sum_{j \notin J_0} |j \cdot \omega|^{-1} e^{-2\pi |j| (r-\rho)} = \\
&= \frac{\|g\|_{L^2, \Sigma_r}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j \notin J_0 \\ |j| = k}} |j \cdot \omega|^{-1} e^{-2\pi k (r-\rho)} = \\
&= \frac{\|g\|_{L^2, \Sigma_r}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J(k) \setminus J(k-1)} |j \cdot \omega|^{-1} e^{-2\pi k (r-\rho)} = \\
&= \frac{\|g\|_{L^2, \Sigma_r}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in J(k)} |j \cdot \omega|^{-1} e^{-2\pi k (r-\rho)} - \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{j \in J(k-1)} |j \cdot \omega|^{-1} e^{-2\pi k (r-\rho)} \right) =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in J(k)}|j\cdot\omega|^{-1}\left(e^{-2\pi k(r-\rho)}-e^{-2\pi(k+1)(r-\rho)}\right)\le\\
&\le \frac{\|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in J(k)}|j\cdot\omega|^{-1}2\pi(r-\rho)\left(e^{-2\pi k(r-\rho)}\right)\le\\
&\le \|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}\sum_{k=1}^{\infty}(r-\rho)e^{-2\pi k(r-\rho)}\sum_{j\in J(k)}|j\cdot\omega|^{-1}\le\\
&\le \|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}\sum_{k=1}^{\infty}(r-\rho)e^{-2\pi k(r-\rho)}\frac{4d_2}{\gamma}k^{2\tau}=\\
&= \frac{4\|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}d_2}{\gamma(r-\rho)^{\tau}}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2\tau}(r-\rho)^{\tau+1}e^{-2\pi k(r-\rho)}\le\\
&\le \frac{4\|g\|_{L^2,\,\Sigma_r}d_2}{\gamma(r-\rho)^{\tau}}\sup_{0<\lambda\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{\tau+1}k^{2\tau}e^{-2\pi k\lambda}\right),
\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione, prendendo

$$c_1 = c_1(\gamma,n,\tau) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{\pi}+4d_2\sup_{0<\lambda\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{\tau+1}k^{2\tau}e^{-2\pi k\lambda}\right)\right).$$

□

Osservazione. Nella definizione della costante c_1 del lemma 2.1.2 è chiara la dipendenza da γ:

$$c_1 = c_1(\gamma,n,\tau) = \frac{\hat{c}_1}{\gamma}$$

dove

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_1(n,\tau) = \left(\frac{d}{\pi}+4d_2\sup_{0<\lambda\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{\tau+1}k^{2\tau}e^{-2\pi k\lambda}\right)\right).$$

Questa osservazione ci servirà nella dimostrazione del teorema KAM nel caso isoenergetico (cfr. Cap. 4), in quanto, a differenza del caso *standard*, ad ogni passo dello schema avremo una variazione della frequenza ω e quindi diventerà necessario conoscere la dipendenza delle costanti da γ, per poter apportare le opportune modifiche.

Questo risultato appena dimostrato, rappresenta uno strumento di cruciale importanza per dimostrare il teorema principale di questo capitolo: una versione quantitativa del teorema KAM nella classe delle funzioni analitiche. Vedremo in seguito (vedi lemma 3.4.2) un'estensione di questo risultato al caso di funzioni differenziabili (non necessariamente analitiche).

2.2 Dimostrazione del teorema KAM: caso analitico

Teorema 2.2.1. (Kolmogorov, Arnol'd, Moser)
Siano $n \geq 2,\ \tau > n-1,\ \gamma > 0,\ 0 < \theta < 1$ *e* $M \geq 1$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino. Allora esistono delle costanti*

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che

$$c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$$

e che valga quanto segue.
Sia $H(x, y)$ *una hamiltoniana reale analitica nella striscia*

$$\Sigma_r \equiv \{(x, y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r,\ |y| \leq r\}$$

con $0 < r \leq 1$, *periodica di periodo* 1 *nelle componenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *e tale da soddisfare le seguenti condizioni per* $(x, y) \in \Sigma_r$ *e per un qualche* $\delta \leq \delta^*$*:*

$$\begin{aligned} &|H(x,0) - \langle H(\cdot, 0)\rangle| \leq \delta r^{2\tau+2} \\ &|H_y(x,0) - \omega| \leq \delta r^{\tau+1} \\ &|H_{yy}(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M} \end{aligned} \tag{2.19}$$

dove $Q(x, y) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *è una matrice simmetrica (non necessariamente analitica) nella striscia* Σ_r, *tale che*

$$|Q(x,y)| \leq M \qquad e \qquad \left|\langle Q(\,\cdot\,, 0)\rangle^{-1}\right| \leq M\ . \tag{2.20}$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ *(dove* $z = (x, y)$ *e* $\zeta = (\xi, \eta)$*), dalla striscia* $\Sigma_{\theta r}$ *nella striscia* Σ_r, *della forma:*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + \left(u_\xi^T(\xi)\right)^{-1}\eta \end{cases}$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *entrambe periodiche di periodo* 1 *e tale che la hamiltoniana trasformata* $K = H \circ \phi$ *soddisfi*

$$K_\xi(\xi, 0) = 0, \quad K_\eta(\xi, 0) = \omega\ .$$

Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r}$*:*

$$\begin{aligned} &|\phi(\zeta) - \zeta| \leq \frac{c\delta}{30M^3}(1-\theta)r \\ &|\phi_\zeta(\zeta) - \mathbb{I}| \leq \frac{c\delta}{15M^3} \\ &|K_{\eta\eta}(\zeta) - Q(\zeta)| \leq \frac{c\delta}{2M} \\ &|v \circ u^{-1}(x)| \leq \frac{c\delta}{15M^3} r^{\tau+1}\ . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dimostrazione. L' idea della dimostrazione che seguiremo consiste nel costruire una successione di hamiltoniane reali analitiche $H^{(\nu)}(x,y)$ nella striscia Σ_{r_ν}, dove

$$\begin{cases} r_0 = r \\ r_\nu = \dfrac{1+\theta}{2} r + \dfrac{1-\theta}{2^{\nu+1}} r \end{cases} \tag{2.22}$$

e tali che

$$\begin{cases} H^{(0)} = H \\ H^{(\nu+1)} = H^{(\nu)} \circ \psi^{(\nu)} \ ; \end{cases}$$

la trasformazione simplettica $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ (dove $z = (x,y)$ e $\zeta = (\xi,\eta)$) mapperà la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ nella striscia Σ_{r_ν} e potrà essere rappresentata in termini della sua funzione generatrice

$$S^{(\nu)}(x,\eta) = U^{(\nu)}(x) + V^{(\nu)}(x)\cdot\eta \ .$$

Seguendo un'idea di Kolmogorov, sceglieremo le seguenti funzioni reali analitiche

$$U^{(\nu)}(x) = \alpha^{(\nu)}\cdot x + a^{(\nu)}(x), \qquad V^{(\nu)}(x) = x + b^{(\nu)}(x)$$

nella striscia $|\operatorname{Im} x| < r_\nu$, tali che $a^{(\nu)}(x)$ e $b^{(\nu)}(x)$ siano periodiche di periodo 1, abbiano media nulla e soddisfino le seguenti proprietà all'interno di tale striscia:

$$\begin{aligned} Da^{(\nu)}(x) &= \langle H^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle - H^{(\nu)}(x,0) \\ \langle H^{(\nu)}_{yy}(\,\cdot\,,0)\rangle\, \alpha^{(\nu)} &= \omega - \langle H^{(\nu)}_{y}(\,\cdot\,,0) + H^{(\nu)}_{yy}(\,\cdot\,,0)\, a^{(\nu)}_x(\cdot)\rangle \\ Db^{(\nu)}(x) &= \omega - H^{(\nu)}_y(x,0) - H^{(\nu)}_{yy}(x,0)(\alpha^{(\nu)} + a^{(\nu)}_x(x)) \ . \end{aligned} \tag{2.23}$$

Con tale trasformazione faremo in modo che l'errore commesso diventi quadraticamente piccolo e non apporteremo alcuna variazione alla frequenza ω. Infatti, indicando con $\mathcal{R}$ dei generici *termini di resto* (che dimostreremo andare a zero in maniera quadratica), avremo:

$$\begin{aligned} &H^{(\nu+1)}(\xi,\eta) = \\ &\quad = H^{(\nu)}\left(\xi, \alpha^{(\nu)} + a^{(\nu)}_x + (\mathbb{I} + b^{(\nu)}_x)\eta\right) + \mathcal{R} = \\ &\quad = H^{(\nu)}(\xi, \alpha^{(\nu)} + a^{(\nu)}_x) + H^{(\nu)}_y(\xi, \alpha^{(\nu)} + a^{(\nu)}_x)\cdot(\mathbb{I} + b^{(\nu)}_x)\eta + \mathcal{R} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= H^{(\nu)}(\xi,0) + H_y^{(\nu)}(\xi,0)\cdot(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + H_y^{(\nu)}(\xi,0)\cdot(\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \\
&\quad + H_{yy}^{(\nu)}(\xi,0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})\cdot(\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \mathcal{R} = \\
&= H^{(\nu)}(\xi,0) + H_y^{(\nu)}(\xi,0)\cdot(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + H_y^{(\nu)}(\xi,0)\cdot(\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \\
&\quad + H_{yy}^{(\nu)}(\xi,0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})\cdot\eta + \mathcal{R} = \\
&= \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle + [H^{(\nu)}(\xi,0) - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle] + Da^{(\nu)} + \omega\cdot\alpha^{(\nu)} + \\
&\quad + [H_y^{(\nu)}(\xi,0) - \omega + \omega]\cdot(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)} + \eta + b_x^{(\nu)}\eta) + Db^{(\nu)} + \\
&\quad + H_{yy}^{(\nu)}(\xi,0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})\cdot\eta + \mathcal{R} = \\
&= \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle + \omega\cdot\alpha^{(\nu)} + \omega\cdot\eta + Db^{(\nu)} + \\
&\quad + \left[(H_y^{(\nu)}(\xi,0) - \omega) + H_{yy}^{(\nu)}(\xi,0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})\right]\cdot\eta + \mathcal{R} = \\
&= \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle + \omega\cdot\alpha^{(\nu)} + \omega\cdot\eta + \mathcal{R}\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che l'esistenza di funzioni siffatte è garantita dal lemma precedente: infatti i membri di destra della prima e terza equazione in (2.23) hanno entrambi media nulla (il membro della terza ha media nulla proprio grazie alla seconda condizione). Osserviamo anche che la risolubilità della seconda equazione è dovuta proprio alle condizioni di non degenerazione che abbiamo richiesto per la hamiltoniana (vedi (2.19) e (2.20)). Inoltre tali condizioni possono anche essere ricavate da (2.15) e (2.16) linearizzandole intorno a $V(x) = x$ e $U(x) = 0$, se sostituiamo

$$
\begin{aligned}
Da^{(\nu)}(x) &\quad\to\quad a_x^{(\nu)}\cdot H_y^{(\nu)}(x,0) \\
Db^{(\nu)}(x) &\quad\to\quad b_x^{(\nu)} H_y^{(\nu)}(x,0)\,.
\end{aligned}
$$

Definiamo ora l'errore al passo ν-simo dell'iterazione come il più piccolo $\varepsilon_\nu > 0$ che soddisfi

$$
\begin{cases}
\left|H^{(\nu)}(x,0) - \langle H^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle\right| \le \varepsilon_\nu \\
|H_y^{(\nu)}(x,0) - \omega|\,(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1} \le \varepsilon_\nu
\end{cases}
\tag{2.24}
$$

nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \le r_\nu$.

Denoteremo con $c_1 = c_1(\gamma,\tau,n) > 0$ la costante del lemma di Moser e Rüssmann (lemma 2.1.2) e definiremo:

$$
\begin{cases}
c_2 = 11M^3\left(1 + c_1 8^{\tau+1}\right)^2 \\
c_3 = 6Mc_2^2 + c_2 \\
c = \left(\dfrac{4}{1-\theta}\right)^{2\tau+3} c_3\,.
\end{cases}
\tag{2.25}
$$

Mostreremo inoltre che ε_ν decresce a zero in maniera quadratica, secondo la stima

$$
\varepsilon_{\nu+1} \le \frac{c_3}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2
\tag{2.26}
$$

dove $c_3 > 0$ è la costante sopra definita ed è indipendente da r. E' interessante notare come la crescita geometrica del fattore di fronte a ε_ν^2, sia dominata dalla convergenza quadratica di ε_ν. Infatti, definendo

$$\begin{cases} \delta_{\nu+1} = c2^{\nu(2\tau+3)}\delta_\nu^2 & \delta_0 = \delta \leq \delta^* \\ \lambda_\nu = c2^{(\nu+1)(2\tau+3)}\delta_\nu & \lambda_0 = 2^{2\tau+3}c\delta \end{cases} \tag{2.27}$$

e ricordando che

$$r_\nu - r_{\nu+1} = \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} r\,,$$

segue facilmente da (2.26) e (2.22) che

$$\varepsilon_\nu \leq \delta_\nu r^{2\tau+2}\,.$$

Inoltre, la successione λ_ν soddisferà la relazione

$$\lambda_{\nu+1} \leq \lambda_\nu^2 \tag{2.28}$$

e quindi λ_ν convergerà a zero se e soltanto se λ_0 è minore di 1.

Per la successione di hamiltoniane $H^{(\nu)}(x,y)$ otterremo le seguenti stime in Σ_{r_ν}:

$$\begin{aligned} &\left|H^{(\nu)}(x,0) - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle\right| \leq \delta_\nu r^{2\tau+2} \\ &|H_y^{(\nu)}(x,0) - \omega|(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1} \leq \delta_\nu r^{2\tau+2} \\ &|H_{yy}^{(\nu)}(x,y) - Q^{(\nu)}(x,y)| \leq 2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M} \end{aligned} \tag{2.29}$$

dove

$$\begin{cases} Q^{(\nu)} = H_{yy}^{(\nu-1)} & \text{per } \nu \geq 1 \\ Q^{(0)} = Q\,. \end{cases}$$

Inoltre, prenderemo $\delta^* > 0$ in modo da soddisfare

$$c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}\,. \tag{2.30}$$

Osserviamo che questa condizione implica $\lambda_0 \leq \frac{1}{2}$; infatti:

$$\lambda_0 = 2^{2\tau+3}c\delta \leq 2^{2\tau+3}c\delta^* \leq 2^{2\tau+3}2^{-2\tau-4} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui :

$$\lambda_{\nu+1} \leq \lambda_\nu^2 = \lambda_\nu\lambda_\nu \leq \lambda_\nu\lambda_0 \leq \frac{\lambda_\nu}{2}\,,$$

cioè

$$\lambda_{\nu+1} \leq \frac{\lambda_\nu}{2} \qquad \text{per ogni } \nu \geq 1\,.$$

Infine, definiamo

$$\begin{cases} M_\nu = \dfrac{M_{\nu-1}}{1-2^{-\nu}c\delta^*} \\ M_{-1} = M \end{cases} \tag{2.31}$$

e osserviamo come la (2.30) implichi [9]

$$\begin{aligned} M_\nu &\le M_{\nu-1}e^{2^{1-\nu}c\delta^*} \le Me^{c\delta^*\sum_{k=-1}^{\nu-1}2^{-k}} \le \\ &\le Me^{4c\delta^*} \le 2M\ . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Schema induttivo

Abbiamo sviluppato ora tutte le premesse per avviare lo schema induttivo. Osserviamo innanzitutto che la base induttiva è facilmente verificabile, in quanto le disuguaglianze (2.29) sono soddisfatte per ipotesi quando $\nu = 0$ e $\delta \le \delta^*$. Per il passo induttivo assumeremo di aver costruito delle funzioni hamiltoniane reali analitiche $H^{(\mu)}(x,y)$ nella striscia Σ_{r_μ} per $\mu = 0,\dots,\nu$, in modo da soddisfare le condizioni (2.29) (con μ al posto di ν).

Usando (2.20), (2.29), (2.31) e (2.32) otteniamo le seguenti stime in Σ_{r_ν}:

- $|H^{(\nu)}_{yy}(z)| \le M_\nu$:

$$\begin{aligned} |H^{(\nu)}_{yy}(z)| &\le |H^{(\nu)}_{yy}(z) - H^{(\nu-1)}_{yy}(z)| + |H^{(\nu-1)}_{yy}(z)| \le \\ &\le M_{\nu-1} + 2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M} \le M_\nu(1-2^{-\nu}c\delta^*) + 2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M} \le \\ &\le M_\nu + 2^{-\nu}c\delta^*\left(-M_\nu + \frac{1}{4M}\right) \le M_\nu\ , \end{aligned}$$

  dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'ultimo addendo è negativo, in quanto M e M_ν sono maggiori di 1.

[9] Per la prima disuguaglianza useremo:

$$\frac{1}{1-x} \le e^{2x} \qquad \text{per } 0 \le x \le \frac{1}{2}\,.$$

- $\left|\langle H^{(\nu)}_{yy}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \le M_\nu$:

$$
\begin{aligned}
&\left|\langle H^{(\nu)}_{yy}(\,\cdot\,)\rangle^{-1}\right| = \\
&= \left|\left[\left(\langle H^{(\nu)}_{yy}(\,\cdot\,,0)\rangle - \langle Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle\right) + \langle Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle\right]^{-1}\right| \le \\
&\le \left|\langle Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle^{-1}\right| \left|\left[\mathbb{I} + \langle Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle^{-1}\langle H^{(\nu)}_{yy}(\,\cdot\,,0) - Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle\right]^{-1}\right| \le \\
&\le M_{\nu-1}\left(1 + 2M_{\nu-1}2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M}\right) \le \\
&\le M_{\nu-1}\left(1 + 4M2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M}\right) \le \\
&\le M_\nu(1-2^{-\nu}c\delta^*)(1+2^{-\nu}c\delta^*) \le \\
&\le M_\nu\,.
\end{aligned}
$$

Nella stima precedente abbiamo usato il fatto che la matrice

$$A \equiv \langle Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle^{-1}\langle H^{(\nu)}_{yy}(\,\cdot\,,0) - Q^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle$$

è tale che $|A| \le \dfrac{1}{2}$ (come segue facilmente da (2.30)) e di conseguenza

$$
\begin{aligned}
|(\mathbb{I}+A)^{-1}| &\le \sum_{k=0}^{\infty}|A|^k \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty}|A^k| \le \\
&\le 1 + |A|\sum_{k=0}^{\infty}|A^k| \le 1 + 2|A|\,.
\end{aligned}
$$

Passo 1

Dimostriamo ora che se $H^{(\nu)}(x,y)$ soddisfa le due disuguaglianze appena dimostrate, allora valgono le seguenti stime nella striscia Σ_{r_ν}:

1. $\left|H^{(\nu)}(x,y) - H^{(\nu)}(x,0) - (H^{(\nu)}_y(x,0)\,\cdot\,y)\right| \le M|y|^2$
2. $|H^{(\nu)}_y(x,y) - H^{(\nu)}_y(x,0)| \le 2M|y|$
3. $|H^{(\nu)}_y(x,y) - H^{(\nu)}_y(x,0) - H^{(\nu)}_{yy}(x,0)y| \le 2M\dfrac{|y|^2}{r_\nu - |y|}$.

Dimostrazione:

- Dalla formula di Taylor abbiamo:

$$H^{(\nu)}(x,y) - H^{(\nu)}(x,0) - (H^{(\nu)}_y(x,0)\,\cdot\,y) = \int_0^1\int_0^t (y\cdot H^{(\nu)}_{yy}(x,sy)y)\,ds\,dt\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\left|H^{(\nu)}(x,y) - H^{(\nu)}(x,0) - (H_y^{(\nu)}(x,0)\,\cdot\,y)\right| \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^t |y|^2 |H_{yy}^{(\nu)}(x,sy)|\,ds\,dt \leq \\
&\leq \frac{M_\nu}{2}|y|^2 \leq M|y|^2
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (2.32).

- Sempre dalla formula di Taylor ricaviamo:

$$H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0) = \int_0^1 H_{yy}^{(\nu)}(x,ty)y\,dt\ .$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
|H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0)| \;&\leq\; \int_0^1 |y||H_{yy}^{(\nu)}(x,ty)|\,dt \leq \\
&\leq\; M_\nu|y| \leq 2M|y|\ .
\end{aligned}$$

- Infine, applicando la formula di Taylor e il teorema dei residui, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)y = \\
&= \int_0^1 [H_{yy}^{(\nu)}(x,ty) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)]\,y\,dt = \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} H_{yy}^{(\nu)}(x,\lambda t y)\,y\,d\lambda\,dt
\end{aligned}$$

dove

$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| = \frac{r_\nu}{|y|}\ > 1\}\,.$$

Osserviamo, infatti, che la funzione nel secondo integrale ha due poli in $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ interni alla curva Γ ed i relativi residui sono, rispettivamente, $H_{yy}^{(\nu)}(x,ty)$ e $-H_{yy}^{(\nu)}(x,0)$.
Quindi:

$$\begin{aligned}
&|H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)y| \leq \\
&\leq\; \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{1}{|\lambda(\lambda-1)|}|H_{yy}^{(\nu)}(x,\lambda t y)|\,|y|\,|d\lambda|\,dt \leq \\
&\leq\; \frac{|y|M_\nu}{2\pi}\frac{1}{\frac{r_\nu}{|y|}\left(\frac{r_\nu}{|y|}-1\right)}|\Gamma| = M_\nu\frac{|y|^2}{r_\nu - |y|} \leq \\
&\leq\; 2M\frac{|y|^2}{r_\nu - |y|}\ .
\end{aligned}$$

Passo 2

Dal lemma 2.1.2 sappiamo che esistono e sono uniche le soluzioni $a^{(\nu)}(x)$, $\alpha^{(\nu)}$ e $b^{(\nu)}(x)$ delle equazioni (2.23) nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| < r_\nu$, in modo che $a^{(\nu)}(x)$ e $b^{(\nu)}(x)$ siano periodiche di periodo 1 ed abbiano media nulla. Dimostriamo ora che tali soluzioni soddisfano le seguenti stime:

1.
$$\begin{cases} |a^{(\nu)}(x)| \le \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^\tau} \\ \\ |\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| \le \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \end{cases} \qquad |\mathrm{Im}\, x| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \tag{2.33}$$

2.
$$\begin{cases} |b^{(\nu)}(x)| \le \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \\ \\ |b_x^{(\nu)}| \le \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \end{cases} \qquad |\mathrm{Im}\, x| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\ . \tag{2.34}$$

Dimostrazione: Cominciamo col definire
$$\rho_j = \frac{(8-j) r_\nu + j r_{\nu+1}}{8} \qquad \text{per} \quad 0 \le j \le 4$$
in modo che $\rho_0 = r_\nu$, $\rho_4 = \dfrac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}$ e
$$\rho_j - \rho_{j+1} = \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{8} \qquad (\text{per } j = 0,\, 1,\, 2,\, 3\,)\, .$$

1. Dal lemma 2.1.2 e da (2.24) segue che:
$$\begin{aligned} |a^{(\nu)}|_{\rho_1} &\le c_1 \left(\frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} \right)^\tau \left| H^{(\nu)}(x,0) - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0) \rangle \right|_{\rho_0} \le \\ &\le \frac{c_1 8^\tau \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^\tau} \end{aligned}$$
ed utilizzando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1) abbiamo anche:
$$|a_x^{(\nu)}|_{\rho_2} \le \frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} |a^{(\nu)}|_{\rho_1} \le \frac{c_1 8^{\tau+1} \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\ .$$
Questa stima, insieme a (2.23), (2.24) e (2.32), implica:
$$\begin{aligned} |\alpha^{(\nu)}| &\le \left| \langle H_{yy}^{(\nu)}(\,\cdot\,,0) \rangle^{-1} \right| \left| \omega - \langle H_y^{(\nu)}(\,\cdot\,,0) + H_{yy}^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\, a_x(\cdot) \rangle \right| \le \\ &\le M_\nu \left(|\omega - H_y^{(\nu)}(x,0)|_{\rho_2} + |H_{yy}^{(\nu)}(x,0) a_x|_{\rho_2} \right) \le \\ &\le M_\nu (1 + M_\nu c_1 8^{\tau+1}) \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \le \\ &\le 4M^2 (1 + c_1 8^{\tau+1}) \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\ . \end{aligned}$$

Quindi:

$$|\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}|_{\rho_2} \leq 5M^2(1 + c_1 8^{\tau+1}) \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \tag{2.35}$$

ed usando la (2.25) otteniamo la tesi.

2. Usando la (2.23), (2.24), (2.35) ed il lemma 2.1.2 otteniamo:

$$\begin{aligned} |b^{(\nu)}|_{\rho_3} &\leq c_1 \left(\frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} \right)^\tau \left| \omega - H_y^{(\nu)}(x,0) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \right|_{\rho_2} \leq \\ &\leq c_1 \left(\frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} \right)^\tau \left(1 + 10M^3(1 + c_1 8^{\tau+1})\right) \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \leq \\ &\leq \frac{11M^3}{8}(1 + c_1 8^{\tau+1})^2 \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \end{aligned}$$

e quindi usando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1) possiamo concludere:

$$\begin{aligned} |b_x^{(\nu)}|_{\rho_4} &\leq \frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} |b^{(\nu)}|_{\rho_3} \leq \\ &\leq 11M^3 \left(1 + c_1 8^{\tau+1}\right)^2 \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \ . \end{aligned}$$

Usando la (2.25) segue la tesi.

Passo 3

Abbiamo costruito in tal modo le funzioni

$$U(x) = U^{(\nu)}(x) = \alpha^{(\nu)} \cdot x + a^{(\nu)}(x) \qquad \text{e} \qquad V(x) = V^{(\nu)}(x) = x + b^{(\nu)}(x) \, ,$$

e possiamo quindi definire la trasformazione simplettica $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta \end{cases}$$

dove le funzioni u e v sono scelte in modo da soddisfare:

$$V \circ u = \mathrm{id} \qquad \text{e} \qquad U_x \circ u = v \ .$$

La trasformazione $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ mapperà la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ nella striscia $\Sigma_{\frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}}$ e soddisferà le seguenti stime nella striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$:

$$|\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta| \leq \frac{2^{-\nu} c\delta}{30M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) \tag{2.36}$$

$$|\psi_\zeta^{(\nu)}(\zeta) - \mathbb{I}| \leq \frac{2^{-\nu} c\delta}{7M^3} \ . \tag{2.37}$$

Dimostrazione: Come prima cosa notiamo che, usando (2.22), (2.25), (2.27), il fatto che $\lambda_\nu \leq \frac{\lambda_0}{2^\nu}$ per ogni ν, e l'ipotesi induttiva $\varepsilon_\nu \leq \delta_\nu r^{2\tau+2}$, possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
\frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} &\leq c_2\delta_\nu\left(\frac{2^{\nu+2}}{1-\theta}\right)^{2\tau+2} = \\
&= \frac{\lambda_\nu}{2^{2\tau+3}(6Mc_2+1)}\cdot\frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} \leq \\
&\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{66M^3}\cdot\frac{1-\theta}{2^{\nu+2}}\,, \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio, che $6Mc_2 + 1 \geq 6Mc_2 \geq 66M^3$.

Perciò otteniamo dal Passo 2 che per

$$|\mathrm{Im}\,x| \leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \qquad e \qquad \xi = V^{(\nu)}(x)$$

valgono le seguenti stime:

$$\begin{aligned}
|x-\xi| &= |b^{(\nu)}(x)| \leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \leq \\
&\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{66M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) \\
|b_x^{(\nu)}| &\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{66M^3}\,.
\end{aligned}$$

Questo dimostra che $u = \left(V^{(\nu)}\right)^{-1}$ mappa la striscia $|\mathrm{Im}\,\xi| \leq \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4}$ nella striscia $|\mathrm{Im}\,x| \leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}$. Infatti:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\,x| &= |\mathrm{Im}\,x - \mathrm{Im}\,\xi| + |\mathrm{Im}\,\xi| \leq |x-\xi| + |\mathrm{Im}\,\xi| \leq \\
&\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{66M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} \leq \\
&\leq \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{4} + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} = \\
&= \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Se, inoltre, $|\eta| \leq \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4}$ e $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ allora

$$y = \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)} + \eta + b_x^{(\nu)}\eta$$

e quindi, usando il Passo 2 e (2.22), si ottiene che

$$\begin{aligned}
|y-\eta| &\leq |\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}|+|b_x^{(\nu)}\eta| \leq \\
&\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{\tau+1}}+\frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4} \leq \\
&\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\left(r_\nu-r_{\nu+1}+\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4}\right) = \\
&\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\left(\frac{5r_\nu-r_{\nu+1}}{4}\right) \leq \\
&\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{r}{4}\left(5\frac{1+\theta}{2}+5\frac{1-\theta}{2^{\nu+1}}-\frac{1+\theta}{2}-\frac{1-\theta}{2^{\nu+2}}\right) \leq \\
&\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{r}{4}\left(2(1+\theta)+\frac{9}{2}(1-\theta)\right) \leq \\
&\leq \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{17}{8}r \leq \\
&\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{66M^3}\frac{17}{8}(r_\nu-r_{\nu+1}) \\
&\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{30M^3}(r_\nu-r_{\nu+1})\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
|y| &\leq |y-\eta|+|\eta| \leq \\
&\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{30M^3}(r_\nu-r_{\nu+1})+\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4} \leq \\
&\leq \frac{r_\nu-r_{\nu+1}}{4}+\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4} = \\
&= \frac{r_\nu+r_{\nu+1}}{2}
\end{aligned}$$

e quindi (2.36) è soddisfatta per $\Sigma_{\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4}}$. Infine la (2.37) segue come immediata applicazione delle stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1, con $r=\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4}$ e $\rho=r_{\nu+1}$).

Passo 4

Entriamo ora nel cuore del passo induttivo. Definiamo

$$H^{(\nu+1)}=H^{(\nu)}\circ\psi^{(\nu)}$$

e facciamo vedere che valgono (2.26) e (2.29).

Dimostrazione: Come prima cosa mostriamo che (2.29) continua a valere se sostituiamo ν con $\nu+1$. A tale scopo definiamo

$$h=\langle H^{(\nu)}(\,\cdot\,,0)\rangle+(\alpha^{(\nu)}\cdot\omega)$$

e

$$z = (x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) = \psi^{(\nu)}(\xi, 0),$$

con $|\mathrm{Im}\,\xi| \le r_{\nu+1}$. Osserviamo innanzitutto che, per come abbiamo scelto la trasformazione $\psi^{(\nu)}$ (vedi 2.23), la h che abbiamo appena definito, coincide proprio con la media $\langle H^{(\nu+1)}(\,\cdot\,, 0)\rangle$.

Dal Passo 3 segue che

$$|\mathrm{Im}\,x| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \qquad \text{e} \qquad |y| = |\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\,.$$

Inoltre, segue da (2.23) che

$$\langle H^{(\nu)}(\,\cdot\,, 0)\rangle = H^{(\nu)}(x, 0) + Da^{(\nu)}(x)$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned}
H^{(\nu+1)}(\xi, 0) - h &= H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - h = \\
&= H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + \langle H^{(\nu)}(\,\cdot\,, 0)\rangle + (\alpha^{(\nu)} \cdot \omega) = \\
&= H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - H^{(\nu)}(x, 0) - \\
&\quad - H_y^{(\nu)}(x, 0) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + \\
&\quad + (H_y^{(\nu)}(x, 0) - \omega) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})\,.
\end{aligned}$$

Quindi usando il Passo 1, il Passo 2, (2.24) e (2.25):

$$\begin{aligned}
&|H^{(\nu+1)}(\xi, 0) - h| \le \\
&\quad \le |H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - H^{(\nu)}(x, 0) - H_y^{(\nu)}(x, 0) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})| + \\
&\qquad + |(H_y^{(\nu)}(x, 0) - \omega) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)})| \le \\
&\quad \le M|\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}|^2 + |H_y^{(\nu)}(x, 0) - \omega||\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| \le \\
&\quad \le \frac{Mc_2^2 + c_2}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2 \le \\
&\quad \le \frac{c_3}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, sempre dalla (2.23) segue che

$$\omega = Db^{(\nu)}(x) + H_y^{(\nu)}(x, 0) + H_{yy}^{(\nu)}(x, 0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}(x))\,;$$

quindi, ricordando la definizione di $H^{(\nu+1)}$ ed applicando la *chain rule* otteniamo:

$$\begin{aligned}
H_y^{(\nu+1)}(\xi, 0) - \omega &= (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})H_y^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - \omega = \\
&= H_y^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - H_y^{(\nu)}(x, 0) - \\
&\quad - H_{yy}^{(\nu)}(x, 0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + \\
&\quad + b_x^{(\nu)}\left[H_y^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - H_y^{(\nu)}(x, 0)\right] + \\
&\quad + b_x^{(\nu)}\left(H_y^{(\nu)}(x, 0) - \omega\right)
\end{aligned}$$

ed usando i risultati del Passo 1 e del Passo 2, ed il fatto che

$$|\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} ,$$

possiamo concludere:

$$\begin{aligned}
&|H_y^{(\nu+1)}(\xi,0) - \omega|(r_{\nu+1} - r_{\nu+2})^{\tau+1} \le \\
&\quad \le \left(\frac{2M|\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}|^2}{r_\nu - |\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}|} + 2M|b_x^{(\nu)}||\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| + |b_x^{(\nu)}||H_y^{(\nu)}(x,0) - \omega| \right) \cdot \\
&\quad\quad \cdot \left(\frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2} \right)^{\tau+1} \le \\
&\quad \le \frac{6Mc_2^2 + c_2}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\, \varepsilon_\nu^2 = \frac{c_3}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\, \varepsilon_\nu^2
\end{aligned}$$

e questo dimostra la stima (2.26).

Combinando (2.26) con (2.27) ed usando il fatto che $\varepsilon_\nu \le \delta_\nu r^{2\tau+2}$, si ottiene:

$$\varepsilon_{\nu+1} \le \frac{c_3 \delta_\nu^2 r^{4\tau+4}}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \le \delta_{\nu+1} r^{2\tau+2} \tag{2.39}$$

e questo dimostra le prime due disuguaglianze in (2.29), sostituendo ν con $\nu+1$.

Infine, supponiamo che $\zeta \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$ e definiamo $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$. Dal passo 3, sappiamo che $z \in \Sigma_{\frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}}$ e segue dalla definizione di $H^{(\nu+1)}$ che:

$$H_{yy}^{(\nu+1)}(\xi,\eta) = (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)}) H_{yy}^{(\nu)}(x,y)(\mathbb{I} + (b_x^{(\nu)})^T) .$$

Quindi, usando il Passo 2 e (2.38) (i.e. il fatto che $|b_x^{(\nu)}| < 1$), otteniamo:

$$\begin{aligned}
|H_{yy}^{(\nu+1)}(\zeta) - H_{yy}^{(\nu)}(z)| &= |(\mathbb{I} + b_x^{(\nu)}) H_{yy}^{(\nu)}(z)(\mathbb{I} + (b_x^{(\nu)})^T) - H_{yy}^{(\nu)}(z)| \le \\
&\le 2|b_x^{(\nu)}||H_{yy}^{(\nu)}(z)| + |b_x^{(\nu)}|^2 |H_{yy}^{(\nu)}(z)| \le \\
&\le 3|b_x^{(\nu)}||H_{yy}^{(\nu)}(z)| \le \frac{6Mc_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \le \\
&\le 6M \frac{2^{-\nu} c\delta}{66M^3} \cdot \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} \le \\
&\le \frac{2^{-\nu} c\delta}{11M^2} .
\end{aligned}$$

Inoltre, usando il Passo 3, il fatto che $|x - \xi| \le \dfrac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2}$ e $|y - \eta| \le \dfrac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2}$, l'identità

$$H_{yy}^{(\nu)}(z) - H_{yy}^{(\nu)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)} H_{yy}^{(\nu)}(\zeta + \lambda(z - \zeta))\, d\lambda ,$$

dove

$$\Gamma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = \min \left\{ \frac{r_\nu - |\mathrm{Im}\, \xi|}{|x - \xi|},\ \frac{r_\nu - |\eta|}{|y - \eta|} \right\} > 1 \right\} ,$$

e procedendo come nella dimostrazione del punto 3 del Passo 1 otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&|H^{(\nu)}_{yy}(z) - H^{(\nu)}_{yy}(\zeta)| \leq \\
&\leq\ 2M\ \max\left\{\frac{|x-\xi|}{r_\nu - |\mathrm{Im}\,\xi| - |x-\xi|},\ \frac{|y-\eta|}{r_\nu - |\mathrm{Im}\,\eta| - |y-\eta|}\right\} \leq \\
&\leq\ 2M\frac{2^{-\nu}c\delta}{30M^3}\frac{(r_\nu - r_{\nu+1})}{r_\nu - \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2} - r_{\nu+1}} = \\
&\leq\ 4M\frac{2^{-\nu}c\delta}{30M^3}\frac{(r_\nu - r_{\nu+1})}{(r_\nu - r_{\nu+1})} = \\
&=\ \frac{2^{-\nu}c\delta}{7M^2}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi, da quanto appena mostrato possiamo concludere che:

$$
\begin{aligned}
|H^{(\nu+1)}_{yy}(\zeta) - H^{(\nu)}_{yy}(\zeta)| \ &\leq\ |H^{(\nu+1)}_{yy}(\zeta) - H^{(\nu)}_{yy}(z)| + \\
&\quad + |H^{(\nu)}_{yy}(z) - H^{(\nu)}_{yy}(\zeta)| \leq \\
&\leq\ \frac{2^{-\nu}c\delta}{11M^2} + \frac{2^{-\nu}c\delta}{7M^2} \leq \\
&\leq\ \frac{2^{-\nu}c\delta}{4M^2}\,,
\end{aligned}
$$

e questo conclude la dimostrazione del Passo 4.

Con quest'ultimo passo abbiamo completato il passo induttivo; ci rimane da mostrare l'uniforme convergenza della successione

$$\phi^{(\nu)} = \psi^{(0)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu)}$$

nella striscia $\Sigma_{\theta r}$ e le stime (2.21). Prima di tutto, osserviamo che dal Passo 3 si ha che se $\zeta \in \Sigma_{r_\nu}$ e $z = \psi^{(\mu+1)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu-1)}$, allora $z \in \Sigma_{r_\mu}$ e

$$\left|\psi^{(\mu)}_\zeta\left(\psi^{(\mu+1)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu-1)}\right)\right| \leq 1 + \frac{2^{-\mu}c\delta}{7M^3}.$$

Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\nu-1}\log\left(1 + \frac{2^{-k}c\delta}{7M^3}\right) \ &\leq\ \sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{2^{-k}c\delta}{7M^3} \leq \\
&\leq\ \frac{2c\delta}{7M^3}\,,
\end{aligned}
$$

quindi, facendo l'esponenziale di ambo i membri dell'uguaglianza si ottiene:

$$\prod_{k=0}^{\nu-1}\left(1 + \frac{2^{-k}c\delta}{7M^3}\right) \leq e^{\frac{2c\delta}{7M^3}}\,.$$

Questo implica, applicando la *chain rule*:

$$\begin{aligned}\left|\phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)\right| &= \left|\left(\psi^{(0)}\circ\ldots\circ\psi^{(\nu-1)}\right)_\zeta\right| = \\ &= \prod_{k=0}^{\nu-1}\left(1+\frac{2^{-k}c\delta}{7M^3}\right)\le e^{\frac{2c\delta}{7M^3}}\le 2\end{aligned}$$

per $\zeta\in\Sigma_{r_\nu}$ e quindi dal Passo 3 otteniamo per $\nu\ge 1$:

$$\begin{aligned}\left|\phi^{(\nu)}(\zeta)-\phi^{(\nu-1)}(\zeta)\right| &\le \left|\phi_\zeta^{(\nu-1)}\right|_{r_\nu}\left|\psi^{(\nu)}(\zeta)-\zeta\right|\le \\ &\le 2\left|\psi^{(\nu)}(\zeta)-\zeta\right|\le\frac{c\delta}{15M^3}(r_\nu-r_{\nu+1})\end{aligned}$$

nella striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$. Osserviamo che la stessa disuguaglianza vale per $\nu=0$ se definiamo $\phi^{(-1)}=\mathrm{id}$; infatti, dal Passo 3 segue che:

$$\begin{aligned}\left|\phi^{(0)}(\zeta)-\phi^{(-1)}(\zeta)\right| &= \left|\phi^{(0)}(\zeta)-\zeta\right|\le \\ &\le \frac{c\delta}{30M^3}(r_\nu-r_{\nu+1})\,.\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che la funzione limite $\phi=\lim\phi^{(\nu)}$ soddisfa la seguente stima:

$$\begin{aligned}|\phi(\zeta)-\zeta| &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left|\phi^{(k)}(\zeta)-\phi^{(k-1)}(\zeta)\right|\le\frac{c\delta}{15M^3}\sum_{k=0}^{\infty}(r_k-r_{k+1})\le \\ &\le \frac{c\delta}{15M^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\theta)}{2^{k+2}}r=\frac{c\delta}{30M^3}(1-\theta)r\end{aligned}$$

nella striscia $\Sigma_{\frac{r(1+\theta)}{2}}$. Inoltre, applicando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1):

$$\begin{aligned}|\phi_\zeta(\zeta)-\mathbb{I}| &\le \frac{2}{(1-\theta)r}\frac{c\delta}{30M^3}(1-\theta)r\le \\ &\le \frac{c\delta}{15M^3}\end{aligned}$$

e con questo abbiamo provato le prime due disuguaglianze in (2.21).

Osserviamo che la hamiltoniana trasformata è data da

$$K(\zeta)=H\circ\phi(\zeta)=\lim_{\nu\to+\infty}H^{(\nu)}(\zeta)$$

nella striscia $\Sigma_{\theta r}$ e quindi soddisfa (2.10); in particolare, la seconda equazione in (2.10) segue dal fatto che, per la (2.27) e (2.28), non solo ε_ν ma anche $(r_\nu-r_{\nu+1})^{-(\tau+1)}\varepsilon_\nu$ converge a zero; infatti, usando (2.39) ci basta dimostrare che $\delta_{\nu+1}\to 0$:

$$\begin{aligned}\delta_{\nu+1} &= c2^{\nu(2\tau+3)}\delta_\nu^2= \\ &= \left(c^{\sum_{k=0}^{\nu}2^k}\right)\left(2^{(2\tau+3)\sum_{k=0}^{\nu}2^k(\nu-k)}\right)\delta^{2^{\nu+1}}\le \\ &\le \left(c\delta 2^{2\tau+3}\right)^{2^{\nu+1}}\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

in quanto[10] per ipotesi abbiamo assunto che $c\delta^* \le 2^{-(2\tau+4)}$.

Utilizzando la (2.29) otteniamo che:

$$\begin{aligned} |K_{\eta\eta}(\zeta) - Q(\zeta)| &= \lim_{\nu\to\infty} \left| H^{(\nu)}_{yy}(\zeta) - Q^{(0)}(\zeta) \right| \le \\ &\le \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \left| H^{(\mu)}_{yy}(\zeta) - Q^{(\mu)}(\zeta) \right| \le \\ &\le \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{-\mu} \frac{c\delta}{4M} = \frac{c\delta}{2M} \ . \end{aligned}$$

Al fine di stabilire la stima per $v \circ u^{-1}$ osserviamo che

$$v \circ u^{-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(V_x^{(0)^T} V_x^{(1)^T} \ldots V_x^{(\nu-1)^T} U_x^{(\nu)} \right)$$

nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \le \theta r$. Osserviamo che abbiamo usato una notazione semplificata:

$$V_x^{(\mu)} \equiv V_x^{(\mu)} \left(V^{(\mu-1)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) \right) .$$

Questa espressione è ben definita per $|\mathrm{Im}\, x| \le \theta r$, in quanto segue dal Passo 2, dalla definizione di $V^{(\nu)}$, dalla (2.22) e dalla (2.29) che in tale dominio:

$$\begin{aligned} \left| V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) - V^{(\nu-1)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) \right| &\le \frac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \le \\ &\le r_\nu - r_{\nu+1} \end{aligned}$$

e, osservando che $V^{(0)} = x$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) - x \right| &\le \sum_{k=1}^{\nu} \left| V^{(k)}(\ldots) - V^{(k-1)}(\ldots) \right| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\nu} (r_k - r_{k-1}) \le r - r_{\nu+1} \le \\ &\le \frac{1-\theta}{2} r \le \\ &\le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} - \theta r \ ; \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \left| V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) \right| &\le |x| + \left| V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) - x \right| \le \\ &\le \theta r + \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} - \theta r \le \\ &\le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} , \end{aligned}$$

[10] Osserviamo che nella stima appena fatta abbiamo usato la seguente uguaglianza (che si dimostra facilmente per induzione su ν):

$$\sum_{k=0}^{\nu} 2^k (\nu - k) = 2^{\nu+1} - (\nu + 2) \ .$$

e questo mostra che l'espressione sopra è ben definita.

Infine, dal passo 2 e dalla (2.38) riusciamo a concludere che:

$$\begin{aligned}
\left|v \circ u^{-1}(x)\right| &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|V_x^{(0)^T}\right| \left|V_x^{(1)^T}\right| \dots \left|V_x^{(\nu-1)^T}\right| \left|U_x^{(\nu)}\right| \leq \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(1+\frac{c\delta}{7M^3}\right)\dots\left(1+\frac{2^{1-\nu}c\delta}{7M^3}\right)\right] \frac{2^{-\nu}c\delta}{66M^3} r^{\tau+1} \leq \\
&\leq \frac{e^{\frac{2c\delta}{7M^3}}}{66M^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} c\delta r^{\tau+1} \leq \\
&\leq \frac{c\delta}{15M^3} r^{\tau+1}
\end{aligned}$$

nella striscia $|\operatorname{Im} x| \leq \theta r$. E questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Dal teorema appena dimostrato, possiamo dedurre il seguente corollario.

Corollario 2.2.2. (Teorema KAM caso analitico II)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < r \leq 1$ e $M \geq 1$ e sia $\Omega \supset \overline{B_r(y_0)}$ un aperto di $\mathbb{R}^n$.
Sia $H(x,y) = h(y) + f(x,y)$ una funzione hamiltoniana con $(x,y) \in \mathbb{T}^n \times \Omega$, con un'estensione olomorfa nella striscia

$$\Sigma_{r,y_0} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\operatorname{Im} x| \leq r,\ |y - y_0| \leq r\}.$$

Supponiamo inoltre che valgano le seguenti condizioni per la hamiltoniana imperturbata:

(i) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(y_0) =: \omega$ *sia un vettore (γ,τ) diofantino,*

(ii) $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z)\right|_{\Sigma_{r,y_0}} \leq M\,,$

(iii) $\left|\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y_0)\right)^{-1}\right| \leq M\,.$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma,\tau,\theta,M,n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma,\tau,\theta,M,n) > 0$$

in modo che $c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$ e che valga quanto segue per $(x,y) \in \Sigma_{r,y_0}$ e per un qualche $\delta \leq \delta^*$:

$$\begin{aligned}
&|f(x,y_0) - \langle f(\cdot,y_0)\rangle| \leq \delta r^{2\tau+2} \\
&|f_y(x,y_0)| \leq \delta r^{\tau+1} \\
&|f_{yy}(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M}\,.
\end{aligned}$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ *(dove* $z = (x, y)$ *e* $\zeta = (\xi, \eta)$*), dalla striscia* $\Sigma_{\theta r,\, y_0}$ *nella striscia* $\Sigma_{r,\, y_0}$*, della forma:*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y - y_0 = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta \,, \end{cases}$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *entrambe periodiche di periodo* 1 *e tale che la hamiltoniana trasformata* $K = H \circ \phi$ *soddisfi*

$$K_\xi(\xi, y_0) = 0, \quad K_\eta(\xi, y_0) = \omega \,.$$

Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r,\, y_0}$*:*

$$\begin{aligned} |\phi(\zeta) - \zeta| &\le \frac{c\delta}{30M^3}(1-\theta)r \\ |\phi_\zeta(\zeta) - \mathbb{I}| &\le \frac{c\delta}{15M^3} \\ |K_{\eta\eta}(\zeta) - h_{yy}(\zeta)| &\le \frac{c\delta}{2M} \\ |v \circ u^{-1}(x)| &\le \frac{c\delta}{15M^3} r^{\tau+1} \,. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Teorema KAM: caso differenziabile (versione di Salamon)

Si deve a Jürgen Moser una prima dimostrazione del Teorema KAM per sistemi hamiltoniani differenziabili, non necessariamente analitici (cfr. [45] e [46]). Più recentemente Moser dimostrò una versione differenziabile del teorema di Kolmogorov, usando una tecnica di approssimazione dovuta a Moser, Jackson, Zehnder e Bernstein. Egli concluse la presenza di una perdita di differenziabilità: se H è C^l (con l sufficientemente grande, come vedremo meglio in seguito), allora tale teorema afferma l'esistenza di tori invarianti di classe C^{l-d}, dove $d > 0$ dipende dal numero n di gradi di libertà e dall'esponente diofantino τ, ma non dall'ordine di differenziabilità l. L'approccio di Moser è basato sull'approssimazione di funzioni differenziabili attraverso una successione di funzioni analitiche: l'osservazione fondamentale è che le proprietà qualitative relative alla differenziabilità di una funzione, possono essere caratterizzate in termini di stime quantitative per una successione approssimante di funzioni analitiche.

Osservazione. Per quanto riguarda la regolarità della funzione hamiltoniana, richiederemo la condizione che sia C^l con $l > 2\tau+2 > 2n$; quello che otterremo è che le soluzioni u e v sono di classe C^m con $m < l-2\tau-2$ e la funzione $v \circ u^{-1}$, il cui grafico è il toro invariante, è di classe $C^{m+\tau+1}$. Sottolineiamo che tale risultato è molto vicino alla condizione ottimale: infatti esistono in letteratura vari controesempi a conferma di tale fatto (vedi ad esempio [37], [65] o [42]).

Prima di procedere però con la dimostrazione del teorema di Moser, è opportuno richiamare alcuni risultati relativi agli spazi delle funzioni hölderiane e alla tecnica di approssimazione sopra menzionata.

3.1 Spazi hölderiani

3.1.1 Definizione e proprietà

Cominciamo con l'introdurre gli *spazi hölderiani*.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $0 < \alpha < 1$ e definiamo

$$\begin{aligned} H_{C^\alpha} : \quad C(\Omega, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ f &\longmapsto \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ 0<|x-y|<1}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Introduciamo quindi la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} |\cdot|_{C^\alpha} : \quad C(\Omega, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ f &\longmapsto \max\{H_{C^\alpha}(f),\, |f|_{C^0}\} , \end{aligned}$$

dove $|f|_{C^0} := \sup_\Omega |f|$.

Definizione 3.1.1. (Funzioni hölderiane con esponente $0 < \alpha < 1$) Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice *hölderiana con esponente* $0 < \alpha < 1$, se

$$|f|_{C^\alpha} < \infty .$$

Denoteremo inoltre con $C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ lo spazio costituito da tali funzioni, i.e:

$$C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m) : \ |f|_{C^\alpha} < \infty\} .$$

Si dimostra che $(C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m), |\cdot|_{C^\alpha})$ è uno spazio normato e completo, cioè di Banach.

Sia ora $k \in \mathbb{N}$ e consideriamo $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$; definiremo:

$$|f|_{C^k} = \max_{\beta\in\mathbb{N}^n,\ |\beta|\le k} \{|\partial^\beta f|_{C^0}\}$$

dove $|\beta| = \sum_{i=1}^n |\beta_i|$.

Questo ci permette di generalizzare la definizione precedente.

Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $\alpha > 0$; denotiamo con $k = [\alpha]$ la sua parte intera e con $\mu = \alpha - k$ la sua parte frazionaria, i.e.

$$\alpha = k + \mu .$$

Introduciamo la seguente applicazione:

$$
\begin{aligned}
|\cdot|_{C^\alpha}: \quad C^k(\Omega,\mathbb{R}^m) &\longrightarrow [0,+\infty] \\
f &\longmapsto \max\left\{|f|_{C^k},\ \max_{\beta\in\mathbb{N}^n,\ |\beta|=k}\left\{H_{C^\mu}(\partial^\beta f)\right\}\right\}.
\end{aligned}
$$

Osservazione. Osserviamo che, per $\alpha \geq 1$, la definizione appena data è equivalente a:

$$|f|_{C^\alpha} = \max\left\{|f|_{C^0},\ \max_{1\leq i\leq n}\{|\partial_{x_i} f|_{C^{\alpha-1}}\}\right\}.$$

Definizione 3.1.2. (Funzioni hölderiane con esponente $\alpha > 0$)
Una funzione $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice *hölderiana con esponente* $\alpha > 0$, se

$$|f|_{C^\alpha} < \infty.$$

Anche in tal caso denoteremo con $C^\alpha(\Omega,\mathbb{R}^m)$ lo spazio costituito da tali funzioni, i.e:

$$C^\alpha(\Omega,\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\Omega,\mathbb{R}^m):\ |f|_{C^\alpha} < \infty\}.$$

Si può dimostrare che anche tale spazio $(C^\alpha(\Omega,\mathbb{R}^m), |\cdot|_{C^\alpha})$ è uno spazio di Banach; inoltre se $\alpha > \beta > 0$ allora:

$$C^\alpha(\Omega,\mathbb{R}^m) \subset C^\beta(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Definizione 3.1.3. (Lo spazio $C_0^s(\Omega,\mathbb{R}^m)$) Se Ω è di misura finita, allora indicheremo con $C_0^s(\Omega,\mathbb{R}^m)$ il sottospazio di $C^s(\Omega,\mathbb{R}^m)$ costituito da tutte le funzioni aventi media nulla, cioè:

$$f \in C_0^s(\Omega,\mathbb{R}^m) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in C^s(\Omega,\mathbb{R}^m) \quad \text{e} \quad \langle f\rangle := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f \ = 0.$$

3.1.2 Alcune stime di interpolazione

Dimostriamo ora una serie di disuguaglianze elementari di interpolazione, che ci forniranno delle relazioni tra gli spazi di Hölder con esponenti diversi.

Cominciamo con un primo risultato relativo al caso di spazio con esponenti aventi la stessa parte intera[1].

Lemma 3.1.4. *Siano $\nu \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1$ e consideriamo*

$$0 \leq k = \nu + \alpha < m = \nu + \beta < l = \nu + \gamma.$$

Allora per ogni $f \in C^l(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ vale la seguente disuguaglianza:

$$(|f|_{C^m})^{l-k} \leq 2^{l-k}(|f|_{C^k})^{l-m}(|f|_{C^l})^{m-k}. \tag{3.2}$$

[1] In realtà consideriamo il caso in cui $k, l, m \in [\nu, \nu+1]$ per qualche $\nu \in \mathbb{N}$, quindi l'esponente maggiore potrebbe avere parte intera più grande (i.e. $l = \nu + 1$).

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che la (3.2) si può anche scrivere nella forma

$$|f|_{C^m} \leq 2(|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu}\,,$$

avendo definito

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{l-m}{l-k} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \\ 1-\mu &= \frac{m-k}{l-k} = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Supponiamo come prima approssimazione che $\gamma < 1$ (cioè gli esponenti hanno la stessa parte intera) e procediamo per induzione su ν:

- (Base induzione: $\nu = 0$)
  - Cominciamo dal caso $\alpha = 0$. In tal caso osserviamo che da (3.3) otteniamo:
  $$1-\mu = \frac{\beta}{\gamma} \implies \beta = \gamma(1-\mu)\,.$$
  Quindi:
  $$\begin{aligned} H_{C^m}(f) &= H_{C^\beta}(f) = \\ &= \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} = \\ &= \sup_{0<|x-y|<1} \left(\frac{|f(x)-f(y)|^{1-\mu}}{|x-y|^{\gamma(1-\mu)}} |f(x)-f(y)|^\mu \right) \leq \\ &\leq 2^\mu (|f|_{C^0})^\mu (|f|_{C^\gamma})^{1-\mu} \leq \\ &\leq 2(|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu}\,; \end{aligned} \tag{3.4}$$
  d'altronde
  $$\begin{aligned} |f|_{C^0} &= (|f|_{C^0})^\mu (|f|_{C^0})^{1-\mu} \leq \\ &\leq (|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu}\,, \end{aligned}$$
  e quindi mettendo insieme le due stime otteniamo:
  $$|f|_{C^m} \leq 2(|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu}\,.$$
  - Sia ora $\alpha > 0$. Osserviamo che da (3.3) si ha
  $$\beta = \alpha\mu + \gamma(1-\mu)\,;$$
  infatti:
  $$\begin{aligned} \alpha\mu + \gamma(1-\mu) &= \alpha\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} + \gamma\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \\ &= \frac{\alpha\gamma - \beta\alpha + \gamma\beta - \alpha\gamma}{\gamma-\alpha} = \\ &= \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma-\alpha} = \beta\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} H_{C^m}(f) &= H_{C^\beta}(f) = \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} = \\ &= \sup_{0<|x-y|<1} \left(\frac{|f(x)-f(y)|^{1-\mu}}{|x-y|^{\gamma(1-\mu)}} \frac{|f(x)-f(y)|^\mu}{|x-y|^{\alpha\mu}} \right) \leq \\ &\leq (|f|_{C^\alpha})^\mu (|f|_{C^\gamma})^{1-\mu} \leq \\ &\leq (|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu} ; \end{aligned}$$

d'altronde

$$\begin{aligned} |f|_{C^0} &= (|f|_{C^0})^\mu (|f|_{C^0})^{1-\mu} \leq \\ &\leq (|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu} . \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due stime otteniamo:

$$|f|_{C^m} \leq (|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu} .$$

Quindi abbiamo dimostrato la base induttiva.

- (Passo induttivo) Sia ora $\nu \geq 1$. Supponiamo che tale disuguaglianza sia vera per $\nu - 1$ e dimostriamola per ν; ricordiamo che

$$|f|_{C^m} = \max \left\{ |f|_{C^0}, \max_{1\leq i\leq n} \{ |\partial_{x_i} f|_{C^{m-1}} \} \right\} .$$

Stimiamo separatamente i vari termini:

  - analogamente a quanto abbiamo fatto i precedenza:

$$\begin{aligned} |f|_{C^0} &= (|f|_{C^0})^\mu (|f|_{C^0})^{1-\mu} \leq \\ &\leq (|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu} ; \end{aligned}$$

  - usando l'ipotesi induttiva, otteniamo che per ogni $i = 1 \ldots, n$:

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} f|_{C^{m-1}} &\leq 2(|\partial_{x_i} f|_{C^{k-1}})^\mu (|\partial_{x_i} f|_{C^{l-1}})^{1-\mu} \leq \\ &\leq 2(|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu} . \end{aligned}$$

Quindi:

$$|f|_{C^m} \leq 2(|f|_{C^k})^\mu (|f|_{C^l})^{1-\mu}$$

e questo completa la dimostrazione del lemma nel caso $\gamma < 1$.

Osserviamo che la dimostrazione appena fatta si estende immediatamente anche al caso $\gamma = 1$. Infatti, dal teorema di Lagrange:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \frac{|f'(\xi)||x-y|}{|x-y|} = |f'(\xi)| \leq |f|_{C^1} ,$$

e quindi, apportando le opportune modifiche in (3.4), si dimostra la base induttiva; la correzione del passo induttivo è immediata. □

Vorremmo estendere il risultato del lemma precedente anche al caso di esponenti con parti intere diverse. Per far questo ci servirà un ulteriore lemma.

Lemma 3.1.5. *Siano* $0 \leq \alpha, \gamma < 1$ *e sia* $\nu \in \mathbb{N}^+$. *Allora per ogni funzione* $f \in C^{\nu+\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$(|f|_{C^\nu})^{1+\gamma-\alpha} \leq 4^{1+\gamma-\alpha}(|f|_{C^{\nu-1+\alpha}})^\gamma(|f|_{C^{\nu+\gamma}})^{1-\alpha}\,. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Distinguiamo vari casi:

i) Dimostriamo innanzitutto il caso $\nu = 1$. Supponiamo che f non sia identicamente costante, altrimenti tale disuguaglianza diventa triviale. Osserviamo, inoltre, che la (3.5) si può anche scrivere:

$$|f|_{C^1} \leq 4|f|^{\mu}_{C^\alpha}|f|^{1-\mu}_{C^{1+\gamma}}$$

avendo definito

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\gamma}{1+\gamma-\alpha} \\ 1-\mu &= \frac{1-\alpha}{1+\gamma-\alpha}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Osserviamo che

$$|f|_{C^1} = \max\left\{|f|_{C^0},\ \max_{1\leq i\leq n}\{|\partial_{x_i} f|_{C^0}\}\right\}$$

e stimiamo separatamente i vari termini. Come prima cosa notiamo che

$$|f|_{C^0} \quad = \quad (|f|_{C^0})^\mu(|f|_{C^0})^{1-\mu} \leq (|f|_{C^\alpha})^\mu(|f|_{C^{1+\gamma}})^{1-\mu}\,;$$

al fine di stimare il secondo termine, distinguiamo il caso $\alpha = 0$ da quello $\alpha > 0$.

– Cominciamo dal caso $\alpha = 0$. Fissiamo $1 \leq i \leq n$ e definiamo la seguente normalizzazione di f:

$$g(x) = af\left(\frac{x}{b}\right)$$

scegliendo a e b in modo da soddisfare

$$\begin{cases} |\partial_{x_i} g|_{C^0} = 1 \\ 4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} g) = 1\,. \end{cases}$$

Osservando che

$$\begin{cases} |\partial_{x_i} g| = \dfrac{|a|}{|b|}|\partial_{x_i} f| \\ H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} g) = \dfrac{|a|}{|b|^{1+\gamma}}H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} f)\,, \end{cases}$$

si può concludere che è sufficiente scegliere:

$$\begin{cases} |a| = \dfrac{(4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i}f))^{\frac{1}{\gamma}}}{(|\partial_{x_i}f|_{C^0})^{1+\frac{1}{\gamma}}} \\ |b| = \left(\dfrac{4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i}f)}{|\partial_{x_i}f|_{C^0}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Inoltre, a meno di riflessioni e traslazioni possiamo assumere che:

$$g(0) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_{x_i}g(0) \geq \frac{3}{4} \tag{3.8}$$

(è sempre possibile realizzare ciò, scegliendo opportunamente il segno di a e b).

Osserviamo che vale la seguente rappresentazione, che segue immediatamente dalla formula di Taylor all'ordine zero con resto di Lagrange:

$$\begin{aligned} g(e_i) &= g(0) + \partial_{x_i}g(\xi e_i) = \\ &= g(0) + \partial_{x_i}g(0) + \frac{\partial_{x_i}g(\xi e_i) - \partial_{x_i}g(0)}{\xi^\gamma}\xi^\gamma \end{aligned} \tag{3.9}$$

dove e_i è un vettore di modulo 1, le cui componenti sono $(e_i)_j = \delta_{ij}$, mentre $\xi \in (0,1)$.

Per come abbiamo scelto la g possiamo concludere:

$$\left|\frac{\partial_{x_i}g(\xi e_i) - \partial_{x_i}g(0)}{\xi^\gamma}\xi^\gamma\right| \leq H_{C^\gamma}(\partial_{x_i}g) = \frac{1}{4},$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial_{x_i}g(\xi e_i) - \partial_{x_i}g(0)}{\xi^\gamma}\xi^\gamma \geq -\frac{1}{4}. \tag{3.10}$$

Quindi, da (3.8), (3.9) e (3.10) ricaviamo:

$$|g|_{C^0} \geq g(e_i) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

In conclusione, usando (3.11) e (3.7) otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2|g|_{C^0} = 2|a||f|_{C^0} = \\ &= \frac{2(4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i}f))^{\frac{1}{\gamma}}}{(|\partial_{x_i}f|_{C^0})^{1+\frac{1}{\gamma}}}|f|_{C^0}, \end{aligned}$$

e quindi, osservando che

$$1 + \frac{1}{\gamma} = \frac{1+\gamma}{\gamma} = \frac{1}{\mu}$$

(in quanto $\alpha = 0$) e che

$$\frac{\mu}{\gamma} = 1 - \mu \,,$$

possiamo dedurre che:

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} f|_{C^0} &\leq 4^\mu 4^{1-\mu} (H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} f))^{1-\mu} (|f|_{C^0})^\mu = \\ &= 4(H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} f))^{1-\mu} (|f|_{C^0})^\mu \,. \end{aligned}$$

Poiché ciò vale per ogni $i = 1, \ldots, n$ possiamo concludere che (nel caso $\alpha = 0$):

$$|f|_{C^1} \leq 4(|f|_{C^0})^\mu (|f|_{C^{1+\gamma}})^{1-\mu} \,.$$

– Discutiamo ora il caso $\alpha > 0$. Fissiamo $1 \leq i \leq n$ e, procedendo analogamente a quanto già fatto, definiamo la seguente normalizzazione di f:

$$g(x) = af\left(\frac{x}{b}\right)$$

scegliendo a e b in modo da soddisfare

$$\begin{cases} |\partial_{x_i} g|_{C^0} = 1 \\ 4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} g) = 1 \,. \end{cases}$$

Osservando che

$$\begin{cases} |\partial_{x_i} g| = \dfrac{|a|}{|b|} |\partial_{x_i} f| \\ H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} g) = \dfrac{|a|}{|b|^{1+\gamma}} H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} f) \,, \end{cases}$$

si può concludere che è sufficiente scegliere:

$$\begin{cases} |a| = \dfrac{(4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} f))^{\frac{1}{\gamma}}}{(|\partial_{x_i} f|_{C^0})^{1+\frac{1}{\gamma}}} \\ |b| = \left(\dfrac{4H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} f)}{|\partial_{x_i} f|_{C^0}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Inoltre, a meno di riflessioni e traslazioni possiamo assumere che:

$$g(0) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_{x_i} g(0) \geq \frac{3}{4} \tag{3.13}$$

(è sempre possibile realizzare ciò, scegliendo opportunamente il segno di a e b).

Osserviamo che vale la seguente uguaglianza, che segue immediatamente dalla formula di Taylor all'ordine zero con resto di Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{g(e_i) - g(0)}{|e_i - 0|^\alpha} &= g(e_i) - g(0) = \\ &= \partial_{x_i} g(0) + \frac{\partial_{x_i} g(\xi e_i) - \partial_{x_i} g(0)}{\xi^\gamma} \xi^\gamma \end{aligned} \tag{3.14}$$

dove e_i è un vettore di modulo 1, le cui componenti sono $(e_i)_j = \delta_{ij}$, mentre $\xi \in (0,1)$.

Per come abbiamo scelto la g possiamo concludere:

$$\left| \frac{\partial_{x_i} g(\xi e_i) - \partial_{x_i} g(0)}{\xi^\gamma} \xi^\gamma \right| \leq H_{C^\gamma}(\partial_{x_i} g) = \frac{1}{4}\,,$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial_{x_i} g(\xi e_i) - \partial_{x_i} g(0)}{\xi^\gamma} \xi^\gamma \geq -\frac{1}{4}. \tag{3.15}$$

Quindi, da (3.13), (3.14) e (3.15) ricaviamo:

$$H_{C^\alpha}(g) \geq g(e_i) - g(0) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{3.16}$$

In conclusione, usando (3.16) e (3.12):

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2H_{C^\alpha}(g) = 2\frac{|a|}{|b|^\alpha} H_{C^\alpha}(f) = \\ &= 2 \cdot 4^{\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}} (H_{C^\gamma}(f))^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} (|\partial_{x_i} f|_{C^0})^{-(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{\alpha}{\gamma})} H_{C^\alpha}(f)\,, \end{aligned}$$

e quindi, osservando che

$$\frac{1-\mu}{\mu} = \frac{1-\alpha}{\gamma}\,,$$

possiamo dedurre:

$$|\partial_{x_i} f|_{C^0}^{\frac{1}{\mu}} \leq 4^{\frac{1}{\mu}} (H_\gamma(\partial_{x_i} f))^{\frac{1-\mu}{\mu}} (H_{C^\alpha}(f))\,,$$

cioè

$$|\partial_{x_i} f|_{C^0} \leq 4 (H_\gamma(\partial_{x_i} f))^{1-\mu} (H_{C^\alpha}(f))^\mu\,.$$

Poiché ciò vale per ogni $i = 1, \ldots, n$, possiamo concludere che (anche nel caso $\alpha > 0$):

$$|f|_{C^1} \leq 4(|f|_{C^\alpha})^\mu (|f|_{C^{1+\gamma}})^{1-\mu}\,.$$

ii) Se $\nu > 1$ la tesi segue facilmente per induzione. Supponiamo che sia vero per gli interi fino a $\nu - 1$ e dimostriamolo per ν. Infatti:

$$|f|_{C^\nu} = \max \left\{ |f|_{C^0}, \max_{1 \leq i \leq n} \{ |\partial_{x_i} f|_{C^{\nu-1}} \} \right\}\,,$$

da cui (usando l'ipotesi induttiva):

$$\begin{aligned} |f|_{C^0} &= (|f|_{C^0})^\mu (|f|_{C^0})^{1-\mu} \leq \\ &\leq (|f|_{C^{\nu-1+\alpha}})^\mu (|f|_{C^{\nu+\gamma}})^{1-\mu} \\ |\partial_{x_i} f|_{C^{\nu-1}} &\leq 4(|\partial_{x_i} f|_{C^{\nu-2+\alpha}})^\mu (|\partial_{x_i} f|_{C^{\nu-1+\gamma}})^{1-\mu} \leq \\ &\leq 4(|f|_{C^{\nu-1+\alpha}})^\mu (|f|_{C^{\nu+\gamma}})^{1-\mu}\,. \end{aligned}$$

E questo completa la dimostrazione del lemma. □

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Proposizione 3.1.6. *Siano*

$$\nu \leq k < m < l < \nu + 2$$

con $\nu \in \mathbb{N}$. *Allora per ogni* $f \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$(|f|_{C^m})^{l-k} \leq 8^{l-k}(|f|_{C^k})^{l-m}(|f|_{C^l})^{m-k}\,. \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Tenendo in considerazione i lemmi 3.1.4 e 3.1.5, ci rimangono da considerare soltanto i seguenti due casi:

i) $\nu \leq k < m < \nu + 1 < l < \nu + 2$

ii) $\nu \leq k < \nu + 1 < m < l < \nu + 2\,.$

Dimostriamoli separatamente.

i) Siano

$$\begin{cases} k = \nu + \alpha \\ m = \nu + \beta \\ l = \nu + 1 + \gamma \end{cases}$$

con $0 \leq \alpha < \beta < 1$ e $0 < \gamma < 1$. Detti

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{l-m}{l-k} = \dfrac{1+\gamma-\beta}{1+\gamma-\alpha} \\ 1-\mu = \dfrac{m-k}{l-k} = \dfrac{\beta-\alpha}{1+\gamma-\alpha}\,, \end{cases}$$

dobbiamo dimostrare che:

$$|f|_{C^{\nu+\beta}} \leq 8(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{1-\mu}\,.$$

Applichiamo il lemma 3.1.4 con

$$k' = \nu + \alpha, \quad m' = \nu + \beta \quad \text{e} \quad l' = \nu + 1$$

ed otteniamo:

$$|f|_{C^{\nu+\beta}} \leq 2(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu'}(|f|_{C^{\nu+1}})^{1-\mu'}\,,$$

dove

$$\mu' = \frac{1-\beta}{1-\alpha} \qquad \text{e} \qquad 1-\mu' = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\,.$$

Applicando invece il lemma 3.1.5 con

$$k'' = \nu + \alpha, \quad m'' = \nu + 1 \quad \text{e} \quad l'' = \nu + 1 + \gamma$$

otteniamo:

$$|f|_{C^{\nu+1}} \leq 4(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu''}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{1-\mu''},$$

dove

$$\mu'' = \frac{\gamma}{1+\gamma-\alpha} \qquad \text{e} \qquad 1-\mu'' = \frac{1-\alpha}{1+\gamma-\alpha}.$$

Mettendo insieme le due stime ottenute ed osservando che

$$\mu' + \mu''(1-\mu') = \mu \qquad \text{e} \qquad 1-\mu = (1-\mu')(1-\mu'')$$

otteniamo la tesi; infatti:

$$\begin{aligned} |f|_{C^{\nu+\beta}} &\leq 2(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu'}\left[4(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu''}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{1-\mu''}\right]^{1-\mu'} \leq \\ &\leq 8(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu'+\mu''(1-\mu')}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{(1-\mu')(1-\mu'')} = \\ &\leq 8(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{1-\mu}. \end{aligned}$$

ii) Si procede in maniera analoga a quanto visto nel punto i). Siano

$$\begin{cases} k = \nu + \alpha \\ m = \nu + 1 + \beta \\ l = \nu + 1 + \gamma \end{cases}$$

con $0 \leq \beta < \gamma < 1$ e $0 < \alpha < 1$. Detti

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{\gamma-\beta}{1+\gamma-\alpha} \\ 1-\mu = \dfrac{1+\beta-\alpha}{1+\gamma-\alpha} \end{cases}$$

dobbiamo dimostrare che:

$$|f|_{C^{\nu+1+\beta}} \leq 8(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu}(|f|_{C^{\nu+1+\beta}})^{1-\mu}.$$

Applichiamo il lemma 3.1.4 con

$$k' = \nu + 1, \quad m' = \nu + 1 + \beta \quad \text{e} \quad l' = \nu + 1 + \gamma$$

ed otteniamo:

$$|f|_{C^{\nu+1+\beta}} \leq 2(|f|_{C^{\nu+1}})^{\mu'}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{1-\mu'},$$

dove

$$\mu' = \frac{\gamma-\beta}{\gamma} \qquad \text{e} \qquad 1-\mu' = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Applicando invece il lemma 3.1.5 con

$$k'' = \nu + \alpha, \quad m'' = \nu + 1 \quad \text{e} \quad l'' = \nu + 1 + \gamma$$

otteniamo:

$$|f|_{C^{\nu+1}} \leq 4(|f|_{C^{\nu+\alpha}})^{\mu''}(|f|_{C^{\nu+1+\gamma}})^{1-\mu''},$$

dove

$$\mu'' = \frac{\gamma}{1+\gamma-\alpha} \qquad \text{e} \qquad 1-\mu'' = \frac{1-\alpha}{1+\gamma-\alpha}.$$

Mettendo insieme le due stime ottenute ed osservando che:

$$\mu'\mu'' = \mu$$

otteniamo la tesi.

E questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione. Vedremo successivamente come sia possibile generalizzare tale disuguaglianza anche al caso di esponenti che non godono di tali proprietà (vedi corollario 3.2.4); risulta però abbastanza intuitivo che tale generalizzazione può essere anche effettuata direttamente, utilizzando il metodo precedentemente illustrato in maniera induttiva.

3.2 Lemmi di Approssimazione di Jackson, Moser, Zehnder e Bernstein

Dimostriamo ora dei lemmi tecnici relativi all'approssimazione di funzioni C^l tramite funzioni analitiche.

Sia ϕ una funzione in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con supporto in $[-1,1]$, crescente in $[-1,0]$ e tale che

$$\begin{aligned} \phi(-t) &= \phi(t)\,, \\ \phi(0) &= 1\,, \\ \partial^k\phi(0) &= 0 \quad \forall\, k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Definiamo la seguente funzione (a simmetria radiale) su $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(\xi) = \phi(|\xi|^2) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e consideriamo la sua trasformata di Fourier:

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)e^{i(x\cdot\xi)}\,d\xi\,.$$

Dalla regolarità di φ e dal fatto che il supporto è compatto, si può concludere che K è reale analitica su $\mathbb{C}^n$. In particolare K soddisfa le seguenti proprietà:

Lemma 3.2.1. *Le derivate di K soddisfano le seguenti relazioni:*

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \exists\, c_p: \qquad |\partial^\beta K(x)| \leq c_p \frac{e^{|\mathrm{Im}\, x|}}{(1+|x|)^p} \qquad \forall\, |\beta| \leq p\,.$$

Inoltre, per $x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\sup_{\beta\in\mathbb{N}^n} |\partial^\beta K(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\|\varphi\|_{L^1}\,.$$

Dimostrazione. Cominciamo col ricordare che se

$$u \in \mathrm{supp}\,\varphi = B_1(0)\,,$$

allora

$$\left|e^{i(x\cdot u)}\right| = e^{-(\mathrm{Im}\, x\cdot u)} \leq e^{|\mathrm{Im}\, x|}\,.$$

Denotiamo $\varphi_\beta(u) := u^\beta\varphi(u)$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial^\beta K(x) &= \partial^\beta\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(u)e^{i(x\cdot u)}\,du\right) = \\ &= \frac{i^{|\beta|}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\beta(u)e^{i(x\cdot u)}\,du \end{aligned}$$

e, per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, integrando $|a|$ volte per parti:

$$x^\alpha \partial^\beta K(x) = \frac{i^{|\beta|-|\alpha|}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \varphi_\beta(u) e^{i(x\cdot u)}\, du\,.$$

Perciò:

$$|x^\alpha||\partial^\beta K(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|\partial^\alpha \varphi_\beta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{|\mathrm{Im}\, x|}\,.$$

Osserviamo ora che per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$(1+|x|)^p \leq (1+|x_1|+\ldots|x_n|)^p = \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{p!}{(p-|\alpha|)!\alpha!}|x^\alpha|\,,$$

dove l'ultima uguaglianza altri non è, se non una generalizzazione della formula del binomio di Newton. Possiamo quindi concludere che per $|\beta| \leq p$

$$\begin{aligned}(1+|x|)^p|\partial^\beta K(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{p!}{(p-|\alpha|)!\alpha!}|x^\alpha||\partial^\beta K(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{p!}{(p-|\alpha|)!\alpha!}\|\partial^\alpha \varphi_\beta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{|\mathrm{Im}\, x|} \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\sum_{|\alpha|\leq p} \frac{p!}{(p-|\alpha|)!\alpha!} \sup_{|\beta|\leq p} \|\partial^\alpha \varphi_\beta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right) e^{|\mathrm{Im}\, x|}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$|\partial^\beta K(x)| \leq c_p \frac{e^{|\mathrm{Im}\, x|}}{(1+|x|)^p}\,,$$

avendo definito:

$$c_p := \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\sum_{|\alpha|\leq p} \frac{p!}{(p-|\alpha|)!\alpha!} \sup_{|\beta|\leq p} \|\partial^\alpha \varphi_\beta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right)$$

che dipende solo da p.

Inoltre per x reali, si ha:

$$\begin{aligned}|\partial^\beta K(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\beta \varphi(u)|\, du \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|\varphi\|_{L^1}.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.2. *Se α, $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $x = u + iv \in \mathbb{C}^n$, allora:*

$$I_{\alpha,\beta} := \int_{\mathbb{R}^n} u^\beta \partial^\alpha K(u+iv)\, du = \begin{cases} (-1)^{|\beta|} \dfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}(iv)^{\beta-\alpha} & se\ \alpha \leq \beta \\ 0 & altrimenti\,. \end{cases}$$

Osservazione. Per evitare confusione, sottolineiamo che α e β sono dei vettori n-dimensionali; quindi la notazione sopra utilizzata va così intesa:

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots n\,.$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se $\alpha_i > \beta_i$ per qualche i, allora tale integrale $I_{\alpha,\beta} = 0$, come si vede facilmente integrando per parti e notando che $\partial_{u_i}^{\alpha_i} u^\beta = 0$.

Quindi possiamo assumere che $\alpha \leq \beta$; integrando per parti otterremo

$$I_{\alpha,\beta} = (-1)^{|\alpha|} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} \int_{\mathbb{R}^n} u^{\beta-\alpha} K(u+iv)\, du\,. \tag{3.18}$$

Notiamo ora il seguente fatto:

$$\begin{aligned} K(u+iv) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i\xi\cdot(u+iv)}\, d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-v\xi} e^{iu\xi}\, d\xi =: \tilde{K}_v(u) \end{aligned}$$

che possiamo vedere come la trasformata di Fourier della funzione

$$\tilde{\varphi}_v(\xi) = \varphi(\xi) e^{-v\xi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

per ogni v fissato.

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u^{\beta-\alpha} K(u+iv)\, du &= \frac{1}{(-i)^{|\beta-\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta-\alpha|}}{\partial\, \xi^{\beta-\alpha}}_{|\xi=0} \int_{\mathbb{R}^n} K(u+iv) e^{-iu\xi}\, du = \\ &= \frac{1}{(-i)^{|\beta-\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta-\alpha|}}{\partial\, \xi^{\beta-\alpha}}_{|\xi=0} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_v(u) e^{-iu\xi}\, du = \\ &= \frac{1}{(-i)^{|\beta-\alpha|}} \frac{\partial^{|\beta-\alpha|}}{\partial\, \xi^{\beta-\alpha}}_{|\xi=0} \left(\varphi(\xi) e^{-v\xi}\right) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo osservato che l'integrale ottenuto altri non è che l'anti-trasformata di Fourier di $\tilde{K}_v$ (i.e. $\tilde{\varphi}_v$). Usando ora il fatto che tutte le derivate di φ in 0 sono nulle, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u^{\beta-\alpha} K(u+iv)\, du &= \ldots = \frac{1}{(-i)^{|\beta-\alpha|}} \varphi(0) (-v)^{\beta-\alpha} = \\ &= (-iv)^{\beta-\alpha}\,. \end{aligned}$$

Riassumendo i risultati appena trovati e (3.18) possiamo concludere:

$$I_{\alpha,\beta} := \int_{\mathbb{R}^n} u^\beta \partial^\alpha K(u+iv)\, du = \begin{cases} (-1)^{|\beta|} \dfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} (iv)^{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

$\square$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il risultato principale di questo paragrafo, che svolgerà un ruolo cruciale nella dimostrazione del teorema KAM nel caso di sistemi hamiltoniani sufficientemente differenziabili.

Lemma 3.2.3 (Jackson, Moser, Zehnder). *Esiste una famiglia di operatori "regolarizzanti"*

$$S_r f = \frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) f(y)\, dy \qquad 0 < r \leq 1 \tag{3.19}$$

dallo spazio $C^0(\mathbb{R}^n)$ *allo spazio delle funzioni intere su* $\mathbb{C}^n$*, tali che per ogni* $l \geq 0$ *esista una costante* $C = C(l,n)$ *in modo che valgano le seguenti stime. Se* $f \in C^l(\mathbb{R}^n)$ *allora per* $|\alpha| \leq l$ *e* $|\operatorname{Im} x| \leq r$ *si ha:*

$$\left|\partial^\alpha S_r f(x) - \sum_{|\beta|\leq l-|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(Re\, x)\, \frac{(i \operatorname{Im} x)^\beta}{\beta!}\right| \leq C\,|f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \tag{3.20}$$

ed in particolare per $\rho \leq r$

$$|\partial^\alpha S_r f - \partial^\alpha S_\rho f|_\rho \leq C\,|f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}\ . \tag{3.21}$$

Inoltre, nel caso reale abbiamo:

$$|S_r f - f|_{C^s} \leq C|f|_{C^l} r^{l-s} \qquad s \leq l \tag{3.22}$$

$$|S_r f|_{C^s} \leq C|f|_{C^l} r^{l-s} \qquad l \leq s\ . \tag{3.23}$$

Infine, se f *è periodica rispetto a qualcuna delle sue variabili, allora anche le funzioni approssimanti* $S_r f$ *lo sono rispetto alle stesse variabili.*

Dimostrazione. Definiamo il seguente operatore lineare:

$$S_r\, f = \frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) f(y)\, dy\ .$$

Una proprietà interessante è la seguente: i polinomi sono dei punti fissi per tale operatore, cioè

$$\forall\ P \text{ Polinomio} \qquad S_r\, P(x) = P(x)\ .$$

Infatti, considerando il cambio di variabile $\eta = \dfrac{x-y}{r}$ ed utilizzando il lemma 3.2.2:

$$\begin{aligned} S_r P(x) &= \frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) P(y)\, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) P(x - r\eta)\, d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta)\left(\sum_{|k|\leq \deg P} a_k(x,r)\eta^k\right) d\eta = \\ &= \sum_{|k|\leq \deg P}\left(\int_{\mathbb{R}^n} K(\eta)\eta^k d\eta\right) a_k(x,r)\ = \\ &= a_0(x,r) = P(x - r\eta)_{|\eta=0} = P(x). \end{aligned}$$

Dimostriamo ora una serie di risultati che ci permetteranno di dimostrare le stime desiderate. D'ora in avanti adotteremo la seguente notazione:

$$x = u + iv \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{u-y}{r}$$

con $u, v \in \mathbb{R}^n$.

I) Cominciamo col notare che per ogni $l \in \mathbb{R}^+$ e per ogni $f \in C^l$ esiste una costante $C_0(l,n)$ tale che

$$|f(x+y) - P_k(x,y)| \le C_0 |f|_{C^l} |y|^l \tag{3.24}$$

dove $k = [l]$ e

$$P_k(x,y) = \sum_{|\alpha|\le[l]} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} y^\alpha \,.$$

Infatti, se l è intero (3.24) segue immediatamente dalla formula di Taylor; invece se $l = k + \mu$ con $\mu \in (0,1)$, usando l'espressione integrale del resto di Taylor, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&|f(x+y) - P_k(x,y)| \le \\
&\quad \le \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\partial^k f(x+ty)\, y^k - \partial^k f(x)\, y^k \right] dt \right| \le \\
&\quad \le \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\left|\partial^k f(x+ty) - \partial^k f(x)\right|}{|ty|^\mu} |y|^{k+\mu}\, dt \le \\
&\quad \le \frac{|f|_{C^l}}{k!} |y|^l \,.
\end{aligned}$$

II) Ricaviamo un'espressione per le derivate di $S_r f$:

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha S_r\, f(x) &= \partial^\alpha \left[\frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) f(y)\, dy \right] = \\
&= \frac{1}{r^{n+|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K \left(\frac{u-y}{r} + i\frac{v}{r} \right) f(y)\, dy = \\
&= \frac{1}{r^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K \left(\eta + i\frac{v}{r} \right) f(u - r\eta)\, d\eta \,.
\end{aligned}$$

III) Consideriamo ora $|\beta| \le l - |\alpha|$; utilizzando il lemma 3.2.2:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u)}{\beta!} (iv)^\beta = \\
&= \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u)}{\beta!} \frac{(iv)^\beta}{(-1)^{|\alpha+\beta|} \frac{(\beta+\alpha)!}{\beta!} \left(i\frac{v}{r}\right)^\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K \left(\eta + i\frac{v}{r}\right) \eta^{\alpha+\beta} d\eta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K \left(\eta + i\frac{v}{r}\right) \left((-1)^{|\alpha+\beta|} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u)}{(\beta+\alpha)!} r^{|\beta|} \eta^{\alpha+\beta} \right) d\eta = \\
&= \frac{1}{r^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K \left(\eta + i\frac{v}{r}\right) \left((-1)^{|\alpha+\beta|} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u)}{(\beta+\alpha)!} (r\eta)^{\alpha+\beta} \right) d\eta \,.
\end{aligned}$$

Quindi, detto $k = [l]$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\beta|\le l-|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u)}{\beta!}(iv)^\beta = \\
&= \frac{1}{r^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K\left(\eta + i\frac{v}{r}\right) \sum_{|\beta|\le l-|\alpha|} \left((-1)^{|\alpha+\beta|} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u)}{(\beta+\alpha)!} (r\eta)^{\alpha+\beta} \right) d\eta = \\
&= \frac{1}{r^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha K\left(\eta + i\frac{v}{r}\right) P_k(u, -r\eta)\, d\eta
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto alla somma dei termini il cui contributo è nullo, come si osserva dal lemma 3.2.2.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter dimostrare la prima stima del lemma; usando I), II) e III) otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\left| \partial^\alpha S_r f(x) - \sum_{|\beta|\le l-|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(u)\, \frac{(iv)^\beta}{\beta!} \right| \le \\
&\quad \le \frac{1}{r^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha K\left(\eta + i\frac{v}{r}\right)\right| |f(u - r\eta) - P_k(u, -r\eta)|\, d\eta \le \\
&\quad \le \frac{1}{r^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha K\left(\eta + i\frac{v}{r}\right)\right| C_0 |f|_{C^l} |r\eta|^l\, d\eta \le \\
&\quad \le C_0 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha K\left(\eta + i\frac{v}{r}\right)\right| |\eta|^l\, d\eta \le \\
&\quad \le C_0 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha K\left(\eta + i\frac{v}{r}\right)\right| (1 + |\eta|)^l\, d\eta
\end{aligned}$$

ed applicando il lemma 3.2.1 con $p > l$ sufficientemente grande (i.e. $p > l + n$), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\left| \partial^\alpha S_r f(x) - \sum_{|\beta|\le l-|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(u)\, \frac{(iv)^\beta}{\beta!} \right| &\le C_0\, c_p\, e\, |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|)^{l-p}\, d\eta \le \\
&\le C_1(l, n) |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}\,,
\end{aligned}$$

dove c_p è la costante del lemma 3.2.1 (con $p > l + n$), mentre

$$C_1 = C_0\, c_p\, e \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\eta|)^{p-l}} < \infty\,.$$

Questo completa la dimostrazione di (3.20).

La dimostrazione di (3.21) segue immediatamente dalla dimostrazione precedente:

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha S_r f(x) - \partial^\alpha S_\rho f(x)| &\leq \left|\partial^\alpha S_r f(x) - \sum_{|\beta|\leq l-|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(u)\, \frac{(iv)^\beta}{\beta!}\right| + \\
&+ \left|\partial^\alpha S_\rho f(x) - \sum_{|\beta|\leq l-|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(u)\, \frac{(iv)^\beta}{\beta!}\right| \leq \\
&\leq C_1 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} + C_1 |f|_{C^l} \rho^{l-\alpha} \leq \\
&\leq 2C_1 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}\ .
\end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione del lemma ci mancano da verificare le stime nel caso reale. Cominciamo dalla prima stima, cioè:

$$|S_r f - f|_{C^s} \leq C|f|_{C^l} r^{l-s} \qquad \forall\, s \leq l$$

per un'opportuna costante $C = C(l, n)$. Supponiamo dapprima $0 < l < 1$; in tal caso sarà sufficiente far vedere che per ogni $0 < s < l < 1$ si ha:

$$H_{C^s}(S_r f - f) := \frac{|S_r f(x) - f(x) - S_r f(y) + f(y)|}{|x-y|^s} \leq C|f|_{C^l} r^{l-s}$$

con $0 < |x - y| < 1$.

Osserviamo che, poiché x e y sono entrambi reali, ha senso considerare il cambio di variabile $\eta = \dfrac{x-y}{r}$ e di conseguenza possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
S_r f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) f(x - r\eta)\, d\eta \\
S_r f(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) f(y - r\eta)\, d\eta\ .
\end{aligned}$$

Ora, usando il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(\eta)\, d\eta = 1$$

(vedi lemma 3.2.2, con $\alpha = \beta = 0$), otteniamo:

$$H_{C^s}(S_r f - f) \quad \leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta)| \frac{|f(x - r\eta) - f(x) - f(y - r\eta) + f(y)|}{|x-y|^s} d\eta\ .$$

Stimiamo tale integrale; a tal fine, denotiamo con

$$I := \frac{|f(x - r\eta) - f(x) - f(y - r\eta) + f(y)|}{|x-y|^s}$$

ed avremo:

- se $|x-y|<r$:

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s} + \frac{|f(x-r\eta)-f(y-r\eta)|}{|x-y|^s} \leq \\ &\leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^l}|x-y|^{l-s} + \\ &+ \frac{|f(x-r\eta)-f(y-r\eta)|}{|x-y|^l}|x-y|^{l-s} \leq \\ &\leq 2|f|_{C^l} r^{l-s} \,. \end{aligned}$$

  Quindi:

$$\begin{aligned} H_{C^s}(S_r f - f) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta)| 2|f|_{C^l} r^{l-s} \leq \\ &\leq C_2 |f|_{C^l} r^{l-s} \,, \end{aligned}$$

  dove $C_2 = 2\int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta)|d\eta < \infty$ per il lemma 3.2.1.

- Se $|x-y|>r$ useremo la seguente proprietà

$$|f(x)-f(y)| \leq |f|_{C^l}|x-y|^l$$

  che segue banalmente dalla definizione di $|\cdot|_{C^l}$. Quindi otteremo:

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{|f(x-r\eta)-f(x)|}{|x-y|^s} + \frac{|f(y-r\eta)-f(y)|}{|x-y|^s} \leq \\ &\leq 2|f|_{C^l}\frac{r^l|\eta|^l}{r^s} = 2|f|_{C^l} r^{l-s}|\eta|^l \,. \end{aligned}$$

  Tornando alla stima del nostro integrale avremo:

$$\begin{aligned} H_{C^s}(S_r f - f) &\leq 2|f|_{C^l} r^{l-s} \int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta)||\eta|^l \, d\eta = \\ &= C_3 |f|_{C^l} r^{l-s} \,, \end{aligned}$$

  dove $C_3 = \int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta)||\eta|^l \, d\eta < \infty$ (vedi lemma 3.2.1).

Quindi abbiamo dimostrato la disuguaglianza (3.22) nel caso $0<l<1$; infatti usando le stime precedenti e (3.20) otteniamo:[2]

$$\begin{aligned} |S_r f - f|_{C^s} &= \max\{|S_r f - f|_{C^0}, H_{C^s}(S_r f - f)\} \leq \\ &\leq \max\left\{C_1|f|_{C^l} r^l, \hat{C}_2 |f|_{C^l} r^{l-s}\right\} \leq C_4 |f|_{C^l} r^{l-s} \,, \end{aligned}$$

dove $\hat{C}_2 = \max\{C_2, C_3\}$ e $C_4 = \max\{C_1, \hat{C}_2\}$. Ci manca da analizzare cosa succede quando $l \geq 1$.

[2] osserviamo che per x reali la (3.20) diventa semplicemente:

$$|\partial^\alpha S_r f(x) - \partial^\alpha f(x)| \leq C_1 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}$$

Procediamo per induzione (la base induttiva l'abbiamo appena dimostrata): supponiamo che sia vero per $l < m$ e dimostriamolo nel caso $m \leq l < m+1$.

Consideriamo dapprima $s = m$. Abbiamo:

$$|S_r f - f|_{C^m} = \max\left\{|S_r f - f|_{C^{m-1}}, \sup_{|\alpha|=m} (|\partial^\alpha S_r f - \partial^\alpha f|_{C^0})\right\} .$$

Stimiamo separatamente i vari termini:

- Il primo termine si stima usando l'ipotesi induttiva:

$$|S_r f - f|_{C^{m-1}} \leq C^4 |f|_{C^l} r^{l-m+1} ;$$

- Stimiamo il secondo termine. Cominciamo con l'osservare il seguente fatto:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha S_r f(x) &= \partial^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) f(y)\, dy \right) = \\ &= \partial^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) f(x - r\eta)\, d\eta \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) \left(\partial^\alpha f(x - r\eta)\right) d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) \left(\partial^\alpha f(y)\right) dy = \\ &= S_r(\partial^\alpha f(x)) . \end{aligned}$$

  Quindi, se $|\alpha| = m$ usando l'osservazione sopra e l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha S_r f - \partial^\alpha f|_{C^0} &= |S_r(\partial^\alpha f) - \partial^\alpha f|_{C^0} \leq \\ &\leq C_4 |f|_{C^l} r^{l-m} . \end{aligned}$$

Questo dimostra tale stima in questo caso particolare.

Sia ora $m < s \leq l$ e quindi $m = [s]$; usando i punti precedentemente dimostrati otteniamo

$$\begin{aligned} |S_r f - f|_{C^s} &= \max\{|S_r f - f|_{C^m} , H_{C^{s-m}}(S_r f - f)\} \leq \\ &\leq \max\left\{ \sup_{|\alpha| \leq m} \left(C_1 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}\right), H_{C^{s-m}}(S_r f - f)\right\} . \end{aligned}$$

Stimiamo i due termini separatamente:

- il primo termine si stima facilmente, osservando che per $0 < r \leq 1$:

$$\sup_{|\alpha| \leq m} C_1 |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \leq C_1 |f|_{C^l} r^{l-m} \leq C_1 |f|_{C^l} r^{l-s} .$$

- Stimiamo il secondo termine. Ricordando l'osservazione precedentemente fatta, cioè:

$$\partial^\alpha S_r f(x) \;=\; S_r(\partial^\alpha f(x)) \; ,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{|\partial^\alpha S_r f(x) - \partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha S_r f(y) + \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^{s-m}} \le \\
&\le \frac{|S_r(\partial^\alpha f(x)) - \partial^\alpha f(x)|}{|x-y|^{s-m}} + \frac{|S_r(\partial^\alpha f(y)) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^{s-m}} \le \\
&\le 2C_4 |\partial^\alpha f|_{C^{l-m}} r^{(l-m)-(s-m)} \le 2C_4 |f|_{C^l} r^{l-s} \; ,
\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$|S_r f - f|_{C^s} \le 2C_4 |f|_{C^l} r^{l-s} \, ;$$

questo completa la dimostrazione della (3.22), con $C = 2C_4$.

Dimostriamo ora la (3.23). Cominciamo dal caso in cui $s = l + m$, con m intero positivo. Vogliamo dimostrare che

$$|S_r f|_{C^{l+m}} \le C |f|_{C^l} r^{-m} \; ,$$

per un'opportuna costante $C = C(l, n)$. Dalla definizione di $|\cdot|_{C^{l+m}}$ sappiamo che

$$\begin{aligned}
&|S_r f|_{C^{l+m}} = \\
&\quad = \max\left\{ \sup_{|\alpha| \le [l]+m} |\partial^\alpha S_r f|, \; H_{C^\mu}(S_r f) \right\} = \\
&\quad = \max\left\{ \sup_{|\alpha| \le [l]+m} |\partial^\alpha S_r f|, \; \sup_{|\alpha| = [l]+m} \; \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|\partial^\alpha S_r f(x) - \partial^\alpha S_r f(y)|}{|x-y|^\mu} \right\}
\end{aligned}$$

con $\mu = l - [l]$. Stimiamo separatamente i due termini.

(i) Sia $|\alpha| \le [l] + m$; allora esistono β, $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tale che

$$\alpha = \beta + \gamma$$

con $|\beta| \le [l]$ e $|\gamma| \le m$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha S_r f(x) &= \partial^{\beta+\gamma} S_r f = \\
&= \partial^{\beta+\gamma}\left[\int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) f(x - r\eta)\, d\eta\right] = \\
&= \partial^{\gamma}\left[\int_{\mathbb{R}^n} K(\eta)\, \partial^\beta f(x - r\eta)\, d\eta\right] = \\
&= \partial^{\gamma}\left[\frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{r}\right) \partial^\beta f(y)\, dy\right] = \\
&= \frac{1}{r^{n+|\gamma|}}\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\gamma K\left(\frac{x-y}{r}\right) \partial^\beta f(y)\, dy = \\
&= \frac{1}{r^{|\gamma|}}\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\gamma K(\eta)\, \partial^\beta f(x - r\eta)\, d\eta\ .
\end{aligned}$$

Da ciò possiamo dedurre la seguente stima:

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha S_r f(x)| &\le r^{-|\gamma|} |\partial^\beta f|_{C^0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\gamma K(\eta)|\, d\eta\right) \le \\
&\le C_5 r^{-m} |f|_{C^l}
\end{aligned}$$

dove $C_5 = C_5(l, n)$ è un'opportuna costante.

(ii) Sia $|\alpha| = [l] + m$ e siano β, $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tali che

$$\alpha = \beta + \gamma$$

con $|\beta| = [l]$ e $|\gamma| = m$. Procedendo in maniera analoga a quanto visto prima e denotando $\mu = l - [l]$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{|\partial^\alpha S_r f(x) - \partial^\alpha S_r f(y)|}{|x-y|^\mu} \le \\
&\le \frac{1}{r^{|\gamma|}} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\gamma K(\eta)| \frac{|\partial^\beta f(x - r\eta) - \partial^\beta f(y - r\eta)|}{|x-y|^\mu}\, d\eta \le \\
&\le C_5 |f|_{C^l} r^{-m}\ .
\end{aligned}$$

Quindi l'asserto è vero per $s = l + m$, con m interi.

Vediamo ora cosa succede quando m non è intero (cioè quando $m = [m] + \mu$, con $0 < \mu < 1$). In tal caso la stima segue dalla precedente, utilizzando la proposizione 3.1.6 (con $k = l + [m]$, $m = l + m$ e $l = l + [m] + 1$):

$$\begin{aligned}
|S_r f|_{C^{l+m}} &\le 8\, (|S_r f|_{C^{l+[m]}})^{1-\mu} (|S_r f|_{C^{l+[m]+1}})^\mu \le \\
&\le 8 \left(C_5 r^{-[m]} |f|_{C^l}\right)^{1-\mu} \left(C_5 r^{-([m]+1)} |f|_{C^l}\right)^\mu \le \\
&= 8\, C_5 r^{-([m]+\mu)} |f|_{C^l} = \\
&= 8\, C_5 r^{-m} |f|_{C^l}.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo concluso la dimostrazione del lemma, prendendo come costante

$$C = C(l,n) = \max\{8C_5,\ 2C_4\}\,.$$

Osservazione. Concludiamo osservando che se f è periodica, allora $S_r f$ è anch'essa periodica. Infatti, $f \in C^0(\mathbb{T}^n)$ ed i coefficienti di Fourier di $S_r f$ sono:

$$\begin{aligned}(S_r f)_k &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) f(x - r\eta)\, d\eta\right) e^{-i(x\cdot k)}\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta) e^{-i(rk\cdot\eta)}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x - r\eta) e^{-i(x-r\eta)\cdot k} dx\right) d\eta = \\ &= f_k \varphi(rk)\,.\end{aligned}$$

Quindi poiché φ è a supporto compatto, segue che tali coefficienti sono definitivamente nulli e quindi $S_r f$ è un polinomio trigonometrico.

□

Dal lemma precedente segue il seguente corollario, che ci fornisce delle stime di convessità :

Corollario 3.2.4. *Siano $f,\ g \in C^l(\mathbb{R}^n)$; allora:*

$$|f|_{C^m} \leq C_6\,(|f|_{C^k})^{\frac{l-m}{l-k}}\,(|f|_{C^l})^{\frac{m-k}{l-k}} \qquad k \leq m \leq l\,, \tag{3.25}$$

$$|f \cdot g|_{C^s} \leq C_6(|f|_{C^s}|g|_{C^0} + |f|_{C^0}|g|_{C^s}) \quad 0 \leq s \leq l \tag{3.26}$$

con $C_6 = C_6(l,n) \geq 1$.

Dimostrazione. Dal lemma precedente otteniamo:

$$\begin{aligned}|f|_{C^m} &\leq |S_r f - f|_{C^m} + |S_r f|_{C^m} \leq \\ &\leq C|f|_{C^l} r^{l-m} + C|f|_{C^k} r^{k-m}\,,\end{aligned}$$

e quindi, scegliendo $r = \left(\dfrac{|f|_{C^k}}{|f|_{C^l}}\right)^{\frac{1}{l-k}} < 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned}|f|_{C^m} &\leq C|f|_{C^l}\left(\frac{|f|_{C^k}}{|f|_{C^l}}\right)^{\frac{l-m}{l-k}} + C|f|_{C^k}\left(\frac{|f|_{C^k}}{|f|_{C^l}}\right)^{\frac{k-m}{l-k}} \leq \\ &\leq 2C|f|_{C^k}^{\frac{l-m}{l-k}}\,|f|_{C^l}^{\frac{m-k}{l-m}}\,.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Facciamo vedere ora come l'altra stima segua dalla precedente. Procediamo per induzione:

- (Base induzione): sia $0 \leq s < 1$; osserviamo innanzitutto che :

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{|x-y|^s} := \\
&= \frac{|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|}{|x-y|^s} \leq \\
&\leq |f(x)|\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^s} + |g(y)|\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s} \, ;
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
H_{C^s}(fg) &= \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{|x-y|^s} \leq \\
&\leq |f|_{C^0}|g|_{C^s} + |f|_{C^s}|g|_{C^0} \, .
\end{aligned}$$

D'altronde:

$$\begin{aligned}
|fg|_{C^0} &= \frac{1}{2}(|f|_{C^0}|g|_{C^0} + |f|_{C^0}|g|_{C^0}) \leq \\
&\leq \frac{1}{2}(|f|_{C^0}|g|_{C^s} + |f|_{C^s}|g|_{C^0}) \, ,
\end{aligned}$$

quindi la base induttiva è facilmente verificabile:

$$\begin{aligned}
|fg|_{C^s} &= \max\{|fg|_{C^0}, \, H_{C^s}(fg)\} \leq \\
&\leq |f|_{C^0}|g|_{C^s} + |f|_{C^s}|g|_{C^0} \, .
\end{aligned}$$

Se $s = 1$ tale stima segue altrettanto semplicemente osservando che:

$$\partial_{x_i}(fg) = (\partial_{x_i} f)g + f(\partial_{x_i} g)$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$, e quindi:

$$\begin{aligned}
|fg|_{C^1} &= \max\left\{|fg|_{C^0}, \, \max_{1\leq i\leq n}\{|\partial_{x_i}(fg)|\}\right\} \leq \\
&\leq |f|_{C^0}|g|_{C^1} + |f|_{C^1}|g|_{C^0} \, .
\end{aligned}$$

- (Passo Induttivo): supponiamo che tale disuguaglianza sia vera quando $s \leq \nu \leq [l]$ e dimostriamola per $\nu < s < \min\{\nu+1, l\}$. Useremo la seguente uguaglianza (detta *regola di Leibniz*):[3]

$$\partial^\beta(fg) = \sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!}(\partial^\alpha f)\,(\partial^{\beta-\alpha} g) \, .$$

Cominciamo con l'osservare che:

$$|fg|_{C^s} = |fg|_{C^\nu} + \sup_{|\beta|=\nu} \sup_{0<|x-y|<1} \frac{|\partial^\beta(fg)(x) - \partial^\beta(fg)(y)|}{|x-y|^\mu} \, ,$$

dove $0 < \mu = s - \nu < 1$ è la parte frazionaria di s. Stimiamo i vari termini che compongono tale espressione:

[3] Si dimostra facilmente per induzione.

(i) Per l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} |fg|_{C^\nu} &\leq C_6\,(|f|_{C^0}|g|_{C^\nu} + |f|_{C^\nu}|g|_{C^0}) \leq \\ &\leq C_6\,(|f|_{C^0}|g|_{C^s} + |f|_{C^s}|g|_{C^0})\ . \end{aligned}$$

(ii) Se $|\beta| = \nu$:

$$\begin{aligned} &\frac{|\partial^\beta(fg)(x) - \partial^\beta(fg)(y)|}{|x-y|^\mu} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!} \frac{\left|(\partial^\alpha f(x))(\partial^{\beta-\alpha} g(x)) - (\partial^\alpha f(y))(\partial^{\beta-\alpha} g(y))\right|}{|x-y|^\mu} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha\leq\beta} \left(|\partial^\alpha f(x)| \frac{|\partial^{\beta-\alpha} g(x) - \partial^{\beta-\alpha} g(y)|}{|x-y|^\mu} + \right. \\ &+ \left. |\partial^{\beta-\alpha} g(y)| \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\mu} \right) \leq \\ &\leq \sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!} \left(|f|_{C^{|\alpha|}}|g|_{C^{\nu-|\alpha|+\mu}} + |f|_{C^{|\alpha|+\mu}}|g|_{C^{\nu-|\alpha|}}\right)\ . \end{aligned}$$

Usando la (3.27) - con $k = 0$, $m = |\alpha|$, $l = s$ per quanto riguarda la f, e $k = 0$, $m = \nu - |\alpha| + \mu$, $l = s$ per quanto riguarda la g - e ricordando che $|\beta| = \nu = [s]$ e $\mu = s - \nu$, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!} (|f|_{C^{|\alpha|}})(|g|_{\nu-|\alpha|+\mu}) \leq \\ &\leq \sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!} 4C^2\,(|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{s-|\alpha|}{s}} (|f|_{C^s}|g|_{C^0})^{\frac{|\alpha|}{s}} \leq \\ &\leq 4C^2 \sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!} (|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{|\beta|+\mu-|\alpha|}{s}} (|f|_{C^s}|g|_{C^0})^{\frac{|\alpha|}{s}} \leq \\ &\leq 4C^2 \left(\sum_{\alpha\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!} (|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{s}} (|f|_{C^s}|g|_{C^0})^{\frac{|\alpha|}{s}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{\mu}{s}} \leq \\ &\leq 4C^2 d(n) (|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{\mu}{s}} \left[(|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{1}{s}} + (|f|_{C^s}|g|_{C^0})^{\frac{1}{s}} \right]^\nu \leq \\ &\leq 4C^2 d(n) \left[(|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{1}{s}} + (|f|_{C^s}|g|_{C^0})^{\frac{1}{s}} \right]^{\mu+\nu} = \\ &= 4C^2 d(n) \left[(|f|_{C^0}|g|_{C^s})^{\frac{1}{s}} + (|f|_{C^s}|g|_{C^0})^{\frac{1}{s}} \right]^s \leq \\ &\leq 4C^2 d(n) (|f|_{C^0}|g|_{C^s} + |f|_{C^s}|g|_{C^0})\,, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la seguente disuguaglianza:

$$\left(|a|^{\frac{1}{s}} + |b|^{\frac{1}{s}}\right)^s \leq |a| + |b| \qquad \forall\, s > 0\,.$$

Osserviamo che abbiamo dovuto introdurre la costante $d(n)$ (che dipende soltanto dalla dimensione dello spazio), per poter ricondurre la sommatoria dipendente da un multiindice, ad una sommatoria su un indice intero, e al tempo stesso per poter stimare i coefficienti *multinomiali* in termini dei relativi coefficienti binomiali.
Si procede in maniera analoga per l'altra parte della sommatoria e quindi segue l'asserto prendendo come costante $8C^2 d(n)$.
Se $s = \nu + 1$ si procede esattamente come sopra e si dimostra la validità della tesi e questo completa il passo induttivo. In conclusione la costante del lemma, sarà data da:

$$C_6 = C_6(l, n) = \max\{8C^2 d(n),\ 1\}.$$

$\square$

Enunciamo ora una specie di "viceversa" del lemma precedente, osservando che tale lemma vale solo per valori di l non interi. Vogliamo mostrare come le proprietà qualitative relative alla differenziabilità di una funzione possano essere caratterizzate in termini di stime quantitative per una successione approssimante di funzioni analitiche.

Osservazione. Una versione classica di tale risultato è dovuta a Bernstein e lega le proprietà di differenziabilità di una funzione periodica con delle stime quantitative per una successione approssimante di polinomi trigonometrici (Cfr. [1]).

Lemma 3.2.5 (Bernstein, Moser). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il limite di una successione di funzioni reali analitiche $f_\nu(x)$ definite nella striscia complessa*

$$\left\{x \in \mathbb{C}^n : \quad |\mathrm{Im}\, x| \le r_\nu = 2^{-\nu} r_0\right\},$$

con $0 < r_0 \le 1$ e tali che

$$f_0 = 0 \quad e \quad |f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x)|_{r_\nu} \le A r_\nu^l, \tag{3.28}$$

con A costante. Allora $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ per ogni $s \le l$ non intero ed inoltre

$$|f|_{C^s} \le \frac{\hat{C} A}{\mu(\mu - 1)} r_0^{l-s}$$

dove $0 < \mu = s - [s] < 1$ è la parte frazionaria di s e $\hat{C} = \hat{C}(l, n) > 0$ è un'opportuna costante.
Inoltre, se le f_ν sono periodiche nelle variabili x_i, allora anche la funzione limite f lo è.

Osservazione. Prima di procedere con la dimostrazione del lemma, facciamo alcune osservazioni preliminari.

(i) L'aver assunto $f_0 = 0$ non è un'ipotesi restrittiva. Se avessimo $f_0 \neq 0$ e (3.28) continuasse ad essere valida per ogni $\nu > 0$, allora basterebbe considerare la nuova successione di funzioni

$$\tilde{f}_\nu := f_\nu - f_0 \, .$$

Si vede facilmente che la successione così costruita è tale che:

$$\tilde{f}_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad |\tilde{f}_\nu - \tilde{f}_{\nu-1}|_{r_\nu} \leq A r_\nu^l \, ,$$

e quindi la successione delle $\tilde{f}_\nu$ converge uniformemente a $f - f_0$, ed inoltre

$$|f - f_0|_{C^s} \leq \frac{\hat{C} A}{\mu(\mu - 1)} r_0^{l-s} \, .$$

(ii) E' sufficiente dimostrare il lemma 3.2.5 nel caso particolare $l \in (0,1)$ e $l = s = \mu$ (cioè $0 < s = l < 1$). A tal fine è opportuno considerare le tre seguenti affermazioni:

$$\text{Il lemma 3.2.5 è valido per } 0 < s < l = 1 \tag{I}$$

$$\text{Il lemma 3.2.5 è valido per } 0 < s < l < 1 \tag{II}$$

$$\text{Il lemma 3.2.5 è valido per } 0 < s = l < 1 \tag{III}$$

e mostrare che

$$(III) \implies (II) \implies (I) \, .$$

Procediamo nella dimostrazione di tali implicazioni.

(II) $\implies$ (I): Per dimostrare l'affermazione (I) dobbiamo considerare il caso $l = 1$. Assumiamo che (3.28) sia valida con $l = 1$ e fissiamo $0 < s < 1$. Allora, per ogni $s < l < 1$

$$|f_\nu - f_{\nu-1}|_{r_\nu} \leq A r_\nu \leq A r_\nu^l$$

e questo mostra che f_ν soddisfa l'ipotesi (3.28) di (II). Applicando (II), otteniamo

$$|f|_{C^s} \leq \frac{\hat{C}_1 A}{s(1 - s)} r_0^{l-s}$$

e prendendo l'estremo inferiore su tutti gli $l < 1$, segue che:

$$|f|_{C^s} \leq \frac{\hat{C}_1 A}{s(1 - s)} r_0^{1-s}$$

e quindi abbiamo completato la dimostrazione di (I).

(III) $\implies$ (II): Sappiamo per ipotesi da (II), che

$$|f_\nu - f_{\nu-1}|_{r_\nu} \leq A r_\nu^l$$

per ogni $0 < s < l < 1$. Quindi

$$\begin{aligned}|f_\nu - f_{\nu-1}|_{r_\nu} &\leq Ar_\nu^l = Ar_\nu^{l-s} r_\nu^s \leq \\ &\leq Ar_0^{l-s} r_\nu^s\end{aligned}$$

e questo mostra che la successione $\tilde{f}_\nu = \dfrac{f_\nu}{r_0^{l-s}}$ soddisfa le ipotesi di (III). Allora, per la (III), il suo limite uniforme $\tilde{f}$ appartiene a C^s e

$$|\tilde{f}|_{C^s} \leq \frac{\hat{C}_1 A}{s(1-s)}$$

che è equivalente a

$$|f|_{C^s} \leq \frac{\hat{C}_1 A}{s(1-s)} r_0^{l-s} .$$

Facciamo vedere ora come (III) implichi il caso generale e questo ci permetterà di concludere che è sufficiente dimostrare il lemma nel caso $0 < s = l < 1$. Vogliamo mostrare che il lemma 3.2.5 continua ad essere valido per $0 < l \leq k$, procedendo per induzione su k. Chiaramente la base induttiva è valida, in quanto abbiamo appena mostrato che (III) implica (II) e (I).
Sia $0 < s \leq l \leq k+1$. Possiamo assumere che $k < l \leq k+1$ (altrimenti usiamo l'ipotesi induttiva). Per ipotesi sappiamo che per ogni ν

$$|f_\nu - f_{\nu-1}|_{r_\nu} \leq Ar_\nu^l \; ;$$

quindi usando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1) otteniamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\alpha| = 1$

$$|\partial^\alpha f_\nu - \partial^\alpha f_{\nu-1}|_{\frac{r_\nu}{2}} \leq |f_\nu - f_{\nu-1}|_{r_\nu} \frac{2}{r_\nu} \leq 2Ar_\nu^{l-1} .$$

Quindi, per l'ipotesi induttiva, $\partial^\alpha f_\nu$ converge uniformemente a

$$\partial^\alpha f \in C^{s-1}(\mathbb{R}^n)$$

per ogni $s \leq l$, e si ha

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha f|_{C^{s-1}} &\leq \frac{2\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} r_0^{(l-1)-(s-1)} \\ &\leq \frac{2\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} r_0^{l-s} .\end{aligned}$$

Da ciò possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
|f|_{C^s} &\leq \max\left\{|f|_{C^0},\ \frac{2\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} r_0^{l-s}\right\} \leq \\
&\leq \max\left\{\frac{\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} r_0^l,\ \frac{2\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} r_0^{(l-s)}\right\} \leq \\
&\leq \frac{2\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} r_0^{l-s}
\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione del passo induttivo.

Quindi abbiamo fatto vedere come, per la dimostrazione del lemma, sia sufficiente considerare il caso (III). Passiamo ora alla dimostrazione del lemma.

Dimostrazione. Per le osservazioni appena fatte, possiamo limitarci a considerare il caso $0 < l = s = \mu < 1$. In questo caso dobbiamo provare che la successione $\{f_\nu\}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$ ad f e che

$$\begin{aligned}
|f|_{C^\mu} &= \max\left\{|f|_{C^0},\ \sup_{0<|x-y|\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\mu}\right\} \leq \\
&\leq \frac{\hat{C}_1 A}{\mu(\mu-1)}\,.
\end{aligned}$$

Poniamo $g_\nu = f_\nu - f_{\nu-1}$. Abbiamo la seguente stima:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\nu=k}^{N} g_\nu\right|_{C^0} &\leq \sum_{\nu=k}^{N} |g_\nu|_{C^0} = \sum_{\nu=k}^{N} |f_\nu - f_{\nu-1}|_{C^0} = \\
&= \sum_{\nu=k}^{N} A r_\nu^l \leq \\
&\leq \sum_{\nu=k}^{\infty} A\left(\frac{r_0}{2^\nu}\right)^\mu = \frac{A r_0^\mu}{2^{\mu k}} \frac{1}{1-2^{-\mu}}
\end{aligned}$$

che converge a 0 quando k tende a $+\infty$; perciò f_ν converge a $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$ e

$$|f|_{C^0} \leq A r_0^\mu \frac{2^{-\mu}}{1-2^{-\mu}}$$

come si vede facilmente ponendo $k = 1$ e $N = \infty$ nelle stime sopra. Poiché $1 - 2^{-\mu} \geq \dfrac{\mu}{2}$ per $\mu \in [0,1]$, otteniamo:

$$|f|_{C^0} \leq \frac{2A r_0^\mu}{\mu} < \frac{2A}{\mu(1-\mu)} r_0^\mu \leq \tag{3.29}$$

$$\leq \frac{2A}{\mu(1-\mu)}\,. \tag{3.30}$$

Al fine di stimare la seconda parte di $|f|_{C^\mu}$, dobbiamo distinguere due casi:

$$\text{(i)}:\ r_0 < |x-y| < 1 \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)}:\ |x-y| \leq r_0\,.$$

(i) Usando la seconda disuguaglianza in (3.29) otteniamo:

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\le 2|f|_{C^0} \le \frac{4A}{\mu(1-\mu)} r_0^\mu \le \\ &\le \frac{4A}{\mu(1-\mu)}|x-y|^\mu \ . \end{aligned}$$

(ii) Osserviamo che deve esistere un $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\frac{r_0}{2^{N+1}} \le |x-y| \le \frac{r_0}{2^N} \ .$$

La seconda disuguaglianza in (3.29) è equivalente a

$$\left(\frac{2^N}{r_0}\right)^{1-\mu} \le |x-y|^{\mu-1} \ . \tag{3.31}$$

Notiamo inoltre che:

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\le \sum_{\nu=1}^{\infty} |g_\nu(x)-g_\nu(y)| = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} |g_\nu(x)-g_\nu(y)| + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |g_\nu(x)-g_\nu(y)| \ . \end{aligned}$$

Stimiamo ora separatamente le due somme. Usando la stima di Cauchy abbiamo (ricordiamo che per ipotesi $|g_\nu|_{r_\nu} \le A r_\nu^\mu$):

$$\begin{aligned} |\partial_x g_\nu|_{\frac{r_\nu}{2}} &\le |g_\nu|_{r_\nu}\frac{2}{r_\nu} \le \\ &\le 2A r_\nu^{\mu-1} \ ; \end{aligned}$$

quindi usando Lagrange:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} |g_\nu(x)-g_\nu(y)| &\le 2A\sum_{\nu=1}^{N} r_\nu^{\mu-1}|x-y| = \\ &= 2A|x-y|\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{2^\nu}{r_0}\right)^{1-\mu} = \\ &= 2A|x-y|\frac{1}{r_0^{1-\mu}}\frac{2^{(N+1)(1-\mu)}-1}{2^{1-\mu}-1} \ . \end{aligned}$$

Poiché $2^t - 1 \ge \dfrac{t}{2}$ per ogni $t \ge 0$ (e poiché $2^{1-\mu} \le 2$), dalla (3.31) otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} |g_\nu(x)-g_\nu(y)| &\le 2A|x-y|\frac{1}{r_0^{1-\mu}}\left(2\frac{2^{(N+1)(1-\mu)}}{1-\mu}\right) \le \\ &\le 4A|x-y|\frac{1}{r_0^{1-\mu}}\left(2^{1-\mu}\frac{2^{N(1-\mu)}}{1-\mu}\right) \le \\ &\le 8A\frac{|x-y|^\mu}{1-\mu} \ . \end{aligned}$$

Inoltre, usando nuovamente il fatto che $1-2^{-\mu} \geq \dfrac{\mu}{2}$ per $\mu \in [0,1]$ e (3.29):

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |g_\nu(x) - g_\nu(y))| &\leq 2 \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |g_\nu|_{C^0} \leq \\
&\leq 2A \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{2^\nu}\right)^\mu \leq \\
&\leq 2A \left(\frac{r_0}{2^{N+1}}\right)^\mu \frac{1}{1-2^{-\mu}} \leq \\
&\leq 4A \frac{|x-y|^\mu}{\mu} .
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme le stime ottenute:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \frac{8A}{1-\mu}|x-y|^\mu + \frac{4A}{\mu}|x-y|^\mu \leq \\
&\leq \frac{A(8\mu + 4 - 4\mu)}{\mu(1-\mu)}|x-y|^\mu \leq \\
&\leq \frac{8A}{\mu(1-\mu)}|x-y|^\mu .
\end{aligned}
$$

Quindi possiamo concludere:

$$
|f|_{C^\mu} \leq \frac{\hat{C}_1 A}{\mu(1-\mu)} ,
$$

dove $\hat{C}_1 = 8$. Questo permette di concludere la dimostrazione del lemma, osservando che per quanto visto nell'osservazione precedente dobbiamo scegliere la costante del lemma nel seguente modo:

$$
\hat{C} = 2\hat{C}_1 = 16 .
$$

□

3.3 Dimostrazione del teorema KAM: caso differenziabile

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per estendere il teorema KAM alla classe delle funzioni hamiltoniane sufficientemente differenziabili.

Teorema 3.3.1. (Moser)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ e $\rho > 0$, e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino. Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio aperto contenente $B_\rho(0)$ e sia $F \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ tale che

$$\begin{cases} F_x(x,0) = 0 \\ F_y(x,0) = \omega \end{cases} \tag{3.32}$$

per $x \in \mathbb{T}^n$; supponiamo inoltre che soddisfi le seguenti stime per $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in G$:

$$\begin{aligned} &|F|_{C^l} \leq M \\ &\left|\langle F_{yy}(\cdot, 0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma, \tau, l, m, M, n, \rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, l, m, M, n, \rho) > 0$$

in modo che valga quanto segue.
Se $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ è una funzione hamiltoniana tale che per qualche $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ si abbia

$$|H - F|_{C^s} \leq M\varepsilon^{l-s} \qquad \textit{per ogni } \ 0 \leq s \leq l\,, \tag{3.34}$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\ \\ Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases} \tag{3.35}$$

tali che:

i) $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ sono entrambe periodiche con periodo 1;

ii) $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $v \circ u^{-1} \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$, per ogni $s \leq m+1$ tale che $s \notin \mathbb{N}$ e $s + \tau \notin \mathbb{N}$.

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$
\begin{aligned}
|u - \mathrm{id}\,|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+1-s} && 0 < s \leq m+1 \\
|v \circ u^{-1}|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+\tau+1-s} && 0 < s \leq m+\tau+1\,,
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione consiste nell' approssimare la nostra hamiltoniana con una successione di hamiltoniane reali analitiche, usando le tecniche di approssimazione di Jackson, Moser, Zehnder e Bernstein che abbiamo ampiamente discusso in precedenza. Osserviamo che nel nostro caso, la hamiltoniana (cioè la "*funzione approssimata*") non è definita su tutto lo spazio, ma soltanto su un suo sottoinsieme, che nel nostro caso è una sfera. Questo non rappresenta una limitazione all'applicazione dei risultati fin qui dimostrati, in quanto tali domini sono chiaramente diffeomorfi e quindi godono delle stesso proprietà topologiche che abbiamo utilizzato nella dimostrazione di tali risultati.

Approssimiamo quindi $H(x,y)$ con una successione di funzioni reali analitiche $\{H^{(\nu)}(x,y)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ definite nelle striscie

$$\sigma_{r_{\nu-1},\rho} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} :\ (\mathrm{Re}\, x) \in \mathbb{T}^n,\ |\mathrm{Im}\, x| \leq r_{\nu-1},\ |\mathrm{Re}\, y| \leq \rho,\ |\mathrm{Im}\, y| \leq r_{\nu-1}\},$$

dove $r_\nu = \dfrac{\varepsilon}{2^\nu}$, ($\varepsilon > 0$ è il parametro che compare in (3.34), che supporremo minore di 1).
Scegliamo tali "*hamiltoniane approssimanti*" in modo che valgano le seguenti stime nella striscia $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$ (vedi il lemma 3.2.3):

$$
\begin{aligned}
&\left| H^{(\nu)}(z) - \sum_{|\beta|\leq l} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \leq \tilde{c}_1 r_\nu^l \\
&\left| H^{(\nu)}_y(z) - \sum_{|\beta|\leq l-1} \frac{\partial^\beta H_y(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \leq \tilde{c}_1 r_\nu^{l-1} \\
&\left| H^{(\nu)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \leq \tilde{c}_1 r_\nu^{l-2}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

dove

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(l,n,M) \geq M \tag{3.38}$$

è scelta appropriatamente (Lemma 3.2.3) (supporre che sia maggiore di M non è affatto una scelta restrittiva, come ci si convince facilmente osservando che $|H|_{C^l} \leq 2M$).
Per induzione costruiremo una successione di trasformazioni simplettiche, reali

analitiche $z = \phi^{(\nu)}(\zeta)$ (dove $z = (x, y)$ e $\zeta = (\xi, \eta)$), della forma

$$\begin{cases} x = u^{(\nu)}(\xi) \\ y = v^{(\nu)}(\xi) + \left(u_\xi^{(\nu)^T}(\xi)\right)^{-1} \eta \end{cases} \tag{3.39}$$

tali che $u^{(\nu)}(\xi) - \xi$ e $v^{(\nu)}(\xi)$ siano entrambe periodiche con periodo 1 e la hamiltoniana trasformata

$$K^{(\nu)} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu)}$$

soddisfi

$$\frac{\partial K^{(\nu)}}{\partial \xi}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial K^{(\nu)}}{\partial \eta}(\xi, 0) = \omega\,. \tag{3.40}$$

Più precisamente la trasformazione $\phi^{(\nu)}$ mapperà $\Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ (con $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$), nella striscia $\sigma_{r_\nu,\rho}$.
Daremo ora uno *sketch* della dimostrazione che seguiremo:

- Per $\nu = 0$ useremo la condizione di piccolezza su $H - F$ (cioè la (3.34)) e (3.37), per verificare che la hamiltoniana reale analitica $H^{(0)}(x, y)$ soddisfa le ipotesi del teorema KAM analitico (teorema 2.2.1) nella striscia di larghezza $r = \theta\varepsilon$, con $\delta = \varepsilon^m$ (Passo 1).

- Una volta stabilita l'esistenza di $\phi^{(\nu-1)}$ per qualche $\nu \geq 1$, useremo la condizione (3.37) per controllare che $H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}$ soddisfa le ipotesi del teorema KAM analitico (teorema 2.2.1) con $r = \theta r_\nu$ e $\delta = r_\nu^m$ (Passo 2). Questo ci garantirà l'esistenza di una trasformazione simplettica

$$z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$$

della forma (3.39), da $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ in $\Sigma_{\theta r_\nu}$, tale che $\psi^{(\nu)}(\xi, 0) - (\xi, 0)$ sia periodica di periodo 1 e la hamiltoniana trasformata $K^{(\nu)} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu)}$ soddisfi (3.40), dove

$$\phi^{(\nu)} = \phi^{(\nu-1)} \circ \psi^{(\nu)}\,.$$

Denotando con $F^{(0)}$ la "*regolarizzata*" di F (vedi lemma 3.2.3), definiremo le seguenti matrici simmetriche

$$\begin{cases} Q^{(\nu)} = K_{\eta\eta}^{(\nu-1)} & \text{(per } \nu \geq 1) \\ Q^{(0)} = F_{yy}^{(0)} \end{cases}$$

ed indicheremo con

$$S^{(\nu)}(\xi, \eta) = U^{(\nu)}(x) + V^{(\nu)}(x) \cdot \eta$$

la funzione generatrice della trasformazione $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$.
Applicando il teorema KAM analitico ricaveremo le seguenti stime per

$\zeta \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$:

$$\begin{cases} |\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta| \leq \dfrac{\tilde{c}_2(1-\theta)}{240M^3} r_\nu^{m+1} \\[2ex] |\psi_\zeta^{(\nu)}(\zeta) - \mathbb{I}| \leq \dfrac{\tilde{c}_2}{120M^3} r_\nu^m \\[2ex] |K_{\eta\eta}^{(\nu)}(\zeta) - Q^{(\nu)}(\zeta)| \leq \dfrac{\tilde{c}_2 r_\nu^m}{4M} \\[2ex] |U_x^{(\nu)}(x)| \leq \theta \dfrac{\tilde{c}_2}{120M^3} r_\nu^{m+\tau+1} \end{cases} \tag{3.41}$$

con

$$\tilde{c}_2 = \tilde{c}_2(\gamma, \tau, \theta, M, n) = c(\gamma, \tau, \theta, 2M, n)\,,$$

dove c è la costante del teorema KAM analitico (teorema 2.2.1); notiamo che per come è stata ricavata la costante c (vedi (2.25)), abbiamo che:

$$\tilde{c}_2 \geq 8M\,. \tag{3.42}$$

- Nel <u>Passo 3</u> mostreremo come (3.41) implichi le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\phi^{(\nu)}(\zeta) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)| \leq \dfrac{\tilde{c}_2}{120M^3}(1-\theta) r_\nu^{m+1} \\[2ex] |\phi_\zeta^{(\nu)}(\zeta) - \phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)| \leq \dfrac{\tilde{c}_2}{60M^3} r_\nu^m \\[2ex] \left|v^{(\nu)}\left((u^{(\nu)})^{-1}(x)\right) - v^{(\nu-1)}\left((u^{(\nu-1)})^{-1}(x)\right)\right| \leq \dfrac{\tilde{c}_2}{120M^3} r_\nu^{m+\tau+1}\,, \end{cases} \tag{3.43}$$

rispettivamente per $\zeta \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$, $\zeta \in \Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ e $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_{\nu+1}$.

Richiederemo inoltre che

$$\varepsilon^* \leq \rho \qquad \text{e} \qquad (\varepsilon^*)^m \leq \delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, 2M, n) \tag{3.44}$$

(dove δ^* è stata definita nel teorema KAM analitico 2.2.1) e definiremo le seguenti costanti:

$$\tilde{c}_3 = \tilde{c}_3(m, n) = \hat{C}(m+1, n)\,,$$

(dove la costante $\hat{C}$ è la costante definita nel lemma 3.2.5)

$$\lambda = l - 2\tau - 2 - m \tag{3.45}$$

$$\tilde{c}_4 = \frac{4\,\tilde{c}_2}{1 - 2^{-m}} \tag{3.46}$$

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{c}_2 \tilde{c}_3}{120M^3} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{m+\tau+1} \tag{3.47}$$

in modo che siano soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

$$(3+e^n)\tilde{c}_1{\varepsilon^*}^\lambda \leq \left(\frac{\theta}{2}\right)^l \tag{3.48}$$

$$4n\tilde{c}_1\theta\varepsilon M \leq 1 \tag{3.49}$$

$$\tilde{c}_4{\varepsilon^*}^m \leq 1-\theta \leq \log 2\,. \tag{3.50}$$

D'ora in poi assumeremo che la costante $\varepsilon > 0$, che compare in (3.34) e (3.37), sia minore o uguale di ε^*.

Definiamo infine

$$\begin{cases} M_\nu = \dfrac{M_{\nu-1}}{1-\tilde{c}_2 r_\nu^m} \\ M_0 = 2M \end{cases} \tag{3.51}$$

ed usando la (3.46) otteniamo che per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ si ha:[4]

$$\begin{aligned} M_\nu &\leq M_{\nu-1}e^{2\tilde{c}_2 r_\nu^m} \leq \ldots \leq M_0 e^{2\tilde{c}_2\sum_{j=1}^{\nu} r_j^m} \leq \\ &\leq 2Me^{4\tilde{c}_2\frac{\varepsilon^m}{1-2^{-m}}} \leq 2Me^{\tilde{c}_4{\varepsilon^*}^m} \leq 4M \end{aligned} \tag{3.52}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la (3.50).

Abbiamo sviluppato ora tutte le premesse necessarie per avviare lo schema induttivo. Procediamo quindi nella descrizione di tale schema seguendo le linee guida accennate in precedenza.

Passo 1

Mostreremo che esiste una trasformazione simplettica $z = \psi^{(0)}(\zeta)$ della forma (3.39) da Σ_{r_1} in $\Sigma_{\theta r_0}$, tale che $\psi^{(0)}(\xi,0)-(\xi,0)$ sia periodica con periodo 1 e la hamiltoniana trasformata $K^{(0)} = H^{(0)}\circ\psi^{(0)}$ soddisfi (3.40). Inoltre faremo vedere che $K^{(0)}$ e $\psi^{(0)}$ soddisfano le stime (3.41) con $\nu = 0$.

<u>Dimostrazione</u>: Cominciamo col mostrare che $H^{(0)}$ soddisfa le ipotesi necessarie per applicare il teorema KAM analitico (teorema 2.2.1). Come prima cosa stimiamo

$$\left|H^{(0)}(x,0) - \langle H^{(0)}(\cdot,0)\rangle\right|$$

[4] Per la prima disuguaglianza useremo:

$$\frac{1}{1-x} \leq e^{2x} \qquad \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,.$$

Osserviamo che nel nostro caso

$$\tilde{c}_2 r_\nu^m < \frac{1}{2}$$

per come è stata scelta la costante $\tilde{c}_2$ (vedi teorema 2.2.1).

per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_0 = \theta\varepsilon$.
Osservando che:

$$\left| H^{(0)}(x,0) - \langle H^{(0)}(\cdot,0)\rangle \right| \quad \leq \quad \int_{\mathbb{T}^n} |H^{(0)}(x,0) - H^{(0)}(\xi,0)|\, d\xi\,, \tag{3.53}$$

ci si riconduce a stimare la quantità sotto segno di integrale; tale quantità si può maggiorare nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
|H^{(0)}(x,0) - H^{(0)}(\xi,0)| \quad &\leq \quad \left| H^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta \right| + \\
&+ \quad \left| \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta - F(\mathrm{Re}\, x, 0) \right| + \\
&+ \quad |F(\mathrm{Re}\, x, 0) - F(\xi,0)| + |F(\xi,0) - H(\xi,0)| + \\
&+ \quad |H(\xi,0) - H^{(0)}(\xi,0)|\,.
\end{aligned}$$

Stimiamo separatamente i vari termini, per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_0 = \theta\varepsilon$:

- dalla (3.37) otteniamo che:

$$\begin{aligned}
\left| H^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta \right| \quad &\leq \quad \tilde{c}_1(\theta r_0)^l \leq \\
&\leq \quad \tilde{c}_1 \varepsilon^l\,.
\end{aligned}$$

- Cominciamo con l'osservare che

$$F(\mathrm{Re}\, x, 0) \quad = \quad \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta F(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta\,;$$

  infatti, per la (3.32) abbiamo che $F_x(x,0) = 0$ e di conseguenza ogni derivata rispetto alle x, calcolata in $(x,0)$, è nulla; per quanto riguarda i termini in cui compaiono le derivate rispetto alle y, questi sono nulli in quanto il fattore $(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta$ è uguale a 0. Quindi usando la (3.34)

otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\operatorname{Re} x,0)}{\beta!}(i\operatorname{Im} x,0)^\beta - F(\operatorname{Re} x,0)\right| = \\
&= \left|\sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\operatorname{Re} x,0)}{\beta!}(i\operatorname{Im} x,0)^\beta - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta F(\operatorname{Re} x,0)}{\beta!}(i\operatorname{Im} x,0)^\beta\right| \le \\
&\le \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{|\partial^\beta H(\operatorname{Re} x,0) - \partial^\beta F(\operatorname{Re} x,0)|}{\beta!}|(i\operatorname{Im} x,0)^\beta| \le \\
&\le \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|}}}{\beta!}(\theta r_0)^{|\beta|} \le \\
&\le \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|}}}{\beta!}\varepsilon^{|\beta|} \le \\
&\le \sum_{|\beta|=0}^{[l]} M\frac{\varepsilon^{l-|\beta|}\varepsilon^{|\beta|}}{\beta!} \le \\
&\le M e^n \varepsilon^l\,,
\end{aligned}
$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il seguente fatto:

$$
B(n) := \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\beta!} = e^n\,; \tag{3.54}
$$

questo si può dimostrare facilmente per induzione su n, osservando che per $n=1$ segue direttamente dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale, mentre per $n>1$ è sufficiente osservare che:

$$
\begin{aligned}
B(n+1) &= \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{n+1}} \frac{1}{\beta!} = \\
&= \sum_{\beta_{n+1}=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{n+1}!} \sum_{\hat\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\hat\beta!} = \\
&= B(n)\sum_{\beta_{n+1}=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{n+1}!} = eB(n)\,.
\end{aligned}
$$

- Dalla (3.32) si deduce che la F è costante sul sottospazio

$$
\{(x,0):\ x\in\mathbb{T}^n\}
$$

e quindi:

$$
|F(\operatorname{Re} x,0) - F(\xi,0)| = 0\,.
$$

- Usando la (3.34) con $s=0$ otteniamo:

$$
\begin{aligned}
|F(\xi,0) - H(\xi,0)| &\le |F-H|_{C^0} \le \\
&\le M\varepsilon^l\,.
\end{aligned}
$$

- Se $\xi \in \mathbb{T}^n$, allora $\mathrm{Im}\,\xi = 0$ e quindi

$$H(\xi,0) = \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\xi,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,\xi,0)^\beta .$$

Applicando (3.37) otteniamo:

$$\begin{aligned} |H(\xi,0) - H^{(0)}(\xi,0)| &= \left| H^{(0)}(\xi,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\xi,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,\xi,0)^\beta \right| \leq \\ &\leq \tilde{c}_1 \varepsilon^l . \end{aligned}$$

Riassumendo le stime trovate ed usando (3.38), (3.45), (3.48) e (3.53) :

$$\begin{aligned} \left| H^{(0)}(x,0) - \langle H^{(0)}(\cdot,0)\rangle \right| &\leq 2\tilde{c}_1\varepsilon^l + M\varepsilon^l(1+e^n) \leq \\ &\leq 2\tilde{c}_1\varepsilon^l + \tilde{c}_1\varepsilon^l(1+e^n) \leq \\ &\leq \tilde{c}_1\varepsilon^l(3+e^n) = \\ &= (3+e^n)\tilde{c}_1\,\varepsilon^\lambda\varepsilon^m\varepsilon^{2\tau+2} \leq \\ &\leq \varepsilon^m(\theta\varepsilon)^{2\tau+2} . \end{aligned}$$

In maniera simile otteniamo la stima per $|H_y^{(0)}(x,0) - \omega|$. Infatti:

$$\begin{aligned} |H_y^{(0)}(x,0) - \omega| &= |H_y^{(0)}(x,0) - F_y(x,0)| \leq \\ &\leq \left| H_y^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta \right| + \\ &+ \left| \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta - F_y(x,0) \right| . \end{aligned} \tag{3.55}$$

Stimiamo separatamente i due addendi:

- usando (3.37) abbiamo che:

$$\left| H_y^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta \right| \leq \tilde{c}_1\varepsilon^{l-1} .$$

- Cominciamo con l'osservare che:

$$F_y(x,0) = \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta F_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta$$

(si ragiona analogamente a quanto visto per la stima precedente). Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta - F_y(x,0)\right| \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{|\partial^\beta H_y(x,0) - \partial^\beta F_y(x,0)|}{\beta!} \left|(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta\right| \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|+1}}}{\beta!}(\theta r_0)^{|\beta|} \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|+1}}}{\beta!}\varepsilon^{|\beta|} \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} M\frac{\varepsilon^{l-|\beta|-1}\varepsilon^{|\beta|}}{\beta!} \leq Me^n\varepsilon^{l-1} \,.
\end{aligned}$$

Riassumendo le stime trovate ed usando (3.38), (3.45), (3.48) e (3.55), possiamo concludere:

$$\begin{aligned}
|H_y^{(0)}(x,0) - \omega| &\leq (\tilde{c}_1 + e^n M)\varepsilon^{l-1} \leq \\
&\leq (\tilde{c}_1 + e^n \tilde{c}_1)\varepsilon^{l-1} \leq \\
&\leq (1+e^n)\tilde{c}_1\varepsilon^{l-1} = \\
&= (1+e^n)\tilde{c}_1\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{m}\varepsilon^{2\tau+1} \leq \\
&\leq \varepsilon^m(\theta\varepsilon)^{\tau+1} \,.
\end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare ora la stima relativa alla matrice hessiana di $H^{(0)}$. Ricordiamo che abbiamo definito $Q^{(0)}(z) = F_{yy}^{(0)}(z)$, dove $F^{(0)}$ è la "*regolarizzata*" di F (vedi Lemma 3.2.3) e soddisfa:[5]

$$\begin{aligned}
\left|F_{yy}^{(0)}(z) - \sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta\right| &\leq \tilde{c}_1(\theta r_0)^{l-2} = \\
&= \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} \,. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

[5] Possiamo prendere la costante $\tilde{c}_1$ uguale alla costante che compare in (3.37), in quanto per ipotesi anche $|F|_{C^l} \leq M$.

Consideriamo la seguente stima per $(x,y) \in \Sigma_{\theta r_0}$:

$$
\begin{aligned}
|H^{(0)}_{yy}(z) - Q^{(0)}(z)| \le & \left| H^{(0)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| + \\
+ & \left| \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta - \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| + \\
+ & \left| \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta - Q^{(0)}(z) \right| . \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Stimiamo i vari addendi separatamente:

- usando la (3.37) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\left| H^{(0)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| & \le \tilde{c}_1 (\theta r_0)^{l-2} \\
& \le \tilde{c}_1 \varepsilon^{l-2} .
\end{aligned}
$$

- Dalla (3.34) otteniamo:

$$
\begin{aligned}
& \left| \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta - \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \le \\
& \le \sum_{|\beta| \le l-2} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|+2}}}{\beta!} |(i\mathrm{Im}\, z)^\beta| \le \\
& \le \sum_{|\beta| \le l-2} M \frac{\varepsilon^{l-|\beta|-2} \varepsilon^{|\beta|}}{\beta!} \le e^n M \varepsilon^{l-2} .
\end{aligned}
$$

Quindi, riassumendo le stime trovate ed usando (3.45), (3.57) e (3.56) ed il fatto che $\tilde{c}_2 \ge 8M$ (vedi (3.42)), possiamo concludere:

$$
\begin{aligned}
|H^{(0)}_{yy}(z) - Q^{(0)}(z)| & \le (2\tilde{c}_1 + e^n M) \varepsilon^{l-2} \le \\
& \le (2 + e^n) \tilde{c}_1 \, \varepsilon^\lambda \varepsilon^m \varepsilon^{2\tau} \le \frac{\tilde{c}_2 \varepsilon^m}{8M} .
\end{aligned}
$$

Per concludere la dimostrazione di questo passo ci resta soltanto da far vedere che $Q^{(0)}$ soddisfa le ipotesi del teorema 2.2.1, cioè:

$$
\left| Q^{(0)} \right| \le 2M \qquad \text{e} \qquad \left| \langle Q^{(0)}(\cdot, 0) \rangle^{-1} \right| \le 2M .
$$

- Usando (3.37) e (3.50), otteniamo la seguente stima in $\Sigma_{\theta r_0}$:

$$\begin{aligned}
|Q^{(0)}(z)| &= |F_{yy}^{(0)}(z)| \leq \\
&\leq \left| F_{yy}^{(0)}(z) - \sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| + \\
&+ \left| \sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \leq \\
&\leq \tilde{c}_1(\theta r_0)^{l-2} + \sum_{|\beta|\leq l-2} |F|_{C^l} \frac{(\theta r_0)^{|\beta|}}{\beta!} \leq \\
&\leq \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} + e^{n\theta r_0} M \leq \\
&\leq \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} + e^{n\theta\varepsilon} M \leq \\
&\leq \frac{M}{4} + e^{\frac{1}{4}} M \leq 2M \,.
\end{aligned}$$

- In tale striscia definiamo le seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
A &:= \left\langle F_{yy}^{(0)}(\cdot,0) - F_{yy}(\cdot,0) \right\rangle \\
B &:= \langle F_{yy}(\cdot,0) \rangle \,.
\end{aligned}$$

Usando[6] il lemma 3.2.3 e (3.33), otteniamo:

$$\begin{aligned}
|A| &\leq \sup_{\xi\in\mathbb{T}^n} |F_{yy}^{(0)}(\xi,0) - F_{yy}(\xi,0)| \leq \\
&\leq \tilde{c}_1(\theta r_0)^{l-2} = \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} \\
|B^{-1}| &= \left| \langle F_{yy}(\cdot,0) \rangle^{-1} \right| \leq M \,.
\end{aligned}$$

Quindi usando (3.49) possiamo concludere:

$$\begin{aligned}
\left| \langle F_{yy}^{(0)}(\cdot,0) \rangle^{-1} \right| &= |(A+B)^{-1}| \leq \\
&\leq |(\mathbb{I} + AB^{-1})^{-1}||B^{-1}| \leq \\
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} (|A||B^{-1}|)^k \leq \\
&\leq M \sum_{k\geq 0} (\tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} M)^k \leq \\
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \leq \\
&\leq 2M \,.
\end{aligned}$$

[6] Osserviamo che stiamo facendo la media su $\mathbb{T}^n$, quindi stiamo considerando x reali e di conseguenza:

$$\sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta = F_{yy}(x,0) \,.$$

Riassumendo, le stime appena dimostrate e la (3.33) mostrano che la hamiltoniana $H^{(0)}$ soddisfa in $\Sigma_{\theta r_0}$ le ipotesi del teorema KAM analitico (teorema 2.2.1), con $r = \theta r_0 = \theta\varepsilon$, $\delta = \varepsilon^m$ e $M' = 2M$; quindi possiamo concludere che esiste una trasformazione $z = \psi^{(0)}(\zeta)$ della forma (3.39) da Σ_{r_1} in $\Sigma_{\theta r_0}$, tale che $\psi^{(0)}(\xi, 0) - (\xi, 0)$ sia periodica con periodo 1 e la hamiltoniana trasformata $K^{(0)} = H^{(0)} \circ \psi^{(0)}$ soddisfi (3.40). Inoltre, sempre dal teorema 2.2.1 si ottiene che $K^{(0)}$ e $\psi^{(0)}$ soddisfano le stime (3.41) con $\nu = 0$.
Questo completa la dimostrazione del Passo 1.

Osserviamo che per $\nu = 0$ le disuguaglianze in (3.43) seguono immediatamente dal Passo 1, semplicemente definendo

$$\phi^{(-1)}(\zeta) = \zeta \qquad \text{e} \qquad \phi^{(0)} = \phi^{(-1)} \circ \psi^{(0)} = \psi^{(0)} .$$

Alcuni preliminari al Passo 2

Ora assumeremo di aver costruito una trasformazione $z = \phi^{(\nu-1)}(\zeta)$ della forma (3.39), da $\Sigma_{\theta r_\nu}$ in $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$, in modo tale che $u^{(\nu-1)}(\xi) - \xi$ e $v^{(\nu-1)}$ siano entrambe periodiche con periodo 1 e che soddisfino (3.43) con $\nu - 1$ al posto di ν. Inoltre la hamiltoniana trasformata

$$K^{(\nu-1)} = H^{(\nu-1)} \circ \phi^{(\nu-1)}$$

dovrà soddisfare (3.40).
In aggiunta a ciò, assumeremo anche che le trasformazioni $z = \psi^{(\mu)}(\zeta)$ (con $\mu = 0, \ldots, \nu - 1$), soddisfino la (3.41), e, usando (3.51) e (3.52), otterremo in maniera induttiva la seguente stima per $(\xi, \eta) \in \Sigma_{r_\nu}$:

$$\begin{cases} \left|K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\zeta)\right| \le M_{\nu-1} \\ \left|\langle K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\cdot, 0)\rangle^{-1}\right| \le M_{\nu-1} \, . \end{cases} \tag{3.58}$$

Infatti:

- Cominciamo con la dimostrazione della prima:

$$\begin{aligned} \left|K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\zeta)\right| &\le \left|K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\zeta) - Q^{(\nu-1)}(\zeta)\right| + \left|Q^{(\nu-1)}(\zeta)\right| \le \\ &\le \frac{\tilde{c}_2}{4M} r_{\nu-1}^m + M_{\nu-2} \le \\ &\le M_{\nu-2}(1 + \tilde{c}_2 r_{\nu-1}^m) \le \\ &\le \frac{M_{\nu-2}}{1 - \tilde{c}_2 r_{\nu-1}^m} = M_{\nu-1} \, . \end{aligned}$$

- Al fine di dimostrare la seconda disuguaglianza, definiamo le seguenti matrici:

$$A \equiv \left\langle K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\cdot, 0) - Q^{(\nu-1)}(\cdot, 0)\right\rangle \qquad \text{e} \qquad B \equiv \left\langle Q^{(\nu-1)}(\cdot, 0)\right\rangle .$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva otteniamo

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{\tilde{c}_2}{4M} r^m_{\nu-1} \\ |B^{-1}| &\leq M_{\nu-2} \end{aligned}$$

e quindi possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle K^{(\nu-1)}_{\eta\eta}(\cdot,0) \right\rangle^{-1} \right| &= \left|(A+B)^{-1}\right| = \\ &= |B^{-1}||(\mathbb{I}+B^{-1}A)^{-1}| \leq \\ &\leq M_{\nu-2} \sum_{k=0}^{\infty} |B^{-1}A|^k \leq \\ &\leq M_{\nu-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(M_{\nu-2} \frac{\tilde{c}_2}{4M} r^m_{\nu-1} \right)^k \leq \\ &\leq M_{\nu-2} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{c}_2 r^m_{\nu-1})^k \leq \\ &\leq \frac{M_{\nu-2}}{1-\tilde{c}_2 r^m_{\nu-1}} = M_{\nu-1} \,. \end{aligned}$$

Passo 2

Definiamo nella striscia $\Sigma_{\theta r_\nu}$ la seguente funzione:

$$\tilde{H}(x,y) = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}(x,y)\,.$$

Vogliamo dimostrare che valgono le seguenti stime per $(x,y) \in \Sigma_{\theta r_\nu}$:

$$\begin{aligned} &\left| \tilde{H}(x,0) - \langle \tilde{H}(\cdot,0) \rangle \right| \leq r^m_\nu (\theta r_\nu)^{2\tau+2} \\ &\left| \tilde{H}_y(x,0) - \omega \right| \leq r^m_\nu (\theta r_\nu)^{\tau+1} \\ &\left| \tilde{H}_{yy}(x,y) - Q^{(\nu)}(x,y) \right| \leq \frac{\tilde{c}_2}{8M} r^m_\nu \,. \end{aligned}$$

<u>Dimostrazione</u>: Poiché $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_\nu$, allora $\phi^{(\nu-1)}(x,0)$ assume valori nella regione in cui la stima (3.37) vale sia per $H^{(\nu)}$ che per $H^{(\nu-1)}$ (infatti la trasformazione $\phi^{(\nu-1)}$ mappa $\Sigma_{\theta r_\nu}$ in $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$). Cominciamo con l'osservare:

$$\left| \tilde{H}(x,0) - \langle \tilde{H}(\cdot,0) \rangle \right| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |\tilde{H}(x,0) - \tilde{H}(\xi,0)|\, d\xi \,; \tag{3.59}$$

quindi possiamo tentare di stimare la quantità sotto segno di integrale per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_\nu$. Ricordiamo che per la (3.40) si ha che

$$K^{(\nu-1)}(x,0) = K^{(\nu-1)}(\xi,0) \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{T}^n$$

ed usando (3.37), (3.45) e (3.48) possiamo maggiorare la funzione integranda nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
&|\tilde{H}(x,0) - \tilde{H}(\xi,0)| \le \\
&\le \left|\tilde{H}(x,0) - K^{(\nu-1)}(x,0)\right| + |K^{(\nu-1)}(x,0) - K^{(\nu-1)}(\xi,0)| + \\
&\quad + |K^{(\nu-1)}(\xi,0) - \tilde{H}(\xi,0)| \le \\
&\le 2 \sup_{|\mathrm{Im}\,\xi|\le\theta r_\nu} \left|\tilde{H}(\xi,0) - K^{(\nu-1)}(\xi,0)\right| = \\
&= 2 \sup_{|\mathrm{Im}\,\xi|\le\theta r_\nu} \left|H^{(\nu)}\circ\phi^{(\nu-1)}(\xi,0) - H^{(\nu-1)}\circ\phi^{(\nu-1)}(\xi,0)\right| \le \\
&\le 2\tilde{c}_1 r_\nu^l + 2\tilde{c}_1 r_{\nu-1}^l \le 2\tilde{c}_1 r_\nu^l + 2\tilde{c}_1 2^l r_\nu^l \le \\
&\le 2^l 4\,\tilde{c}_1 r_\nu^\lambda r_\nu^m r_\nu^{2\tau+2} \le 2^l \left(\frac{\theta}{2}\right)^l r_\nu^m r_\nu^{2\tau+2} \le \\
&\le r_\nu^m (\theta r_\nu)^{2\tau+2}\,.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme questa stima con (3.59) otteniamo proprio la prima stima desiderata.

Notiamo che sostituendo $\eta = 0$ nella seconda disuguaglianza in (3.43) ed usando la (3.46) e la (3.32), troviamo che vale la seguente stima per $|\mathrm{Im}\,\xi| \le \theta r_\nu$:[7]

$$\begin{aligned}
|u_\xi^{(\nu-1)}(\xi) - \mathbb{I}| &\le \sum_{\mu=0}^{\nu-1} |u_\xi^{(\mu)}(\xi) - u_\xi^{(\mu-1)}(\xi)| \le \\
&\le \frac{\tilde{c}_2}{60M^3}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} r_\mu^m = \frac{\tilde{c}_2}{60M^3}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^m}{2^{\mu m}} = \\
&= \frac{\tilde{c}_2\varepsilon^m}{60M^3\,(1-2^{-m})} \le \tilde{c}_4\varepsilon^m \le \\
&\le 1-\theta\,.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Da ciò, otteniamo per $|\mathrm{Im}\,\xi| \le \theta r_\nu$:

$$\begin{aligned}
\left|\left(u_\xi^{(\nu-1)}(\xi)\right)^{-1}\right| &= \left|\left((u_\xi^{(\nu-1)}(\xi) - \mathbb{I}) + \mathbb{I}\right)^{-1}\right| \le \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} |u_\xi^{(\nu-1)}(\xi) - \mathbb{I}|^k \le \sum_{k=0}^{\infty}(1-\theta)^k = \\
&\le \frac{1}{1-(1-\theta)} = \frac{1}{\theta}\,.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Quindi, applicando la *chain rule* ed usando (3.37), (3.45) e (3.48) possiamo

[7]Come già sottolineato in precedenza, indicheremo $\phi^{(-1)} = \mathrm{id}\,.$

concludere la seguente stima nella striscia $\Sigma_{\theta r_\nu}$:

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{H}_y(x,0)-\omega| = \\
&= \left| \left(u_\xi^{(\nu-1)}(x)\right)^{-1} \left[H_y^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}(x,0) - H_y^{(\nu-1)} \circ \phi^{(\nu-1)}(x,0)\right] \right| \le \\
&\le \theta^{-1}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-1} + \tilde{c}_1 r_{\nu-1}^{l-1}) \le \\
&\le \theta^{-1}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-1} + \tilde{c}_1 2^{l-1} r_\nu^{l-1}) \le \\
&\le 2\theta^{-1}\tilde{c}_1 2^{l-1} r_\nu^{l-1} = \\
&= 2\theta^{-1}\tilde{c}_1 2^{l-1} r_\nu^{\lambda} r_\nu^{m} r_\nu^{2\tau+1} = \\
&\le 2^l \theta^{-1} \left(\frac{\theta}{2}\right)^l r_\nu^m r_\nu^{2\tau+1} \le \\
&\le r_\nu^m (\theta r_\nu)^{\tau+1}
\end{aligned}
$$

e questo dimostra la seconda disuguaglianza.

Infine:

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{H}_{yy}(z) - Q^{(\nu)}(z)| = \\
&= \left| \left(u_\xi^{(\nu-1)}(x)\right)^{-1} \left[H_{yy}^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}(z) - \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \; H_{yy}^{(\nu-1)} \circ \phi^{(\nu-1)}(z)\right] \left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(x)\right)^{-1} \right| \le \\
&\le \theta^{-2}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-2} + \tilde{c}_1 r_{\nu-1}^{l-2}) \le \\
&\le \theta^{-2}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-2} + \tilde{c}_1 2^{l-2} r_\nu^{l-2}) \le \\
&\le 2\theta^{-2}\tilde{c}_1 2^{l-2} r_\nu^{l-2} = \\
&\le 2\theta^{-2}\tilde{c}_1 2^{l-2} r_\nu^{\lambda} r_\nu^{m} r_\nu^{2\tau} = \\
&\le 2^{l-1}\theta^{-2} \left(\frac{\theta}{2}\right)^l r_\nu^m r_\nu^{2\tau} \le \\
&\le \frac{\tilde{c}_2 r_\nu^m}{8M} \,,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato (3.42).
Questo completa la dimostrazione del Passo 2.

Passo 3

Dal Passo 2 e dalla (3.58) segue che la funzione hamiltoniana

$$\tilde{H} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}$$

soddisfa le ipotesi del teorema KAM analitico (vedi teorema 2.2.1), prendendo $r = \theta r_\nu$, $\delta = r_\nu^m$ e $Q = Q^{(\nu)} = K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}$. Quindi esiste una trasformazione simplettica $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ della forma (3.39), da $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ (dove $r_{\nu+1} = \theta^2 r_\nu$), nella striscia $\Sigma_{\theta r_\nu}$ e tale che $\psi^{(\nu)}(\xi,0) - (\xi,0)$ sia periodica con periodo 1 e la hamiltoniana trasformata

$$K^{(\nu)} = \tilde{H} \circ \psi^{(\nu)} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu)}$$

(dove $\phi^{(\nu)} = \phi^{(\nu-1)} \circ \psi^{(\nu)}$) soddisfi (3.40). Inoltre, $K^{(\nu)}$ e $\psi^{(\nu)}$ soddisfano le disuguaglianze in (3.41). Osserviamo che per costruzione, la trasformazione

$$\phi^{(\nu)} = \phi^{(\nu-1)} \circ \psi^{(\nu)}$$

mappa la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ nella striscia $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$.
Mostreremo ora qualcosa di più: faremo vedere che la trasformazione simplettica $z = \phi^{(\nu)}(\zeta)$ mappa la striscia $\Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ nella striscia $\sigma_{r_\nu,\rho}$ e che soddisfa (3.43) .

Dimostrazione: Usando la seconda disuguaglianza in (3.43) con ν sostituito da $\mu = 0, \dots, \nu-1$ e procedendo come in (3.60), otteniamo la seguente stima, valida per $(\xi, \eta) \in \Sigma_{\theta r_\nu}$:

$$\begin{aligned} |\phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)| &\leq |\phi_\zeta^{(-1)}(\zeta)| + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} |\phi_\zeta^{(\mu)}(\zeta) - \phi_\zeta^{(\mu-1)}(\zeta)| \leq \\ &\leq 1 + \frac{\tilde{c}_2}{60M^3} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} r_\mu^m \leq \\ &\leq 1 + \frac{\tilde{c}_2}{60M^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^\mu}\right)^m \leq \\ &\leq 1 + \frac{\tilde{c}_2}{60M^3(1-2^{-m})} \varepsilon^m \leq \\ &\leq 1 + \tilde{c}_4 \varepsilon^m \leq 1 + (1-\theta) \leq 2 \, ; \end{aligned} \tag{3.62}$$

da ciò segue - usando la (3.41) e Lagrange - che, per $(\xi, \eta) \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$:

$$\begin{aligned} |\phi^{(\nu)}(\zeta) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)| &= |\phi^{(\nu-1)}(\psi^{(\nu)}(\zeta)) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)| \leq \\ &\leq |\phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)||\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta| \leq \\ &\leq 2\frac{\tilde{c}_2(1-\theta)}{240} r_\nu^{m+1} = \\ &= \frac{\tilde{c}_2(1-\theta)}{120M^3} r_\nu^{m+1} \, . \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato la prima disuguaglianza in (3.43) e la seconda segue semplicemente usando la stima di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1, con $r = r_{\nu+1}$ e $\rho = \theta r_{\nu+1}$). Questa disuguaglianza implica, analogamente a quanto visto prima in (3.62), che $|\phi_\zeta^{(\nu)}(\zeta)| \leq 2$ per $\zeta \in \Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ e quindi $z = \phi^{(\nu)}(\zeta)$ soddisfa la seguente disuguaglianza per $\zeta \in \Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\, z| &\leq 2|\mathrm{Im}\, \zeta| = 2\sqrt{|\mathrm{Im}\, \xi|^2 + |\mathrm{Im}\, \eta|^2} \leq \\ &\leq 2r_{\nu+1} = r_\nu \, ; \end{aligned}$$

inoltre abbiamo già visto che $|\mathrm{Re}\, y| \le \rho$. Questo mostra che tale trasformazione mappa la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ in $\sigma_{r_\nu,\rho}$.

Al fine di stabilire l'ultima disuguaglianza in (3.43) utilizziamo la seguente identità (vedi (2.12)):

$$v^{(\nu)} \circ (u^{(\nu)})^{-1}(x) - v^{(\nu-1)} \circ (u^{(\nu-1)})^{-1}(x) = \left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(\xi)\right)^{-1} U_x^{(\nu)}(\xi)$$

per $x = u^{(\nu-1)}(\xi)$. Utilizzando la (3.60), otteniamo che se $|\mathrm{Im}\, x| \le \theta r_{\nu+1}$ e $x = u^{(\nu-1)}(\xi)$, allora $|\mathrm{Im}\,\xi| \le r_{\nu+1}$, in quanto la mappa

$$f(\xi) = x + \xi - u^{(\nu-1)}(\xi)$$

definisce una contrazione della striscia $|\mathrm{Im}\,\xi| \le r_{\nu+1}$ in se stessa. Questo ci consente di applicare le disuguaglianze (3.41) e (3.61), ottenendo:

$$\begin{aligned} \left|\left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(\xi)\right)^{-1} U_x^{(\nu)}(\xi)\right| &= \left|\left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(\xi)\right)^{-1}\right| \left|U_x^{(\nu)}(\xi)\right| \le \\ &\le \frac{1}{\theta}\left(\theta \frac{\tilde{c}_2}{120M^3} r_\nu^{m+\tau+1}\right) = \\ &= \frac{\tilde{c}_2}{120M^3} r_\nu^{m+\tau+1}\,. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del Passo 3.

Conclusione dello schema induttivo

Con il Passo 3 abbiamo completato la costruzione dello schema induttivo; ci rimane da dimostrare la convergenza delle successioni $\{u^{(\nu)}(\xi)\}_\nu$ e $\{v^{(\nu)}(\xi)\}_\nu$ e le stime in (3.36).

Osserviamo che le disuguaglianze in (3.43) implicano per $|\mathrm{Im}\,\xi| \le r_{\nu+1}$ e $|\mathrm{Im}\, x| \le \theta r_{\nu+1}$:

$$\begin{cases} |u^{(\nu)}(\xi) - u^{(\nu-1)}(\xi)| \le 2^{m+1} \dfrac{\tilde{c}_2}{120M^3} r_{\nu+1}^{m+1} \\ \left|v^{(\nu)} \circ \left(u^{(\nu)}\right)^{-1}(x) - v^{(\nu-1)} \circ \left(u^{(\nu-1)}\right)^{-1}(x)\right| \le \left(\dfrac{2}{\theta}\right)^{m+\tau+1} \dfrac{\tilde{c}_2}{120M^3} (\theta r_{\nu+1})^{m+\tau+1}\,. \end{cases} \tag{3.63}$$

In particolare queste stime rimangono valide per $\nu = 0$, semplicemente ponendo

$$u^{(-1)}(\xi) = \xi \qquad \text{e} \qquad v^{(-1)}(\xi) = 0\,.$$

Concludendo, segue dal lemma 3.2.5 che le funzioni limite (la cui esistenza è garantita dalle stime in (3.63))

$$u(\xi) = \lim_{\nu\to\infty} u^{(\nu)}(\xi)\,, \qquad v(\xi) = \lim_{\nu\to\infty} v^{(\nu)}(\xi)$$

soddisfano (3.36) con

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{c}_2 \tilde{c}_3}{120 M^3} \left(\frac{2}{\theta} \right)^{m+\tau+1} .$$

Inoltre, le funzioni $x = u(\xi)$ e $y = v(\xi)$ soddisfano (3.35) e le condizioni di periodicità. E questo conclude la dimostrazione del Teorema. □

Dal teorema appena dimostrato possiamo dedurre il seguente corollario.

Corollario 3.3.2. (Teorema KAM caso differenziabile II)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ e $\rho > 0$, e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino. Sia inoltre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio aperto contenente $B_\rho(y_0)$.
Sia $H(x,y) = h(y) + f(x,y)$ una hamiltoniana in $C^l(\mathbb{T}^n \times \Omega)$ tale che:

(i) $h'(y_0) = \omega$,

(ii) $|h|_{C^l} \leq M$,

(iii) $\left| (h_{yy}(y_0))^{-1} \right| \leq M$.

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma, \tau, l, m, M, n, \rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, l, m, M, n, \rho) > 0$$

in modo che, se per qualche $\varepsilon \leq \varepsilon^*$

$$|f|_{C^s} \leq M \varepsilon^{l-s} \qquad \text{per ogni } \ 0 \leq s \leq l \, ,$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + y_0 \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u, v + y_0) \\[2ex] Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u, v + y_0) \end{cases}$$

tali che:

i) $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono entrambe periodiche con periodo* 1;

ii) $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \circ u^{-1} + y_0 \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$, *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$.

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$
\begin{aligned}
|u-\mathrm{id}\,|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+1-s} \qquad 0<s\leq m+1 \\
|v\circ u^{-1}|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+\tau+1-s} \qquad 0<s\leq m+\tau+1\,,
\end{aligned}
$$

con $0<\mu=s-[s]<1$.

3.4 Unicità e regolarità

In questa sezione vogliamo presentare dei risultati relativi all'unicità dei tori invarianti con un'assegnata frequenza diofantina ω. In un contesto più generale tale problema è stato ampiamente discusso - nel caso analitico - da Zehnder (Cfr. [71]) e le idee e le tecniche da noi utilizzate sono profondamente ispirate a tale lavoro.

Cominciamo innanzitutto col dimostrare un primo semplice corollario del teorema 3.3.1.

Corollario 3.4.1. *Sia $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ come nelle ipotesi del Teorema 3.3.1 e sia*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

la soluzione di (3.32) ricavata nella dimostrazione di tale teorema. Sia inoltre $\lambda > 0$ la costante definita in (3.45) e sia $l' \geq l$ un qualsiasi numero reale tale che

$$m' = l' - 2\tau - 2 - \lambda \notin \mathbb{N} \qquad e \qquad m' + \tau \notin \mathbb{N}\,.$$

Allora, se $H \in C^{l'}(\mathbb{T}^n \times G)$, abbiamo che

$$u \in C^{m'+1} \qquad e \qquad v \circ u^{-1} \in C^{m'+\tau+1}\,.$$

In particolare, se $H \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times G)$ si ha che:

$$u \in C^\infty \qquad \text{e} \qquad v \circ u^{-1} \in C^\infty\,.$$

Dimostrazione. Dal lemma 3.2.3 sappiamo che esiste una costante $\tilde{c}_1' > 0$ tale che le disuguaglianze in (3.37) sono soddisfatte con $\tilde{c}_1'$ e l' al posto di $\tilde{c}_1$ e l. E' abbastanza semplice convincersi che le affermazioni del Passo 2 continuano a valere con m sostituito da m', se ν è sufficientemente grande. Ma questo implica che le disuguaglianze (3.41) e (3.43) sono ancora valide con m' al posto di m, sempre per valori di ν sufficientemente grandi. Analogamente si conclude che (3.63) continua a valere con m' e usando il lemma 3.2.5 possiamo concludere che

$$u \in C^{m'+1} \qquad \text{e} \qquad v \circ u^{-1} \in C^{m'+\tau+1}$$

e questo conclude la dimostrazione della prima parte. Osserviamo che la seconda parte è una semplice conseguenza di quanto appena detto. □

Ora concentreremo la nostra attenzione nel dimostrare la locale unicità delle soluzioni di sistemi hamiltoniani sufficientemente differenziabili, cioè un risultato di locale unicità per i tori invarianti con frequenza diofantina ω fissata. Questo ci permetterà di migliorare il risultato precedente, potendo concludere che le soluzioni di un sistema hamiltoniano C^∞ debbano anch'esse essere C^∞.

D'ora in poi denoteremo con $C^l(\mathbb{T}^n)$ lo spazio $C^l(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})$ e con $C^l_0(\mathbb{T}^n)$ lo spazio $C^l_0(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})$ (vedi definizione 3.1.3).

Cominciamo col dimostrare il seguente lemma, che può essere visto come un'estensione del lemma 2.1.2 al caso di funzioni non analitiche.

Lemma 3.4.2. *Siano $\nu \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, $l > \tau$ e sia $\omega \in \mathbb{R}^n$ un vettore (γ,τ)-diofantino. Allora l'equazione*

$$Df = g \in C^l_0(\mathbb{T}^n)$$

ammette un'unica soluzione $f \in C^s_0(\mathbb{T}^n)$, per ogni $s \notin \mathbb{N}$ tale che $s \leq l-\tau$ e tale soluzione soddisfa:

$$|f|_{C^s} \leq \frac{\tilde{c}_5}{\mu(1-\mu)}|g|_{C^{s+\tau}}, \tag{3.64}$$

dove $\tilde{c}_5 = \tilde{c}_5(\gamma,\tau,n,l) > 0$ è un'opportuna costante e $0 < \mu = s-[s] < 1$ la parte frazionaria di s.

Dimostrazione. Dal lemma 3.2.3 (disuguaglianza (3.21)) sappiamo che esiste una successione di funzioni reali analitiche $\{g_\nu\}_\nu$ nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \leq r_\nu = 2^{-\nu}$ periodiche di periodo 1 in tutte le loro componenti, con media nulla su $\mathbb{T}^n$ e tale da soddisfare le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} g_0 = 0 \\ |g_\nu - g_{\nu-1}|_{r_\nu} \leq \tilde{c}_6 r_\nu^{s+\tau}|g|_{C^{s+\tau}} \end{cases}$$

per un'opportuna costante $\tilde{c}_6 = \tilde{c}_6(l,n) > 0$. Indichiamo con g la funzione limite di tale successione. Utilizzando il lemma 2.1.2 otteniamo che l'unica soluzione f_ν dell'equazione $Df_\nu = g_\nu$, soddisfa la seguente stima:

$$\begin{aligned} |f_\nu - f_{\nu-1}|_{r_{\nu+1}} &\leq \frac{\tilde{c}_7}{(r_\nu - r_{\nu+1})^\tau}|g_\nu - g_{\nu-1}|_{r_\nu} \leq \\ &\leq \tilde{c}_6\tilde{c}_7\frac{r_\nu^{s+\tau}}{(r_\nu - r_{\nu+1})^\tau}|g|_{C^{s+\tau}} = \\ &= \tilde{c}_6\tilde{c}_7\frac{r_\nu^{s+\tau}}{r_{\nu+1}^\tau}|g|_{C^{s+\tau}} = \\ &= \tilde{c}_6\tilde{c}_7 2^{s+\tau}\frac{r_{\nu+1}^{s+\tau}}{r_{\nu+1}^\tau}|g|_{C^{s+\tau}} = \\ &\leq \tilde{c}_6\tilde{c}_7 2^{s+\tau} r_{\nu+1}^s |g|_{C^{s+\tau}} \end{aligned}$$

per una qualche costante $\tilde{c}_7 = \tilde{c}_7(\gamma,\tau,n) > 0$ (vedi lemma 2.1.2). Usando ora il lemma 3.2.5 possiamo concludere che $f = \lim f_\nu$ soddisfa (3.64), prendendo

$$\tilde{c}_5 = \tilde{c}_6\tilde{c}_7 2^{s+\tau} \leq \tilde{c}_6\tilde{c}_7 2^l\,.$$

□

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il teorema di unicità per i tori invarianti con frequenza diofantina fissata $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.3. *Siano $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, $0 < \lambda < 1$, $M \geq 1$ ed $l = \tau + \lambda + 1$, e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino. Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio aperto contenente lo zero e sia $H \in C^{l+2}(\mathbb{T}^n \times G)$ una hamiltoniana tale che*

$$\begin{cases} H_x(x,0) = 0 \\ H_y(x,0) = \omega \end{cases}$$

ed in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

$$|H|_{C^{l+2}} \leq M \qquad e \qquad \left|\langle H_{yy}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,. \tag{3.65}$$

Allora esiste una costante

$$0 < \delta = \delta(\gamma, \tau, \lambda, n, M) < 1$$

in modo che valga quanto segue.
Se $u \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $v \in C^l(\mathbb{R}^n, G)$ soddisfano (3.35), le funzioni $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ sono periodiche di periodo 1, $v \circ u^{-1} \in C^l(\mathbb{T}^n, G)$ e valgono le seguenti stime

$$|u_\xi - \mathbb{I}|_{C^0} \leq \delta \qquad e \qquad |v \circ u^{-1}|_{C^l} \leq \delta\,, \tag{3.66}$$

allora

$$u_\xi \equiv \mathbb{I} \qquad e \qquad v \equiv 0\,.$$

Dimostrazione. Siano $V(x)$ e $U(x)$ le funzioni definite da (2.12) in modo tale che (2.15) e (2.16) siano soddisfatte. Quindi le quantità

$$\alpha_\nu = U(x + e_\nu) - U(x) \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

non dipendono dalla x; infatti per la periodicità di U_x abbiamo che:

$$\frac{d}{dx}\left(U(x + e_\nu) - U(x)\right) \quad = \quad U_x(x + e_\nu) - U_x(x) = 0\,.$$

Denotiamo con α il vettore:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,.$$

Introduciamo le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} a(x) &= U(x) - \alpha \cdot x \\ b(x) &= V(x) - x \\ h &= H(x, U_x) - H(x, 0) \end{aligned}$$

e definiamo inoltre

$$\begin{aligned} R_0(x) &= \int_0^1 \int_0^t U_x \cdot [H_{yy}(x, sU_x)U_x] \, ds \, dt \\ R_1(x) &= H_y(x, U_x) - H_y(x, 0) - H_{yy}(x, 0)U_x + b_x \cdot (H_y(x, U_x) - \omega) \ . \end{aligned}$$

Osserviamo che applicando la formula di Taylor, R_1 può anche essere riscritto nella seguente forma:

$$R_1 = \int_0^1 \int_0^t U_x \cdot [H_{yyy}(x, sU_x)U_x] \, ds \, dt - b_x \cdot \left(\int_0^1 H_y(x, sU_x)U_x \, ds \right) . \tag{3.67}$$

Si verifica facilmente, usando (2.15) e (2.16), che

$$\begin{aligned} Da &= h - \alpha \cdot \omega - R_0 \\ Db &= -H_{yy}(x, 0)(\alpha + a_x) - R_1 \ . \end{aligned}$$

Questo implica che $h - \alpha \cdot \omega$ è il valore medio di R_0 ed inoltre

$$\langle H_{yy}(\cdot, 0) \rangle \alpha = - \langle H_{yy}(x, 0)a_x + R_1(x) \rangle \, . \tag{3.68}$$

Utilizzando il corollario 3.2.4, il lemma 3.4.2 e l'espressione di R_0, otteniamo che

$$\begin{aligned} |a_x|_{C^0} &\le |a|_{C^{1+\lambda}} \le \\ &\le \frac{\tilde{d}_1}{2} |h - \alpha \cdot \omega - R_0|_{C^l} \le \\ &\le \frac{\tilde{d}_1}{2} |R_0|_{C^l} \le \\ &\le \frac{\tilde{d}_1 \tilde{d}_2}{2} \left(|U_x|_{C^l} |H_{yy}U_x|_{C^0} + |U_x|_{C^0} |H_{yy}U_x|_{C^l} \right) \le \\ &\le \frac{\tilde{d}_1 \tilde{d}_2}{2} M \left(|U_x|_{C^l} |U_x|_{C^0} + |U_x|_{C^0} |U_x|_{C^l} \right) \le \\ &\le \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 M |U_x|_{C^l} |U_x|_{C^0} = \\ &= \tilde{d}_3 |U_x|_{C^l} |U_x|_{C^0} \end{aligned}$$

dove $\tilde{d}_3 = \tilde{d}_3(\gamma, \tau, n, \lambda, M)$ è un'opportuna costante. Inoltre, da (3.65), (3.68) e (3.67) segue che:

$$\begin{aligned} |\alpha| &\le M^2 |a_x|_{C^0} + M |R_1|_{C^0} \le \\ &\le M^2 \tilde{d}_3 |U_x|_{C^l} |U_x|_{C^0} + M \left(M |U_x|_{C^0} |U_x|_{C^0} + M |b_x|_{C^0} |U_x|_{C^0} \right) \le \\ &= M^2 (1 + \tilde{d}_3) \left(|U_x|_{C^l} + |b_x|_{C^0} \right) |U_x|_{C^0} = \\ &= \tilde{d}_4 \left(|U_x|_{C^l} + |b_x|_{C^0} \right) |U_x|_{C^0} \end{aligned}$$

per una qualche costante $\tilde{d}_4 > \tilde{d}_3$. Infine, otteniamo da (3.66) che

$$|b_x|_{C^0} \le \frac{\delta}{1 - \delta} \, ;$$

infatti:

$$\begin{aligned} |b_x|_{C^0} &= |V_x - \mathbb{I}|_{C^0} = |(u_\xi)^{-1} - \mathbb{I}|_{C^0} \leq \\ &\leq \frac{|u_\xi|}{1-|u_\xi|} \leq \frac{\delta}{1-\delta} \,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} |U_x|_{C^0} &= |\alpha + a_x|_{C^0} \leq |\alpha| + |a_x|_{C^0} \\ &\leq 2\tilde{d}_4 \left(|U_x|_{C^l} + |b_x|_{C^0}\right) |U_x|_{C^0} \leq \\ &\leq \frac{4\delta\tilde{d}_4}{1-\delta} |U_x|_{C^0} \,, \end{aligned}$$

dove abbiamo anche usato che

$$|U_x|_{C^l} = |v \circ u^{-1}|_{C^l} \leq \delta \leq \frac{\delta}{1-\delta} \,.$$

Possiamo quindi concludere che se

$$\frac{4\delta\tilde{d}_4}{1-\delta} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\delta\tilde{d}_4 \leq 1-\delta \,, \tag{3.69}$$

allora $U_x = v \circ u^{-1}$ è identicamente nulla, cioè $U_x \equiv 0$. Questo implica che $Db = 0$ e quindi $b(x) \equiv b$, con b costante, e ricordando che $V \circ u = \mathrm{id}$ otteniamo

$$u(\xi) = \xi - b \,.$$

Da ciò, e dalla definizione di U_x, segue che

$$u_\xi \equiv \mathbb{I} \qquad \text{e} \qquad v \equiv 0 \,.$$

□

Concludiamo ora il seguente risultato relativo alla regolarità delle soluzioni di sistemi hamiltoniani C^∞: useremo il teorema appena dimostrato per migliorare quanto dimostrato nel corollario 3.4.1.

Teorema 3.4.4. *Siano $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, ed $l > 2\tau + 2$, e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ,τ)-diofantino. Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio aperto e sia $H \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times G)$ una funzione hamiltoniana.*
Consideriamo $u \in C^{l+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $v \in C^l(\mathbb{R}^n, G)$, tali che

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

sia una soluzione del sistema hamiltoniano associato, con $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ siano periodiche di periodo 1 ed u diffeomorfismo del toro $\mathbb{T}^n$. Supponiamo infine che

$$\det\left(\langle u_\xi(\xi)^{-1} H_{yy}(u(\xi), v(\xi))\, u_\xi^T(\xi)^{-1}\rangle\right) \neq 0 \,.$$

Allora $u \in C^\infty$ e $v \in C^\infty$.

Dimostrazione. Sia $z = \phi(\zeta)$ la traformazione simplettica della forma

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + \left(u_\xi^T(\xi)\right)^{-1} \eta \end{cases} \tag{3.70}$$

e sia $z = \psi(\zeta)$ una traformazione C^∞, sufficientemente vicina a ϕ nella norma C^l (stiamo usando il fatto che le funzioni C^∞ sono dense nello spazio C^l). Allora, indicando con

$$S^{(0)}(x, \eta) = U^{(0)}(x) + V^{(0)}(x) \cdot \eta$$

la funzione generatrice di $\phi^{-1} \circ \psi$, otteniamo che le funzioni $U_x^{(0)}$ e $V_x^{(0)} - \mathbb{I}$ sono vicine a zero nella norma C^l. Quindi le ipotesi del teorema 3.3.1 sono soddisfatte sostituendo

$$\begin{aligned} H &\to H \circ \psi \\ F &\to H \circ \phi \,. \end{aligned}$$

Questo implica che esiste una trasformazione simplettica $z = \chi(\zeta)$ della forma (3.70) tale che $K = H \circ \psi \circ \chi$ soddisfa (3.40). Sia inoltre

$$S^{(1)}(x, \eta) = U^{(1)}(x) + V^{(1)}(x) \cdot \eta$$

la funzione generatrice di χ; dal teorema 3.3.1 otteniamo che $V_x^{(1)} - \mathbb{I}$ è vicino a zero nella norma C^0 e $U_x^{(1)}$ è vicino a zero nella norma $C^{\tau+1+\lambda}$ per qualche $\lambda > 0$. Definiamo ora

$$U \equiv U^{(0)} + U^{(1)} \circ V^{(0)} \qquad \text{e} \qquad V = V^{(1)} \circ V^{(0)}$$

in modo che $S(x, \eta) = U(x) + V(x) \cdot \eta$ sia la funzione generatrice della trasformazione simplettica $\phi^{-1} \circ \psi \circ \chi$. Allora U_x è vicina a zero nella norma $C^{\tau+\lambda+1}$ e $V_x - \mathbb{I}$ è vicino a zero nella norma C^0. Perciò segue da teorema 3.4.3 (con H sostituita da $H \circ \phi$) che

$$\phi^{-1} \circ \psi \circ \chi = \mathrm{id} \,.$$

Infine, otteniamo dal corollario 3.4.1 che $\chi \in C^\infty$ e perciò $\phi = \psi \circ \chi \in C^\infty$. E questo conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

Capitolo 4

Teorema KAM: caso isoenergetico

Abbiamo discusso nei capitoli precedenti la conservazione dei tori invarianti massimali, corrispondenti a frequenze diofantine, sia nel caso di sistemi hamiltoniani analitici, che di sistemi sufficientemente differenziabili. I risultati che abbiamo fin qui provato (cfr. teorema 2.2.1 e teorema 3.3.1) ci hanno permesso di concludere che, sotto opportune ipotesi di non degenerazione sulla hamiltoniana imperturbata e sulla taglia del fattore perturbativo, i tori invarianti non risonanti, associati ad una frequenza diofantina ω, sopravvivono per il sistema perturbato, i.e. il sistema perturbato continua ad ammettere un toro invariante corrispondente alla stessa frequenza diofantina ω, ma - in generale - su un differente livello energetico. Questo risultato (come ci si convince facilmente ripercorrendo lo schema dimostrativo precedentemente usato), deve la sua validità alle *ipotesi di non degenerazione* (standard) fatte sulla hamiltoniana non perturbata h, cioè sull'aver assunto:[1]

$$\det\left(\frac{\partial \omega}{\partial\, y}(y)\right) \equiv \det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y)\right) \neq 0\,. \tag{4.1}$$

L'essenzialità di tale condizione non è legata alla tecnica dimostrativa utilizzata: se provassimo a considerare hamiltoniane *degeneri* (nel senso che non soddisfano tale condizione), potremmo costruire facili controesempi per confutare la validità dei nostri risultati (vedi esempio 4.1.2).

Il problema che vorremo affrontare ora è il seguente:
E' possibile dimostrare la conservazione dei tori invarianti massimali corrispon-

[1] Nei risultati da noi mostrati questa condizione compare in una forma leggermente diversa, ma sostanzialmente equivalente.

denti a valori di energia fissati? Cosa possiamo dire in tal caso relativamente alle frequenze di tali tori perturbati?

Questo problematica trova le sue motivazioni, oltre che in una *irrefrenabile curiosità matematica*, in molti problemi fisici, dove è essenziale il controllo del valore energetico delle soluzioni di un problema assegnato; inoltre, *promette* risultati potenzialmente più significativi per lo studio della stabilità di tali sistemi: infatti in tal caso, la conservazione di tali tori dovrebbe esser garantita su ciascun livello energetico.
Purtroppo, tale risultato - in generale - non sembra esser soddisfatto: pur imponendo condizioni analoghe a (4.1) si riescono a trovare dei controesempi che ne negano la validità. Dobbiamo trovare quindi una condizione che ci garantisca la *non degenerazione isoenergetica* della nostra hamiltoniana integrabile, cioè una condizione che ci permetta di dimostrare il risultato in questione.
Nel prossimo paragrafo discuteremo in dettaglio la natura di tale condizione ed i suoi legami con la condizione di non degenerazione precedentemente introdotta.

4.1 Condizioni di non degenerazione

Consideriamo una hamiltoniana integrabile

$$h = h(y) \qquad y \in U\,,$$

con U aperto di $\mathbb{R}^n$.
Esistono due diverse condizioni di non degenerazione che si possono imporre su $\omega(y) = \dfrac{\partial h}{\partial y}(y)$:

(i) *non degenerazione standard*: se la mappa delle frequenze ω è tale che

$$\det\left(\frac{\partial \omega}{\partial\, y}(y)\right) = \det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y)\right) \neq 0 \tag{4.2}$$

per ogni $y \in U$. Quindi la mappa ω è un diffeomorfismo locale e di conseguenza ogni toro invariante del sistema imperturbato può essere parametrizzato (localmente) dal suo vettore delle frequenze: cioè possiamo "numerare" i tori con le frequenze, prendendo le variabili ω come coordinate nell'intorno di un punto considerato nello spazio delle variabili d'azione y.

(ii) *Non degenerazione isoenergetica*:[2] se la mappa delle frequenze $\omega(y)$ è tale

[2]Tale condizione sorge in maniera naturale nel voler estendere il metodo utilizzato per la dimostrazione del teorema 2.2.1 al caso in questione (cfr. (4.10)).

che

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \omega}{\partial y}(y) & \omega(y)^T \\ \omega(y) & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y) & \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}(y)\right)^T \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(y) & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.3}$$

per ogni $y \in U$. Osserviamo che una formulazione equivalente è richiedere che $\omega(y)$ non si annulli su U e che

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(y)\, v + \lambda \omega(y) \neq 0$$

per ogni[3] $v \in \langle \omega(y) \rangle^\perp \setminus \{0\}$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $y \in U$. Nello spazio delle azioni tale condizione si può leggere come la *trasversalità*, in ogni punto, tra il livello di energia $M_E = h^{-1}(E)$ e l'ipersuperficie $\omega(y) \cdot v = 0$ (che include i tori risonanti). Nello spazio delle frequenze avremo che l'immagine $\omega(M_E)$ di ogni livello energetico e il sottospazio $\langle \omega(y) \rangle$ sono sempre trasversi.

Le due condizioni sopra enunciate non sono tra loro legate: è facile costruire esempi per mostrarne l'indipendenza. Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 4.1.1.

$$h_1(y_1, y_2) = \ln \frac{y_2}{y_1} \qquad h_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2} y_1^2 + y_2 \; .$$

Si verifica immediatamente che la h_1 è non degenere (nel senso *standard*) in tutto il suo dominio, ma non lo è da un punto di vista isoenergetico; la h_2 invece è *isonergeticamente non degenere*, ma non soddisfa (4.2).

Vediamo come queste due condizioni conducano a risultati differenti nell'ambito della teoria KAM e della conservazione dei tori invarianti non risonanti diofantini. Abbiamo visto nei capitoli precedenti che imponendo una condizione di non degenerazione sulla hamiltoniana imperturbata analoga a (4.2), si può concludere la conservazione - con la stessa frequenza - dei tori invarianti per il sistema imperturbato, corrispondenti a frequenze diofantine (cioè il sistema perturbato ammetterà un toro invariante con frequenza ω); chiaramente il valore di energia corrispondente a tale toro in generale varierà.
Questo risultato non è piú valido, in generale, se sostituiamo la condizione (4.2) con la (4.3).

[3] Indicheremo con

$$\langle \omega(y) \rangle^\perp \equiv \{ v \in \mathbb{R}^n : \quad v \cdot \omega(y) = 0 \}$$

il sottospazio ortogonale al vettore $\omega(y)$.

Esempio 4.1.2. Consideriamo infatti la hamiltoniana h_2 dell'esempio precedente; la mappa delle frequenze è data da

$$\omega(y_1, y_2) = (y_1, 1)$$

che mappa tutto il piano delle azioni in una retta; se consideriamo un fattore perturbativo della forma

$$f(x, y) = \varepsilon h_2(y)$$

abbiamo che nessuna frequenza del sistema imperturbato viene preservata, da cui segue che nessun toro non risonante del sistema imperturbato sopravvive con la stessa frequenza nel sistema perturbato.

Quello che si può dimostrare in questo caso (e che faremo in dettaglio nei prossimi paragrafi) è che in ogni livello energetico M_E, i tori invarianti imperturbati possono essere parametrizzati localmente dal rapporto delle frequenze (*frequency ratios*). Più precisamente, se assumiamo - senza alcuna perdita di generalità - che la componente ω_n non si annulli in U, allora la condizione di non degenerazione isoenergetica è equivalente a richiedere che la mappa

$$\Omega := \left(\frac{\omega_1(y)}{\omega_n(y)}, \ldots, \frac{\omega_{n-1}(y)}{\omega_n(y)}, h(y) \right)$$

sia un diffeomorfismo locale su U. Osserviamo che includere $h(y)$ come ultima componente di Ω ci evita di considerare ciascun livello energetico separatamente. Quello che riusciremo a dimostrare in tal caso è che per ciascun toro invariante del sistema imperturbato, corrispondente a frequenze (γ, τ)-diofantine, esiste un toro invariante per il sistema perturbato avente la stessa energia e lo stesso *frequency ratio*; quindi la frequenza può cambiare, anche se dimostreremo che con condizioni di piccolezza del fattore perturbativo, la nuova frequenza rimarrà *vicino* alla frequenza originaria (i.e. dimostreremo che la nuova frequenza $\tilde{\omega}$ è delle forma $(1+k)\omega$, dove k è un parametro piccolo insieme alla perturbazione).

Notiamo come il teorema KAM isoenergetico sia più significativo dal punto di vista della stabilità, in quanto tale risultato ci assicura l'esistenza di una famiglia di tori invarianti su ciascun livello energetico. Per i sistemi a due gradi di libertà questo implica la stabilità del sistema (nel senso che tutti i moti sono limitati); per sistemi con più gradi di libertà non possiamo dedurre la stabilità (neanche con l'altra condizione), ma la presenza di tali tori è sicuramente un importante fattore da tenere in considerazione (vedi paragrafo 1.5).

4.2 Teorema KAM isoenergetico: caso analitico

Cominciamo col dimostrare una versione *isoenergetica* del teorema KAM, nel caso analitico. Successivamente, utilizzando le stesse tecniche di approssimazione discusse nel capitolo 3, estenderemo tale risultato alla classe delle hamiltoniane differenziabili.

Teorema 4.2.1. (Teorema KAM isoenergetico, caso analitico)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$, $E \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino, tale che $|\omega| \leq M$. Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che $c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$ e che valga quanto segue.
Sia $H(x, y)$ una hamiltoniana reale analitica nella striscia

$$\Sigma_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r, \ |y| \leq r\}$$

con $0 < r \leq 1$, periodica di periodo 1 nelle componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e tale da soddisfare le seguenti condizioni per $(x, y) \in \Sigma_r$ e per qualche $\delta \leq \delta^*$:

$$\begin{aligned} &|H(x,0) - E| \leq \delta r^{2\tau+2} \\ &|H_y(x,0) - \omega| \leq \delta r^{\tau+1} \\ &|H_{yy}(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M} \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove $Q(x, y) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica (non necessariamente analitica) nella striscia Σ_r; definiamo, inoltre

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} Q(x,y) & -\omega^T \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

e supponiamo che in Σ_r si abbia:

$$|Q(z)| \leq M \qquad e \qquad \left|\langle A(\cdot, 0)\rangle^{-1}\right| \leq M\ . \tag{4.5}$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ (dove $z = (x, y)$ e $\zeta = (\xi, \eta)$) della forma

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta \end{cases}$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ entrambe periodiche di periodo 1 e tale che la hamiltoniana trasformata $K = H \circ \phi$ soddisfi:

$$K(\xi, 0) = E\,, \quad K_\xi(\xi, 0) = 0, \quad K_\eta(\xi, 0) = (1+k)\omega \tag{4.6}$$

dove $|k| \leq 2^{2\tau+3} c\delta r^{\tau+1}$.
Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r}$*:*

$$\begin{aligned} &|\phi(\zeta) - \zeta| \leq \frac{c\delta}{34M^3}(1-\theta)r \\ &|\phi_\zeta(\zeta) - \mathbb{I}| \leq \frac{c\delta}{17M^3} \\ &|K_{\eta\eta}(\zeta) - Q(\zeta)| \leq \frac{c\delta}{2M} \\ &|v \circ u^{-1}(x)| \leq \frac{c\delta}{19M^3} r^{\tau+1} \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dimostrazione. L' idea della dimostrazione che seguiremo consiste nel costruire una successione di hamiltoniane reali analitiche $H^{(\nu)}(x,y)$ nella striscia Σ_{r_ν}, dove

$$\begin{cases} r_0 = r \\ r_\nu = \dfrac{1+\theta}{2} r + \dfrac{1-\theta}{2^{\nu+1}} r \end{cases} \tag{4.8}$$

e tali che

$$\begin{cases} H^{(0)} = H \\ H^{(\nu+1)} = H^{(\nu)} \circ \psi^{(\nu)} \ ; \end{cases}$$

la trasformazione simplettica $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ (dove $z = (x,y)$ e $\zeta = (\xi,\eta)$) mapperà la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ nella striscia Σ_{r_ν} e potrà essere rappresentata in termini della sua funzione generatrice

$$S^{(\nu)}(x,\eta) = U^{(\nu)}(x) + V^{(\nu)}(x) \cdot \eta \ .$$

Procedendo analogamente a quanto visto nel teorema 2.2.1, sceglieremo le seguenti funzioni reali analitiche

$$U^{(\nu)}(x) = \alpha^{(\nu)} \cdot x + a^{(\nu)}(x), \qquad V^{(\nu)}(x) = x + b^{(\nu)}(x)$$

nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| < r_\nu$, tali che $a^{(\nu)}(x)$ e $b^{(\nu)}(x)$ siano periodiche di periodo 1, abbiano media nulla e soddisfino le seguenti proprietà all'interno di tale striscia:

$$\begin{aligned} D^{(\nu)}\left(a^{(\nu)}(x)\right) &= \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle - \ H^{(\nu)}(x,0) \\ D^{(\nu)}\left(b^{(\nu)}(x)\right) &= (1+k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)} - H_y^{(\nu)}(x,0) - \\ &\quad - \ H_{yy}^{(\nu)}(x,0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}(x)) \\ \langle H_{yy}^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle\alpha^{(\nu)} &= (1+k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)} - \langle H_y^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle - \\ &\quad - \ \langle H_{yy}^{(\nu)}(\cdot,0) a_x^{(\nu)}(x)\rangle \\ E &= \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle + \omega^{(\nu)} \cdot \alpha^{(\nu)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

dove, detto $\omega^{(0)} = \omega$, abbiamo denotato con:

$$\omega^{(\nu)} \equiv (1 + k^{(\nu)})\omega^{(\nu-1)} = \left(\prod_{j=1}^{\nu} (1 + k^{(j)}) \right) \omega$$

la frequenza associata al passo ν-simo e con

$$D^{(\nu)} = D_{\omega^{(\nu)}} \equiv \nabla \cdot \omega^{(\nu)}$$

il relativo operatore differenziale lineare associato a tale frequenza.

Con tale trasformazione faremo in modo che l'errore diventi quadraticamente piccolo; il fatto di voler lasciare invariata l'energia del toro $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ comporterà una variazione della frequenza rispetto al passo precedente (notare la differenza con il teorema KAM standard (teorema 2.2.1) in cui lasciavamo fissa la frequenza, ottenendo una variazione dell'energia). Infatti, indicando con $\mathcal{R}$ dei generici *termini di resto* (che dimostreremo andare a zero in maniera quadratica) avremo:

$$\begin{aligned}
&H^{(\nu+1)}(\xi, \eta) = \\
&= H^{(\nu)} \left(\xi, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)} + (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta \right) + \mathcal{R} = \\
&= H^{(\nu)}(\xi, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + H_y^{(\nu)}(\xi, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \cdot (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \mathcal{R} = \\
&= H^{(\nu)}(\xi, 0) + H_y^{(\nu)}(\xi, 0) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + H_y^{(\nu)}(\xi, 0) \cdot (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \\
&\quad + H_{yy}^{(\nu)}(\xi, 0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \cdot (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \mathcal{R} = \\
&= H^{(\nu)}(\xi, 0) + H_y^{(\nu)}(\xi, 0) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + H_y^{(\nu)}(\xi, 0) \cdot (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)})\eta + \\
&\quad + H_{yy}^{(\nu)}(\xi, 0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \cdot \eta + \mathcal{R} = \\
&= \langle H^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle + [H^{(\nu)}(\xi, 0) - \langle H^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle] + D^{(\nu)} a^{(\nu)} + \omega^{(\nu)} \cdot \alpha^{(\nu)} + \\
&\quad + [H_y^{(\nu)}(\xi, 0) - \omega^{(\nu)} + \omega^{(\nu)}] \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)} + b_x^{(\nu)}\eta) + D^{(\nu)} b^{(\nu)} + \\
&\quad + [H_y^{(\nu)}(\xi, 0) - (1 + k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)} + (1 + k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)}] \cdot \eta + \\
&\quad + H_{yy}^{(\nu)}(\xi, 0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \cdot \eta + \mathcal{R} = \\
&= \langle H^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle + \omega^{(\nu)} \cdot \alpha^{(\nu)} + (1 + k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)} \cdot \eta + D^{(\nu)} b^{(\nu)} + \\
&\quad + \left[H_y^{(\nu)}(\xi, 0) - (1 + k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)} + H_{yy}^{(\nu)}(\xi, 0)(\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \right] \cdot \eta + \mathcal{R} = \\
&= \langle H^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle + \omega^{(\nu)} \cdot \alpha^{(\nu)} + (1 + k^{(\nu+1)})\, \omega^{(\nu)} \cdot \eta + \mathcal{R}\,.
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'esistenza di funzioni siffatte è garantita dal lemma di Moser e Rüssmann (lemma 2.1.2): infatti i membri di destra della prima e seconda equazione in (4.9) hanno entrambi media nulla (il membro della seconda ha media nulla proprio grazie alla terza equazione). Osserviamo inoltre che le ultime due uguaglianze in (4.9) possono scriversi in forma più compatta:

$$\begin{pmatrix} \langle H_{yy}^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle & -\omega^{(\nu)^T} \\ \omega^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)} \\ k^{(\nu+1)} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \omega^{(\nu)} - \langle H_y^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle - \langle H_{yy}^{(\nu)}(\cdot,0)a_x^{(\nu)}(x)\rangle \\ E - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

da cui (utilizzando la (4.5) e la sua generalizzazione ai successivi passi dell'induzione) si evince l'esistenza di un'unica soluzione

$$(\alpha^{(\nu)},\, k^{(\nu+1)})$$

di tale sistema. Osserviamo che è proprio qui che entra in gioco la condizione di non degenerazione isoenergetica per la hamiltoniana imperturbata (vedi paragrafo 4.1).[4]

Definiamo ora l'errore al passo ν-simo dell'iterazione come il più piccolo $\varepsilon_\nu > 0$ che soddisfi:

$$\begin{cases} \left|H^{(\nu)}(x,0) - E\right| \le \varepsilon_\nu \\ |H_y^{(\nu)}(x,0) - \omega^{(\nu)}|(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1} \le \varepsilon_\nu \end{cases} \tag{4.11}$$

nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \le r_\nu$.

Indicheremo con $c_1 = c_1(\tau, n) > 0$ una costante opportuna, in modo che $\dfrac{c_1}{\gamma}$ sia proprio la costante del del lemma di Moser e Rüssmann (vedi osservazione alla fine del lemma 2.1.2) e definiremo:

$$\begin{cases} c_2 = 19M^3\left(1 + \dfrac{4\,c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)^2 \\ c_3 = 4Mc_2^2 + c_2 \\ c = \left(\dfrac{4}{1-\theta}\right)^{2\tau+3} c_3\ . \end{cases} \tag{4.12}$$

Mostreremo inoltre che ε_ν decresce a zero in maniera quadratica, secondo la stima

$$\varepsilon_{\nu+1} \le \frac{c_3}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2 \tag{4.13}$$

dove $c_3 > 0$ è la costante sopra definita ed è indipendente da r. E' interessante notare come la crescita geometrica del fattore di fronte a ε_ν^2 sia dominata dalla convergenza quadratica di ε_ν. Infatti, definendo

$$\begin{cases} \delta_{\nu+1} = c2^{\nu(2\tau+3)}\delta_\nu^2 & \delta_0 = \delta \le \delta^* \\ \lambda_\nu = c2^{(\nu+1)(2\tau+3)}\delta_\nu & \lambda_0 = 2^{2\tau+3}c\delta\ . \end{cases} \tag{4.14}$$

[4] A differenza della condizione che abbiamo discusso nel paragrafo 4.1, la nostra presenta un $-\omega^{(\nu)^T}$; tale discrepanza è dovuta essenzialmente alla nostra impostazione del problema ed è facilmente eliminabile sostituendo $k^{(\nu+1)}$ con $-k^{(\nu+1)}$.

e ricordando che

$$r_\nu - r_{\nu+1} = \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} r\,,$$

segue facilmente da (4.13) e (4.8) che

$$\varepsilon_\nu \le \delta_\nu r^{2\tau+2}\,. \tag{4.15}$$

Inoltre la successione λ_ν soddisferà la relazione

$$\lambda_{\nu+1} \le \lambda_\nu^2 \tag{4.16}$$

e quindi λ_ν convergerà a zero se e soltanto se λ_0 è minore di 1.

Per la successione di hamiltoniane $H^{(\nu)}(x,y)$ otterremo le seguenti stime in Σ_{r_ν}:

$$\begin{aligned} &\left|H^{(\nu)}(x,0) - E\right| \le \delta_\nu r^{2\tau+2} \\ &|H^{(\nu)}_y(x,0) - \omega^{(\nu)}|(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1} \le \delta_\nu r^{2\tau+2} \\ &|H^{(\nu)}_{yy}(x,y) - Q^{(\nu)}(x,y)| \le 2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M} \end{aligned} \tag{4.17}$$

dove

$$\begin{cases} Q^{(\nu)} = H^{(\nu-1)}_{yy} & \text{per } \nu \ge 1 \\ Q^{(0)} = Q\,. \end{cases}$$

Inoltre, prenderemo $\delta^* > 0$ in modo da soddisfare

$$c\delta^* \le 2^{-(2\tau+4)}\,. \tag{4.18}$$

Osserviamo che questa condizione implica che $\lambda_0 \le \frac{1}{2}$; infatti:

$$\lambda_0 = 2^{2\tau+3}c\delta \le 2^{2\tau+3}c\delta^* \le 2^{2\tau+3}2^{-(2\tau+4)} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui:

$$\lambda_{\nu+1} \le \lambda_\nu^2 = \lambda_\nu\lambda_\nu \le \lambda_\nu\lambda_0 \le \frac{\lambda_\nu}{2}\,, \tag{4.19}$$

cioè

$$\lambda_{\nu+1} \le \frac{\lambda_n}{2} \qquad \text{per ogni} \quad \nu \ge 1\,.$$

Infine, definiamo

$$\begin{cases} M_\nu = \dfrac{M_{\nu-1}}{1-2^{-\nu}c\delta^*} \\ M_{-1} = M \end{cases} \tag{4.20}$$

ed osserviamo come la (4.18) implichi[5]

$$\begin{aligned} M_\nu &\leq M_{\nu-1} e^{2^{1-\nu} c\delta^*} \leq M e^{c\delta^* \sum_{k=-1}^{\nu-1} 2^{-k}} \leq \\ &\leq M e^{4c\delta^*} \leq 2M \ . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Schema induttivo

Abbiamo sviluppato ora tutte le premesse per avviare lo schema induttivo. Osserviamo innanzitutto che la base induttiva è facilmente verificabile, in quanto le disuguaglianze (4.17) sono soddisfatte per ipotesi quando $\nu = 0$ e $\delta \leq \delta^*$. Per il passo induttivo assumeremo di aver costruito delle funzioni hamiltoniane reali analitiche $H^{(\mu)}(x, y)$ nella striscia Σ_{r_μ}, per $\mu = 0, \ldots, \nu$, in modo da soddisfare le condizioni (4.17) (con μ al posto di ν).

Usando (4.5), (4.17), (4.20) e (4.21) otteniamo le seguenti stime in Σ_{r_ν}:

- $|H^{(\nu)}_{yy}(z)| \leq M_\nu$:

$$\begin{aligned} |H^{(\nu)}_{yy}(z)| &\leq |H^{(\nu)}_{yy}(z) - H^{(\nu-1)}_{yy}(z)| + |H^{(\nu-1)}_{yy}(z)| \leq \\ &\leq M_{\nu-1} + 2^{-\nu} \frac{c\delta}{4M} \leq M_\nu (1 - 2^{-\nu} c\delta^*) + 2^{-\nu} \frac{c\delta}{4M} \leq \\ &\leq M_\nu + 2^{-\nu} c\delta^* \left(-M_\nu + \frac{1}{4M} \right) \leq M_\nu \ , \end{aligned}$$

  dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'ultimo addendo è negativo, in quanto M e M_ν sono maggiori di 1.

- Vogliamo ora mostrare che:

$$\left| \begin{pmatrix} \langle H^{(\nu)}_{yy}(\cdot, 0) \rangle & -\omega^{(\nu)^T} \\ \omega^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right| \leq M_\nu \ .$$

  Infatti, denotando con

$$B \equiv \begin{pmatrix} \langle H^{(\nu)}_{yy}(\cdot, 0) \rangle & -\omega^{(\nu)^T} \\ \omega^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix} - \langle A^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle$$

[5] Per la prima disuguaglianza useremo:

$$\frac{1}{1-x} \leq e^{2x} \qquad \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \ .$$

ed usando (4.18) otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{pmatrix} \langle H^{(\nu)}_{yy}(\cdot,0)\rangle & -\omega^{(\nu)^T} \\ \omega^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right| \leq \\
&\leq \left|\Big(B + \langle A^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle\Big)^{-1}\right| \leq \\
&\leq \left|\langle A^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \left|\Big(\mathbb{I} + \langle A^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle^{-1} B\Big)^{-1}\right| \leq \\
&\leq M_{\nu-1}\left(1 + 2M_{\nu-1}\, 2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M}\right) \leq \\
&\leq M_{\nu-1}\left(1 + 4M\, 2^{-\nu}\frac{c\delta}{4M}\right) \leq \\
&\leq M_{\nu}(1 - 2^{-\nu}c\delta^*)(1 + 2^{-\nu}c\delta^*) \leq \\
&\leq M_\nu \; .
\end{aligned}$$

Nella stima precedente abbiamo usato il fatto che la matrice

$$C \equiv \langle A^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle^{-1} B$$

è tale che $|C| \leq \dfrac{1}{2}$ (come segue facilmente da (4.18)) e di conseguenza

$$\begin{aligned}
|(\mathbb{I} + C)^{-1}| \;&\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} |C|^k \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |C^k| \leq \\
&\leq\; 1 + |C| \sum_{k=0}^{\infty} |C^k| \leq 1 + 2|C| \, .
\end{aligned}$$

Passo 1

Dimostriamo ora che se $H^{(\nu)}(x,y)$ soddisfa le due disuguaglianze appena dimostrate, allora valgono le seguenti stime nella striscia Σ_{r_ν}:

1. $|H^{(\nu)}(x,y) - H^{(\nu)}(x,0) - (H^{(\nu)}_y(x,0)\,\cdot\, y)| \leq M|y|^2$
2. $|H^{(\nu)}_y(x,y) - H^{(\nu)}_y(x,0)| \leq 2M|y|$
3. $|H^{(\nu)}_y(x,y) - H^{(\nu)}_y(x,0) - H^{(\nu)}_{yy}(x,0)y| \leq 2M\dfrac{|y|^2}{r_\nu - |y|}$.

<u>Dimostrazione</u>:

- Dalla formula di Taylor abbiamo:

$$H^{(\nu)}(x,y) - H^{(\nu)}(x,0) - (H^{(\nu)}_y(x,0)\,\cdot\, y) = \int_0^1 \int_0^t (y \cdot H^{(\nu)}_{yy}(x,st)y)\, ds\, dt \; .$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
&|H^{(\nu)}(x,y) - H^{(\nu)}(x,0) - (H_y^{(\nu)}(x,0)\,\cdot\,y)| \le \\
&\le \int_0^1 \int_0^t |y|^2 |H_{yy}^{(\nu)}(x,st)|\,ds\,dt \le \\
&\le \frac{M_\nu}{2}|y|^2 \le M|y|^2\,,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (4.21).

- Sempre dalla formula di Taylor ricaviamo:

$$
H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0) = \int_0^1 H_{yy}^{(\nu)}(x,ty)y\,dt\,.
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
|H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0)| &\le \int_0^1 |y||H_{yy}^{(\nu)}(x,ty)|\,dt \le \\
&\le M_\nu|y| \le 2M|y|\,.
\end{aligned}
$$

- Infine, applicando la formula di Taylor e il teorema dei residui si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)y = \\
&= \int_0^1 [H_{yy}^{(\nu)}(x,ty) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)]\,y\,dt = \\
&\le \int_0^1 \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} H_{yy}^{(\nu)}(x,\lambda t y)\,y\,d\lambda\,dt
\end{aligned}
$$

dove

$$
\Gamma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \quad |\lambda| = \frac{r_\nu}{|y|} > 1\right\}.
$$

Osserviamo che la funzione nel secondo integrale ha due poli in $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ interni alla curva Γ ed i relativi residui sono, rispettivamente, $H_{yy}^{(\nu)}(x,ty)$ e $-H_{yy}^{(\nu)}(x,0)$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
&|H_y^{(\nu)}(x,y) - H_y^{(\nu)}(x,0) - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)y| \le \\
&\le \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{1}{|\lambda(\lambda-1)|}|H_{yy}^{(\nu)}(x,\lambda t y)|\,|y|\,|d\lambda|\,dt \le \\
&\le \frac{|y|M_\nu}{2\pi}\frac{1}{\frac{r_\nu}{|y|}\left(\frac{r_\nu}{|y|}-1\right)}|\Gamma| = M_\nu\frac{|y|^2}{r_\nu - |y|} \le \\
&\le 2M\frac{|y|^2}{r_\nu - |y|}\,.
\end{aligned}
$$

Passo 2

Dal lemma 2.1.2 sappiamo che esistono e sono uniche le soluzioni $a^{(\nu)}(x)$, $\alpha^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}(x)$ e $k^{(\nu+1)}$ delle equazioni (4.9) nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \leq r_\nu$, in modo che $a^{(\nu)}(x)$ e $b^{(\nu)}(x)$ siano periodiche di periodo 1 ed abbiano media nulla. Dimostriamo ora che tali soluzioni soddisfano le seguenti stime:

1.
$$\begin{cases} |a^{(\nu)}(x)| \leq \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^\tau} \\ \\ |\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| \leq \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \end{cases} \qquad |\mathrm{Im}\, x| \leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \tag{4.22}$$

2.
$$\begin{cases} |b^{(\nu)}(x)| \leq \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \\ \\ |b_x^{(\nu)}| \leq \dfrac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \end{cases} \qquad |\mathrm{Im}\, x| \leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\,. \tag{4.23}$$

Dimostrazione: Cominciamo col definire

$$\rho_j = \frac{(8-j) r_\nu + j r_{\nu+1}}{8} \qquad \text{per} \quad 0 \leq j \leq 4$$

in modo che $\rho_0 = r_\nu$, $\rho_4 = \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}$ e

$$\rho_j - \rho_{j+1} = \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{8} \qquad \text{per } j = 0,\, 1,\, 2,\, 3\,.$$

1. Dal lemma 2.1.2 e da (4.11) segue che:

$$\begin{aligned} |a^{(\nu)}|_{\rho_1} &\leq \frac{c_1}{\gamma^{(\nu)}} \left(\frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} \right)^\tau \left| H^{(\nu)}(\cdot, 0) - \langle H^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle \right|_{\rho_0} \leq \\ &\leq \frac{c_1}{\gamma^{(\nu)}} \left(\frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} \right)^\tau \left(\left| H^{(\nu)}(\cdot, 0) - E \right|_{\rho_0} + \right. \\ &\qquad \left. + \left| E - \langle H^{(\nu)}(\cdot, 0) \rangle \right|_{\rho_0} \right) \leq \\ &\leq \frac{2 c_1 8^\tau \varepsilon_\nu}{\gamma^{(\nu)} (r_\nu - r_{\nu+1})^\tau} \end{aligned}$$

ed utilizzando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1) abbiamo anche:

$$|a_x^{(\nu)}|_{\rho_2} \leq \frac{8}{r_\nu - r_{\nu+1}} |a^{(\nu)}|_{\rho_1} \leq \frac{2 c_1 8^{\tau+1} \varepsilon_\nu}{\gamma^{(\nu)} (r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\,.$$

Utilizzando (4.10), (4.11), (4.20) e le stime precedenti otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&\left|\begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)} \\ k^{(\nu+1)} \end{pmatrix}\right| \leq \left|\begin{pmatrix} \langle H^{(\nu)}_{yy}(\cdot,0)\rangle & -\omega^{(\nu)^t} \\ \omega^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right| \cdot \\
&\quad\cdot \left|\begin{pmatrix} \omega^{(\nu)} - \langle H^{(\nu)}_{y}(\cdot,0)\rangle - \langle H^{(\nu)}_{yy}(\cdot,0) a^{(\nu)}_x(x)\rangle \\ E - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle \end{pmatrix}\right| \leq \\
&\leq M_\nu \left(\max\left\{|\omega^{(\nu)} - \langle H^{(\nu)}_{y}(\cdot,0)\rangle| + |H^{(\nu)}_{yy}||a^{(\nu)}_x|,\ |E - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle|\right\}\right) \leq \\
&\leq M_\nu \left(\max\left\{\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} + M_\nu \frac{2c_1 8^{\tau+1}\varepsilon_\nu}{\gamma^{(\nu)}(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}},\ \varepsilon_\nu\right\}\right) \leq \\
&\leq M_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1 + M_\nu \frac{2c_1 8^{\tau+1}}{\gamma^{(\nu)}}\right) \leq \qquad (4.24)\\
&\leq M_\nu^2 \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1 + \frac{2c_1 8^{\tau+1}}{\gamma^{(\nu)}}\right) \leq \\
&\leq 4M^2 \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1 + \frac{2c_1 8^{\tau+1}}{\gamma^{(\nu)}}\right).
\end{aligned}
$$

Noi vorremmo che

$$|\gamma^{(\nu)}| \geq \frac{\gamma}{2}\left(1 + \frac{1}{2^\nu}\right) > \frac{\gamma}{2}$$

per ogni $\nu \geq 0$. Ovviamente questo è vero per $\nu = 0$; supponendo che sia vero per $\mu = 0, \dots, \nu$ segue per induzione:

$$
\begin{aligned}
\gamma^{(\nu+1)} &= (1 + k^{(\nu+1)})\gamma^{(\nu)} \geq \\
&\geq (1 - |k^{(\nu+1)}|)(1 + \frac{1}{2^\nu})\frac{\gamma}{2} = \\
&= \left(1 + \frac{1 - (2^\nu + 1)|k^{(\nu+1)}|}{2^\nu}\right)\frac{\gamma}{2} \geq \\
&\geq \left(1 + \frac{1 - 2^{\nu+1}|k^{(\nu+1)}|}{2^\nu}\right)\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}
$$

Quindi ci basta richiedere che

$$1 - 2^{\nu+1}|k^{(\nu+1)}| \geq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |k^{(\nu+1)}| \leq \frac{1}{2^{\nu+2}}$$

e ciò si traduce nella condizione:

$$4M^2 \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1 + \frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right) \leq \frac{1}{2^{\nu+2}}.$$

Mostriamo che tale condizione è soddisfatta grazie alle ipotesi assunte su ε_ν e alla scelta delle costanti.

Vogliamo mostrare che:

$$4M^2 \frac{2^{\nu+2}\,\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1 + \frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right) \leq 1;$$

ricordando (4.8), (4.14), (4.15), (4.12) e (4.19) otteniamo:

$$\begin{aligned}
&4M^2 \frac{2^{\nu+2}\,\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right) \leq \\
&\leq\ 2^{\nu+2}\frac{c_3\,\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \leq \\
&\leq\ \frac{c_3\delta_\nu r^{2\tau+2}}{r^{\tau+1}(1-\theta)^{\tau+1}}2^{(\nu+2)(\tau+2)} \leq \\
&\leq\ c_3\left(\frac{4}{1-\theta}\right)^{2\tau+3} r^{\tau+1}\delta_\nu 2^{(\nu+2)\tau} = \\
&=\ c r^{\tau+1}\delta_\nu 2^{(\nu+2)\tau} \leq \\
&\leq\ \lambda_\nu < 1\,.
\end{aligned}$$

Quindi, riassumendo, abbiamo trovato:

$$|a^{(\nu)}|_{\rho_1} \ \leq\ \frac{4c_1 8^\tau \varepsilon_\nu}{\gamma(r_\nu - r_{\nu+1})^\tau} \tag{4.25}$$

$$|a_x^{(\nu)}|_{\rho_2} \ \leq\ \frac{4c_1 8^{\tau+1}\varepsilon_\nu}{\gamma(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \tag{4.26}$$

$$|k^{(\nu+1)}| \ \leq\ \frac{1}{2^{\nu+2}} \tag{4.27}$$

$$|\gamma^{(\nu)}| \ \geq\ \frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{1}{2^\nu}\right) > \frac{\gamma}{2}\,. \tag{4.28}$$

Osserviamo inoltre che, sempre dalla (4.24), si ha

$$|\alpha^{(\nu)}| \ \leq\ 4M^2\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
|\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}|_{\rho_2} \ &\leq\ \frac{4c_1 8^{\tau+1}}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}\gamma}\varepsilon_\nu + \\
&+\ 4M^2\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right) \leq \\
&\leq\ 5M^2\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}}\,.
\end{aligned}$$

Tenendo conto della (4.12) possiamo concludere la tesi.

2. Cominciamo col dimostrare la seguente proprietà:

$$|\omega^{(\nu)}| \leq M_\nu \qquad \text{per ogni } \nu \geq 0\,.$$

Questo è vero, per ipotesi, per $\nu = 0$ (base induttiva); supponendo che sia vero per $\mu = 0, \ldots, \nu-1$, dimostriamola per $\mu = \nu$. Otterremo:

$$\begin{aligned}
|\omega^{(\nu)}| \ &\leq\ (1+|k^{(\nu)}|)|\omega^{(\nu-1)}| \leq (1+|k^{(\nu)}|)M_{\nu-1} \leq \\
&\leq\ (1+|k^{(\nu)}|)(1-2^{-\nu}c\delta)M_\nu = \\
&\leq\ (1-2^{-\nu}c\delta + |k^{(\nu)}|(1-2^{-\nu}c\delta))M_\nu
\end{aligned}$$

quindi sarà sufficiente far vedere che

$$1-2^{-\nu}c\delta+|k^{(\nu)}|(1-2^{-\nu}c\delta)\leq 1\,,$$

cioè:

$$|k^{(\nu)}|\leq\frac{2^{-\nu}c\delta}{1-2^{-\nu}c\delta}\,. \tag{4.29}$$

Infatti, utilizzando (4.24) e (4.12) segue che:

$$\begin{aligned}
|k^{(\nu)}| &\leq \frac{c_2\,\varepsilon_{\nu-1}}{(r_{\nu-1}-r_\nu)^{\tau+1}}= \\
&= \frac{c_2\,\varepsilon_{\nu-1}}{r^{\tau+1}(1-\theta)^{\tau+1}}2^{(\nu+1)(\tau+1)}\leq \\
&\leq \frac{1}{4}\frac{c\,\varepsilon_{\nu-1}}{r^{\tau+1}}2^{(\nu-1)(\tau+1)}\leq \\
&\leq \frac{c}{4\,r^{\tau+1}}\delta_{\nu-1}r^{2\tau+2}2^{(\nu-1)(\tau+1)}= \\
&= \frac{1}{4}c\,\delta_{\nu-1}r^{\tau+1}2^{(\nu-1)(\tau+1)}= \\
&= \lambda_{\nu-1}r^{\tau+1}2^{-(2\tau+3)}2^{-(\nu-1)(\tau+2)}\leq \\
&\leq \frac{1}{4}\lambda_{\nu-1}r^{\tau+1}2^{-(2\tau+3)}\leq \\
&\leq \frac{1}{4}2^{-(\nu-1)}\lambda_0 2^{-(2\tau+3)}\leq \\
&\leq 2^{-\nu}c\delta\leq\frac{2^{-\nu}c\delta}{1-2^{-\nu}c\delta}\,.
\end{aligned}$$

Usando quanto appena dimostrato, (4.9), (4.24) ed il lemma 2.1.2 otteniamo:

$$\begin{aligned}
|b^{(\nu)}|_{\rho_3} &\leq \frac{c_1}{\gamma^{(\nu)}}\left(\frac{8}{r_\nu-r_{\nu+1}}\right)^\tau|(1+k^{(\nu+1)})\omega^{(\nu)}-H_y^{(\nu)}(\cdot,0)- \\
&\quad - H_{yy}^{(\nu)}(\cdot,0)(\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})|_{\rho_2}\leq \\
&\leq \frac{c_1}{\gamma^{(\nu)}}\left(\frac{8}{r_\nu-r_{\nu+1}}\right)^\tau\Big[|k^{(\nu+1)}||\omega^{(\nu)}|+|\omega^{(\nu)}-H_y^{(\nu)}(\cdot,0)|_{\rho_2}+ \\
&\quad + |H_{yy}^{(\nu)}(\cdot,0)(\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})|_{\rho_2}\Big]\leq \\
&\leq \frac{c_1}{\gamma^{(\nu)}}\left(\frac{8}{r_\nu-r_{\nu+1}}\right)^\tau\Big[|k^{(\nu+1)}||\omega^{(\nu)}|+\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{\tau+1}}+ \\
&\quad + 10M^2\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{\tau+1}}\Big]\leq \\
&\leq \frac{1}{8}\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)^2\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+1}}[8M^3+1+10M^2]\leq \\
&\leq \frac{19}{8}M^3\left(1+\frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)^2\frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+1}}\,.
\end{aligned}$$

Usando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1) otteniamo anche:

$$
\begin{aligned}
|b_x^{(\nu)}|_{\rho_4} &\le \frac{8}{(r_\nu - r_{\nu+1})} |b^{(\nu)}|_{\rho_3} \le \\
&\le 19M^3 \left(1 + \frac{4c_1 8^{\tau+1}}{\gamma}\right)^2 \frac{\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \,.
\end{aligned}
$$

Tenendo conto della (4.12) possiamo concludere la tesi.

Passo 3

Abbiamo costruito in tal modo le funzioni

$$
U(x) = U^{(\nu)}(x) = \alpha^{(\nu)} \cdot x + a^{(\nu)}(x) \qquad \text{e} \qquad V(x) = V^{(\nu)}(x) = x + b^{(\nu)}(x)
$$

e possiamo quindi definire la trasformazione simplettica $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ nel seguente modo:

$$
\begin{cases}
x = u(\xi) \\
y = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta
\end{cases}
$$

dove le funzioni u e v sono scelte in modo da soddisfare:

$$
V \circ u = \mathrm{id} \qquad U_x \circ u = v \,.
$$

La trasformazione $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ mapperà la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ nella striscia $\Sigma_{\frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}}$ e soddisferà le seguenti stime in $\Sigma_{r_{\nu+1}}$:

$$
|\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta| \le \frac{2^{-\nu} c\delta}{35M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) \tag{4.30}
$$

$$
|\psi_\zeta^{(\nu)}(\zeta) - \mathbb{I}| \le \frac{2^{-\nu} c\delta}{8M^3} \,. \tag{4.31}
$$

<u>Dimostrazione</u>: Come prima cosa notiamo che, usando (4.8), (4.12), (4.14) ed il fatto che $\lambda_\nu \le \frac{\lambda_0}{2^\nu}$ per ogni ν, possiamo concludere dall'ipotesi induttiva $\varepsilon_\nu \le \delta_\nu r^{2\tau+2}$, che

$$
\begin{aligned}
\frac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} &\le c_2 \delta_\nu \left(\frac{2^{\nu+2}}{1-\theta}\right)^{2\tau+2} = \\
&= \frac{\lambda_\nu}{2^{2\tau+3}(4Mc_2 + 1)} \cdot \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} \le \\
&\le \frac{2^{-\nu} c\delta}{76M^3} \cdot \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} \,,
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

avendo usato nell'ultimo passaggio che $4Mc_2 + 1 \ge 4Mc_2 \ge 76M^3$.

Perciò otteniamo dal Passo 2 che per

$$
|\mathrm{Im}\, x| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \qquad \text{e} \qquad \xi = V^{(\nu)}(x)
$$

valgono le seguenti stime:

$$\begin{aligned}|x-\xi| &= |b^{(\nu)}(x)| \le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \le \\ &\le \frac{2^{-\nu}c\delta}{76M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) \\ |b_x^{(\nu)}| &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \le \frac{2^{-\nu}c\delta}{76M^3}\,.\end{aligned}$$

Questo dimostra che $u = \left(V^{(\nu)}\right)^{-1}$ mappa la striscia $|\mathrm{Im}\,\xi| \le \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4}$ nella striscia $|\mathrm{Im}\,x| \le \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}$. Infatti:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}\,x| &= |\mathrm{Im}\,x - \mathrm{Im}\,\xi| + |\mathrm{Im}\,\xi| \le |x-\xi| + |\mathrm{Im}\,\xi| \le \\ &\le \frac{2^{-\nu}c\delta}{76M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} \le \\ &\le \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{4} + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} = \\ &= \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\,.\end{aligned}$$

Se inoltre $|\eta| \le \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4}$ e $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ allora

$$y = \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)} + \eta + b_x^{(\nu)}\eta$$

e quindi, usando il Passo 2 e (4.8), si ottiene che

$$\begin{aligned}|y-\eta| &\le |\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| + |b_x^{(\nu)}\eta| \le \\ &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} + \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} \le \\ &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\left(r_\nu - r_{\nu+1} + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4}\right) = \\ &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\left(\frac{5r_\nu - r_{\nu+1}}{4}\right) \le \\ &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{r}{4}\left(5\frac{1+\theta}{2} + 5\frac{1-\theta}{2^{\nu+1}} - \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}}\right) \le \\ &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{r}{4}\left(2(1+\theta) + \frac{9}{2}(1-\theta)\right) \le \\ &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\frac{17}{8}r \le \\ &\le \frac{2^{-\nu}c\delta}{76M^3}\frac{17}{8}(r_\nu - r_{\nu+1}) \\ &\le \frac{2^{-\nu}c\delta}{35M^3}(r_\nu - r_{\nu+1})\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |y| &\leq |y-\eta| + |\eta| \leq \\ &\leq \frac{2^{-\nu}c\delta}{35M^3}(r_\nu - r_{\nu+1}) + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} \leq \\ &\leq \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{4} + \frac{r_\nu + 3r_{\nu+1}}{4} = \\ &= \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \end{aligned}$$

e quindi (4.30) è soddisfatta per $\Sigma_{\frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4}}$. Infine la (4.31) segue come immediata applicazione delle stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1 con $r = \frac{r_\nu+3r_{\nu+1}}{4}$ e $\rho = r_{\nu+1}$).

Passo 4

Entriamo ora nel cuore del passo induttivo. Definiamo

$$H^{(\nu+1)} = H^{(\nu)} \circ \psi^{(\nu)}$$

e facciamo vedere che valgono (4.13) e (4.17).

Dimostrazione: Come prima cosa mostriamo che (4.17) continua a valere se sostituiamo ν con $\nu+1$. A tale scopo ricordiamo che per come abbiamo scelto la nostra trasformazione simplettica (vedi (4.9)) abbiamo

$$E = \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle \, + \, \alpha^{(\nu)} \cdot \omega^{(\nu)}$$

e

$$z = (x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) = \psi^{(\nu)}(\xi, 0)\,,$$

con $|\mathrm{Im}\,\xi| \leq r_{\nu+1}$.
Dal Passo 3 segue che

$$|\mathrm{Im}\,x| \leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} \qquad \text{e} \qquad |y| = |\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}| \leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\,.$$

Inoltre, segue da (4.9) che

$$\langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle = D^{(\nu)}\left(a^{(\nu)}(x)\right) + H^{(\nu)}(x,0)$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} H^{(\nu+1)}(\xi,0) - E &= H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - E = \\ &= H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - \langle H^{(\nu)}(\cdot,0)\rangle \, - \, \alpha^{(\nu)} \cdot \omega^{(\nu)} = \\ &= H^{(\nu)}(x, \alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) - H^{(\nu)}(x,0) - \\ &\quad - H_y^{(\nu)}(x,0) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) + \\ &\quad + H_y^{(\nu)}(x,0) - \omega^{(\nu)}) \cdot (\alpha^{(\nu)} + a_x^{(\nu)}) \end{aligned}$$

e quindi usando il Passo 1, il Passo 2, (4.11) e (4.12):

$$
\begin{aligned}
&|H^{(\nu+1)}(\xi,0)-E| \leq \\
&\quad \leq |H^{(\nu)}(x,\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})-H^{(\nu)}(x,0)-H_y^{(\nu)}(x,0)\cdot(\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})| + \\
&\quad\quad + |(H_y^{(\nu)}(x,0)-\omega^{(\nu)})\cdot(\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})| \leq \\
&\quad \leq M|\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}|^2 + |H_y^{(\nu)}(x,0)-\omega^{(\nu)}||\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}| \leq \\
&\quad \leq \frac{Mc_2^2+c_2}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2 \leq \\
&\quad \leq \frac{c_3}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2 \,.
\end{aligned}
$$

Inoltre, sempre dalla (4.9) segue che

$$
\omega^{(\nu+1)} = D^{(\nu)}(b^{(\nu)})(x) + H_y^{(\nu)}(x,0) + H_{yy}^{(\nu)}(x,0)(\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}(x)) \;;
$$

quindi, ricordando la definizione di $H^{(\nu+1)}$ ed applicando la *chain rule*, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
H_y^{(\nu+1)}(\xi,0)-\omega^{(\nu+1)} &= (\mathbb{I}+b_x^{(\nu)})H_y^{(\nu)}(x,\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})-\omega^{(\nu+1)} = \\
&= H_y^{(\nu)}(x,\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})-H_y^{(\nu)}(x,0)- \\
&\quad - H_{yy}^{(\nu)}(x,0)(\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}) + \\
&\quad + b_x^{(\nu)}\left[H_y^{(\nu)}(x,\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)})-H_y^{(\nu)}(x,0)\right] + \\
&\quad + b_x^{(\nu)}\left(H_y^{(\nu)}-\omega^{(\nu)}\right)
\end{aligned}
$$

ed usando i risultati del Passo 1 e del Passo 2, ed il fatto che

$$
|\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}| \leq \frac{r_\nu+r_{\nu+1}}{2}\,,
$$

possiamo concludere

$$
\begin{aligned}
&|H_y^{(\nu+1)}(\xi,0)-\omega^{(\nu+1)}|(r_{\nu+1}-r_{\nu+2})^{\tau+1} \leq \\
&\leq \left(\frac{2M|\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}|^2}{r_\nu-|\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}|} + 2M|b_x^{(\nu)}||\alpha^{(\nu)}+a_x^{(\nu)}| + |b_x^{(\nu)}||H_y^{(\nu)}(x,0)-\omega^{(\nu)}|\right)\cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{r_\nu-r_{\nu+1}}{2}\right)^{\tau+1} \leq \\
&\leq \frac{4Mc_2^2+c_2}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2 = \frac{c_3}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}}\,\varepsilon_\nu^2
\end{aligned}
$$

e questo dimostra la stima (4.13).

Combinando (4.13) con (4.14) ed usando il fatto che $\varepsilon_\nu \leq \delta_\nu r^{2\tau+2}$, si ottiene:

$$
\varepsilon_{\nu+1} \leq \frac{c_3\delta_\nu^2 r^{4\tau+4}}{(r_\nu-r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \leq \delta_{\nu+1}r^{2\tau+2} \tag{4.33}
$$

e questo dimostra le prime due disuguaglianze in (4.17), sostituendo ν con $\nu+1$.

Infine, supponiamo che $\zeta \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$ e definiamo $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$. Dal Passo 3 sappiamo che $z \in \Sigma_{\frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}}$ e segue dalla definizione di $H^{(\nu+1)}$ che:

$$H_{yy}^{(\nu+1)}(\xi,\eta) = (\mathbb{I} + b_x^{(\nu)}) H_{yy}^{(\nu)}(x,y)(\mathbb{I} + b_x^{(\nu)T}) \, .$$

Quindi, usando il Passo 2 e (4.32) (i.e. il fatto che $|b_x^{(\nu)}| < 1$), otteniamo:

$$\begin{aligned}
|H_{yy}^{(\nu+1)}(\zeta) - H_{yy}^{(\nu)}(z)| &= |(\mathbb{I} + b_x^{(\nu)}) H_{yy}^{(\nu)}(x,y) \left(\mathbb{I} + (b_x^{(\nu)})^T\right) - H_{yy}^{(\nu)}(z)| \le \\
&\le 2|b_x^{(\nu)}||H_{yy}^{(\nu)}(z)| + |b_x^{(\nu)}|^2 |H_{yy}^{(\nu)}(z)| \le \\
&\le 3|b_x^{(\nu)}||H_{yy}^{(\nu)}(z)| \le \frac{6Mc_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+2}} \le \\
&\le 6M \frac{2^{-\nu} c\delta}{76M^3} \cdot \frac{1-\theta}{2^{\nu+2}} \le \\
&\le \frac{2^{-\nu} c\delta}{12M^2} \, .
\end{aligned}$$

Inoltre, usando il Passo 3, il fatto che $|x - \xi| \le \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2}$ e $|y - \eta| \le \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2}$, l'identità

$$H_{yy}^{(\nu)}(z) - H_{yy}^{(\nu)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} H_{yy}^{(\nu)}(\zeta + \lambda(z - \zeta))\, d\lambda \, ,$$

dove

$$\Gamma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = \min \left\{ \frac{r_\nu - |\mathrm{Im}\,\xi|}{|x - \xi|}, \ \frac{r_\nu - |\eta|}{|y - \eta|} \right\} > 1 \right\} ,$$

e procedendo come nella dimostrazione del punto 3 del Passo 1, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&|H_{yy}^{(\nu)}(z) - H_{yy}^{(\nu)}(\zeta)| \le \\
&\le 2M \max \left\{ \frac{|x-\xi|}{r_\nu - |\mathrm{Im}\,\xi| - |x - \xi|}, \ \frac{|y - \eta|}{r_\nu - |\mathrm{Im}\,\eta| - |y - \eta|} \right\} \le \\
&\le 2M \frac{2^{-\nu} c\delta}{35M^3} \frac{(r_\nu - r_{\nu+1})}{r_\nu - \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2} - r_{\nu+1}} = \\
&\le 4M \frac{2^{-\nu} c\delta}{35M^3} \frac{(r_\nu - r_{\nu+1})}{(r_\nu - r_{\nu+1})} = \\
&= \frac{2^{-\nu} c\delta}{8M^2} \, .
\end{aligned}$$

Quindi, da quanto appena mostrato, possiamo concludere che:

$$\begin{aligned}
|H_{yy}^{(\nu+1)}(\zeta) - H_{yy}^{(\nu)}(\zeta)| &\le |H_{yy}^{(\nu+1)}(\zeta) - H_{yy}^{(\nu)}(z)| + \\
&\quad + |H_{yy}^{(\nu)}(z) - H_{yy}^{(\nu)}(\zeta)| \le \\
&\le \frac{2^{-\nu} c\delta}{12M^2} + \frac{2^{-\nu} c\delta}{8M^2} \le \\
&\le \frac{2^{-\nu} c\delta}{4M^2} \, ,
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione del Passo 4.

Con quest'ultimo passo abbiamo completato il passo induttivo; ci rimane da mostrare l'uniforme convergenza della successione

$$\phi^{(\nu)} = \psi^{(0)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu)}$$

nella striscia $\Sigma_{\theta r}$ e le stime (4.7). Prima di tutto osserviamo che dal Passo 3 si ha che se $\zeta \in \Sigma_{r_\nu}$ e $z = \psi^{(\mu+1)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu-1)}$ (con $\mu \leq \nu - 3$), allora $z \in \Sigma_{r_\mu}$ e

$$\left|\psi_\zeta^{(\mu)}\left(\psi^{(\mu+1)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu-1)}\right)\right| \leq 1 + \frac{2^{-\mu} c\delta}{8M^3}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\nu-1} \log\left(1 + \frac{2^{-k} c\delta}{8M^3}\right) &\leq \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{2^{-k} c\delta}{8M^3} \leq \\ &\leq \frac{2c\delta}{8M^3} = \frac{c\delta}{4M^3}\,,\end{aligned}$$

quindi, facendo l'esponenziale di ambo i membri dell'uguaglianza, otteniamo:

$$\prod_{k=0}^{\nu-1}\left(1 + \frac{2^{-k} c\delta}{8M^3}\right) \leq e^{\frac{c\delta}{4M^3}}\,.$$

Questo implica, applicando la *chain rule*:

$$\begin{aligned}\left|\phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)\right| &= \left|\left(\psi^{(0)} \circ \ldots \circ \psi^{(\nu-1)}\right)_\zeta\right| \leq \\ &\leq \prod_{k=0}^{\nu-1}\left(1 + \frac{2^{-k} c\delta}{8M^3}\right) \leq e^{\frac{c\delta}{4M^3}} \leq 2\end{aligned}$$

per $\zeta \in \Sigma_{r_\nu}$ e quindi dal Passo 3 otteniamo per $\nu \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left|\phi^{(\nu)}(\zeta) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)\right| &\leq \left|\phi_\zeta^{(\nu-1)}\right|_{r_\nu}\left|\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta\right| \leq \\ &\leq 2\left|\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta\right| \leq \frac{c\delta}{17M^3}(r_\nu - r_{\nu+1})\end{aligned}$$

nella striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$. Osserviamo che la stessa disuguaglianza vale per $\nu = 0$ se definiamo $\phi^{(-1)} = \mathrm{id}$; infatti, dal Passo 3:

$$\begin{aligned}\left|\phi^{(0)}(\zeta) - \phi^{(-1)}(\zeta)\right| &= \left|\phi^{(0)}(\zeta) - \zeta\right| \leq \\ &\leq \frac{c\delta}{35M^3}(r_\nu - r_{\nu+1})\,.\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che la funzione limite $\phi = \lim \phi^{(\nu)}$ soddisfa la seguente stima:

$$\begin{aligned}|\phi(\zeta) - \zeta| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\phi^{(k)}(\zeta) - \phi^{(k-1)}(\zeta)\right| \leq \frac{c\delta}{17M^3}\sum_{k=0}^{\infty}(r_k - r_{k+1}) \leq \\ &\leq \frac{c\delta}{17M^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\theta)}{2^{k+2}}r = \frac{c\delta}{34M^3}\frac{1-\theta}{2}r\end{aligned}$$

nella striscia $\Sigma_{\frac{r(1-\theta)}{2}}$. Inoltre, applicando le stime di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1):

$$\begin{aligned} |\phi_\zeta(\zeta) - \mathbb{I}| &\leq \frac{2}{(1-\theta)r}\frac{c\delta}{34M^3}(1-\theta)r \leq \\ &\leq \frac{c\delta}{17M^3} \end{aligned}$$

e questo prova le prime due disuguaglianze in (4.7).

Osserviamo che la hamiltoniana trasformata è data da

$$K(\zeta) = H \circ \phi(\zeta) = \lim_{\nu \to +\infty} H^{(\nu)}(\zeta)$$

nella striscia $\Sigma_{\theta r}$ e quindi soddisfa le condizioni (4.6). Osserviamo che ε_ν e $(r_\nu - r_{\nu+1})^{-(\tau+1)}\varepsilon_\nu$ tendono entrambi a zero; infatti, usando (4.33) ci basta dimostrare che $\delta_{\nu+1} \to 0$:

$$\begin{aligned} \delta_{\nu+1} &= c2^{\nu(2\tau+3)}\delta_\nu^2 = \\ &= \left(c^{\sum_{k=0}^{\nu} 2^k}\right)\left(2^{(2\tau+3)\sum_{k=0}^{\nu} 2^k(\nu-k)}\right)\delta^{2^{\nu+1}} \leq \\ &\leq \left(c\delta 2^{2\tau+3}\right)^{2^{\nu+1}} \stackrel{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

in quanto[6] per ipotesi abbiamo assunto che $c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$.

Quindi la nuova hamiltoniana K soddisfa le seguenti condizioni:

- $K(\xi, 0) = E$
- $K_\xi(\xi, 0) = 0$
- $K_\eta(\xi, 0) = \omega^{(\infty)}$

dove

$$\omega^{(\infty)} = \left(\prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + k^{(\nu+1)})\right)\omega = (1+k)\omega\,.$$

[6] Osserviamo che nella stima appena fatta abbiamo usato la seguente uguaglianza (che si dimostra facilmente per induzione su ν):

$$\sum_{k=0}^{\nu} 2^k(\nu - k) = 2^{\nu+1} - (\nu+2)\,.$$

Osserviamo che la convergenza della produttoria é assicurata dal fatto:

$$\begin{aligned}
|k^{(\nu+1)}| &\le \frac{c_2\varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{\tau+1}} \le \\
&\le \frac{\varepsilon_\nu c_2 2^{(\nu+2)(\tau+1)}}{r^{\tau+1}(1-\theta)^{\tau+1})} \le \\
&\le \frac{\varepsilon_\nu c\, 2^{\nu(\tau+1)}}{r^{\tau+1}} \le \\
&\le \delta_\nu c 2^{\nu(\tau+1)} r^{\tau+1} \le \\
&\le r^{\tau+1}\lambda_\nu \le \\
&\le r^{\tau+1}(\lambda_0)^{2^\nu} .
\end{aligned}$$

Quindi, ricordando che $|\lambda_0| < \frac{1}{2}$, ricaviamo una stima di $|k|$:

$$\begin{aligned}
|k| &\le \left|\prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + r^{\tau+1}\lambda_0^{2^\nu}) - 1\right| \le \\
&\le \left|e^{\sum_{\nu=0}^{\infty}\log(1+r^{\tau+1}\lambda_0^{2^\nu})} - 1\right| \le \\
&\le \left|e^{\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\tau+1}\lambda_0^{2^\nu}} - 1\right| \le \\
&\le \left|e^{r^{\tau+1}\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}} - 1\right| \le \\
&\le 3\, r^{\tau+1}\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} \le \\
&\le 6\, r^{\tau+1}\lambda_0 = \\
&= 6\, r^{\tau+1} 2^{2\tau+3} c\delta \le \\
&\le 2^{2\tau+6} c\delta r^{\tau+1} .
\end{aligned}$$

Inoltre, utilizzando la (4.17) otteniamo che:

$$\begin{aligned}
|K_{\eta\eta}(\zeta) - Q(\zeta)| &= \lim_{\nu\to\infty}\left|H_{yy}^{(\nu)}(\zeta) - Q^{(0)}(\zeta)\right| \le \\
&\le \lim_{\nu\to\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu}\left|H_{yy}^{(\mu)}(\zeta) - Q^{(\mu)}(\zeta)\right| \le \\
&\le \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{-\mu}\frac{c\delta}{4M} = \frac{c\delta}{2M} .
\end{aligned}$$

Al fine di stabilire la stima per $v \circ u^{-1}$ osserviamo che

$$v \circ u^{-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(V_x^{(0)^T} V_x^{(1)^T} \dots V_x^{(\nu-1)^T} U_x^{(\nu)}\right)$$

nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \le \theta r$. Osserviamo che abbiamo usato una notazione semplificata:

$$V_x^{(\mu)} = V_x^{(\mu)}\left(V^{(\mu-1)} \circ \dots \circ V^{(0)}(x)\right).$$

Questa espressione è ben definita per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r$, in quanto segue dal Passo 2, dalla definizione di $V^{(\nu)}$, dalla (4.8) e dalla (4.17), che in tale dominio:

$$\begin{aligned}\left|V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) - V^{(\nu-1)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x)\right| &\leq \frac{c_2 \varepsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} \leq \\ &\leq r_\nu - r_{\nu+1}\end{aligned}$$

e, osservando che $V^{(0)} = x$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\left|V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) - x\right| &\leq \sum_{k=1}^{\nu} \left|V^{(k)}(\ldots) - V^{(k-1)}(\ldots)\right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\nu}(r_k - r_{k-1}) = \\ &= r - r_{\nu+1} \leq \\ &\leq \frac{1-\theta}{2} r \leq \\ &\leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} - \theta r \ ;\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\left|V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x)\right| &\leq |x| + \left|V^{(\nu)} \circ \ldots \circ V^{(0)}(x) - x\right| \leq \\ &\leq \theta r + \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2} - \theta r \leq \\ &\leq \frac{r_\nu + r_{\nu+1}}{2}\end{aligned}$$

e questo mostra che l'espressione sopra è ben definita.

Infine, dal Passo 2 e dalla (4.32) riusciamo a concludere che:

$$\begin{aligned}\left|v \circ u^{-1}(x)\right| &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|V_x^{(0)^T}\right| \left|V_x^{(1)^T}\right| \ldots \left|V_x^{(\nu-1)^T}\right| \left|U_x^{(\nu)}\right| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{c\delta}{8M^3}\right) \ldots \left(1 + \frac{2^{1-\nu} c\delta}{8M^3}\right)\right] \frac{2^{-\nu} c\delta}{76M^3} r^{\tau+1} \leq \\ &\leq \frac{e^{\frac{2c\delta}{8M^3}}}{76M^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} c\delta r^{\tau+1} \leq \\ &\leq \frac{c\delta}{19M^3} r^{\tau+1}\end{aligned}$$

nella striscia $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r$. E questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Dal teorema appena dimostrato possiamo dedurre il seguente corollario.

Corollario 4.2.2. (Teorema KAM isoenergetico, caso analitico II) *Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$, $E \in \mathbb{R}$, $0 < r \leq 1$ e $M \geq 1$ e sia $\Omega \supset \overline{B_r(y_0)}$ un aperto di $\mathbb{R}^n$.*

Sia $H(x,y) = h(y) + f(x,y)$ una funzione hamiltoniana con $(x,y) \in \mathbb{T}^n \times \Omega$ con un'estensione olomorfa nella striscia

$$\Sigma_{r,y_0} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \le r,\ |y - y_0| \le r\} .$$

Supponiamo inoltre che valgano le seguenti condizioni per la hamiltoniana imperturbata:

(i) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(y_0) =: \omega$ *sia un vettore (γ, τ) diofantino, tale che $|\omega| \le M$,*

(ii) $h(y_0) = E$,

(iii) $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z)\right|_{\Sigma_{r,y_0}} \le M$,

(iv) $\left|(A(y_0))^{-1}\right| \le M$, *dove*

$$A(y) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y) & -\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}(y)\right)^T \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(y) & 0 \end{pmatrix} .$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che $c\delta^* \le 2^{-(2\tau+4)}$ e che valga quanto segue per $(x,y) \in \Sigma_{r,y_0}$ e $\delta \le \delta^*$:

$$\begin{aligned} |f(x, y_0)| &\le \delta r^{2\tau+2} \\ |f_y(x, y_0)| &\le \delta r^{\tau+1} \\ |f_{yy}(x, y)| &\le \frac{c\delta}{4M} . \end{aligned}$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ (dove $z = (x,y)$ e $\zeta = (\xi, \eta)$), dalla striscia $\Sigma_{\theta r,\, y_0}$ nella striscia $\Sigma_{r,\, y_0}$, della forma:

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y - y_0 = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta , \end{cases}$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ entrambe periodiche di periodo 1 e tale che la hamiltoniana trasformata $K = H \circ \phi$ soddisfi

$$K_\xi(\xi, y_0) = 0, \quad K_\eta(\xi, y_0) = (1 + k)\,\omega, \quad K(\xi, y_0) = E ,$$

dove $|k| \le 2^{2\tau+3} c\delta r^{\tau+1}$.

Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r,\, y_0}$*:*

$$\begin{aligned}
&|\phi(\zeta)-\zeta| \le \frac{c\delta}{34M^3}(1-\theta)r \\
&|\phi_\zeta(\zeta)-\mathbb{I}| \le \frac{c\delta}{17M^3} \\
&|K_{\eta\eta}(\zeta)-h_{yy}(\zeta)| \le \frac{c\delta}{2M} \\
&|v\circ u^{-1}(x)| \le \frac{c\delta}{19M^3} r^{\tau+1}\,.
\end{aligned}$$

4.3 Teorema KAM isoenergetico: caso differenziabile

Teorema 4.3.1. (Teorema KAM isoenergetico, caso differenziabile) *Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $E \in \mathbb{R}$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ e $\rho > 0$, e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino tale che $|\omega| \leq M$. Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio aperto contenente $B_\rho(0)$ e sia $F \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ tale da soddisfare:*

$$\begin{cases} F_x(x,0) = 0 \\ F_y(x,0) = \omega \\ F(x,0) = E \end{cases} \tag{4.34}$$

per $x \in \mathbb{T}^n$.
Supponiamo, inoltre, che soddisfi le seguenti stime per $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in G$:

$$\begin{aligned} &|F|_{C^l} \leq M \\ &\left|\langle A(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,, \end{aligned} \tag{4.35}$$

dove

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} F_{yy}(x,y) & -\omega^T \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0$$

in modo che valga quanto segue.
Se $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ è una funzione hamiltoniana tale che per qualche $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ si abbia:

$$|H - F|_{C^s} \leq M\varepsilon^{l-s} \qquad \text{per ogni } \; 0 \leq s \leq l\,, \tag{4.36}$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi)\,, \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} D_{(1+k)\omega} u = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\[2ex] D_{(1+k)\omega} v = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases}$$

dove $|k| \leq 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}$ (per un'opportuna costante $\tilde{c}_2$), tali che:

1. *$u(\xi)-\xi$ e $v(\xi)$ sono entrambe periodiche con periodo 1;*

2. *$u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $v \circ u^{-1} \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$ per ogni $s \le m+1$ tale che $s \notin \mathbb{N}$ e $s+\tau \notin \mathbb{N}$;*

3. *$H(u(\xi), v(\xi)) = E$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$
\begin{aligned}
|u - \mathrm{id}\,|_{C^s} &\le \frac{\tilde c}{\mu(1-\mu)} \varepsilon^{m+1-s} && 0 < s \le m+1\,,\\
|v \circ u^{-1}|_{C^s} &\le \frac{\tilde c}{\mu(1-\mu)} \varepsilon^{m+\tau+1-s} && 0 < s \le m+\tau+1\,,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$.

Dimostrazione. Analogamente a quanto già visto per il teorema 3.3.1, l'idea della dimostrazione consiste nell'approssimare la nostra hamiltoniana con una successione di hamiltoniane reali analitiche, usando le tecniche di approssimazione di Jackson, Moser, Zehnder e Bernstein, che abbiamo ampiamente discusso in precedenza.
Approssimiamo quindi $H(x,y)$ con una successione di funzioni reali analitiche $\{H^{(\nu)}(x,y)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ definite nelle striscie

$$\sigma_{r_{\nu-1},\rho} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} :\ (\mathrm{Re}\, x) \in \mathbb{T}^n,\ |\mathrm{Im}\, x| \le r_{\nu-1},\ |\mathrm{Re}\, y| \le \rho,\ |\mathrm{Im}\, y| \le r_{\nu-1}\},$$

con $r_\nu = \dfrac{\varepsilon}{2^\nu}$, (dove $\varepsilon > 0$ è il parametro che compare in (4.36), che supporremo minore di 1).
Sceglieremo tali "*hamiltoniane approssimanti*" in modo che valgano le seguenti stime nella striscia $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$ (vedi il lemma 3.2.3):

$$
\begin{aligned}
&\left| H^{(\nu)}(z) - \sum_{|\beta|\le l} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \le \tilde c_1 r_\nu^l\\
&\left| H_y^{(\nu)}(z) - \sum_{|\beta|\le l-1} \frac{\partial^\beta H_y(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \le \tilde c_1 r_\nu^{l-1}\\
&\left| H_{yy}^{(\nu)}(z) - \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, z)^\beta \right| \le \tilde c_1 r_\nu^{l-2}
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

dove

$$\tilde c_1 = \tilde c_1(l,n,M) \ge M \tag{4.39}$$

è scelta appropriatamente (Lemma 3.2.3) (supporre che sia maggiore di M non è affatto una scelta restrittiva, come ci si convince facilmente osservando che $|H|_{C^l} \le 2M$).

Per induzione costruiremo una successione di trasformazioni simplettiche, reali analitiche $z = \phi^{(\nu)}(\zeta)$ (dove $z = (x, y)$ e $\zeta = (\xi, \eta)$), della forma

$$\begin{cases} x = u^{(\nu)}(\xi) \\ y = v^{(\nu)}(\xi) + (u_\xi^{(\nu)^T}(\xi))^{-1}\eta \end{cases} \tag{4.40}$$

tali che $u^{(\nu)}(\xi) - \xi$ e $v^{(\nu)}(\xi)$ siano entrambe periodiche di periodo 1 e la hamiltoniana trasformata

$$K^{(\nu)} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu)}$$

soddisfi

$$\begin{cases} K_\xi^{(\nu)}(\xi, 0) = 0 \\ K_\eta^{(\nu)}(\xi, 0) = (1 + k^{(\nu)})\omega^{(\nu-1)} =: \omega^{(\nu)} \\ K^{(\nu)}(\xi, 0) = E \end{cases} \tag{4.41}$$

con $|k^{(\nu)}| \leq 2^{2\tau+6}\tilde{c}_2 r_\nu^{m+\tau+1}$.

Più precisamente la trasformazione $\phi^{(\nu)}$ mapperà $\Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ (con $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$) nella striscia $\sigma_{r_\nu,\rho}$.
Daremo ora uno "*sketch*" della dimostrazione che seguiremo.

- Per $\nu = 0$ useremo la condizione di piccolezza su $H - F$ (cioè la (4.36)) e (4.38), per verificare che la hamiltoniana reale analitica $H^{(0)}(x, y)$ soddisfa le ipotesi del Teorema KAM isoenergetico analitico (vedi teorema 4.2.1) nella striscia di larghezza $r = \theta\varepsilon$, con $\delta = \varepsilon^m$ (Passo 1).

- Una volta stabilita l'esistenza di $\phi^{(\nu-1)}$ per qualche $\nu \geq 1$, useremo la condizione (4.38) per controllare che $H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}$ soddisfa le ipotesi del teorema KAM isoenergetico analitico (teorema 4.2.1), con $r = \theta r_\nu$ e $\delta = r_\nu^m$ (Passo 2).
  Questo ci garantirà l'esistenza di una trasformazione simplettica

  $$z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$$

  della forma (4.40), da $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ in $\Sigma_{\theta r_\nu}$, tale che $\psi^{(\nu)}(\xi, 0) - (\xi, 0)$ sia periodica di periodo 1 e la hamiltoniana trasformata $K^{(\nu)} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu)}$ soddisfi (4.41), con

  $$\phi^{(\nu)} = \phi^{(\nu-1)} \circ \psi^{(\nu)}.$$

  Denotando con $F^{(0)}$ la "*regolarizzata*" di F (vedi lemma 3.2.3), definiremo le seguenti matrici simmetriche

  $$\begin{cases} Q^{(\nu)} = K_{\eta\eta}^{(\nu-1)} \qquad (\text{per } \nu \geq 1) \\ Q^{(0)} = F_{yy}^{(0)} \end{cases}$$

ed indicheremo con

$$S^{(\nu)}(\xi,\eta) = U^{(\nu)}(x) + V^{(\nu)}(x)\cdot\eta$$

la funzione generatrice della trasformazione $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$.
Applicando il teorema KAM isoenergetico analitico (teorema 4.2.1) ricaveremo le seguenti stime per $\zeta \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$:

$$\begin{cases} |\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta| \le \dfrac{\tilde{c}_2(1-\theta)}{272M^3} r_\nu^{m+1} \\[2ex] |\psi_\zeta^{(\nu)}(\zeta) - \mathbb{I}| \le \dfrac{\tilde{c}_2}{136M^3} r_\nu^m \\[2ex] |K_{\eta\eta}^{(\nu)}(\zeta) - Q^{(\nu)}(\zeta)| \le \dfrac{\tilde{c}_2 r_\nu^m}{4M} \\[2ex] |U_x^{(\nu)}(x)| \le \theta \dfrac{\tilde{c}_2}{152M^3} r_\nu^{m+\tau+1} \end{cases} \tag{4.42}$$

con

$$\tilde{c}_2 = \tilde{c}_2(\gamma,\tau,\theta,M,n) = c(\gamma,\tau,\theta,2M,n)\,,$$

dove c è la costante del teorema KAM analitico (teorema 4.2.1); notiamo che per come è stata ricavata la costante c (vedi (4.12)), abbiamo che:

$$\tilde{c}_2 \ge 8M\,. \tag{4.43}$$

Definiamo inoltre:

$$A^{(\nu)}(x,y) = \begin{pmatrix} Q^{(\nu)}(x,y) & -\omega^{(\nu)^T} \\ \omega^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nel <u>Passo 3</u> mostreremo come (4.42) implichi le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\phi^{(\nu)}(\zeta) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)| \le \dfrac{\tilde{c}_2}{136M^3}(1-\theta) r_\nu^{m+1} \\[2ex] |\phi_\zeta^{(\nu)}(\zeta) - \phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)| \le \dfrac{\tilde{c}_2}{78M^3} r_\nu^m \\[2ex] \left|v^{(\nu)}\left((u^{(\nu)})^{-1}(x)\right) - v^{(\nu-1)}\left((u^{(\nu-1)})^{-1}(x)\right)\right| \le \dfrac{\tilde{c}_2}{152M^3} r_\nu^{m+\tau+1} \end{cases} \tag{4.44}$$

rispettivamente per $\zeta \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$, $\zeta \in \Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ e $|\mathrm{Im}\, x| \le \theta r_{\nu+1}$.

Richiederemo inoltre che

$$\varepsilon^* \le \rho \qquad \text{e} \qquad (\varepsilon^*)^m \le \delta^* = \delta^*(\gamma,\tau,\theta,2M,n) \tag{4.45}$$

(dove δ^* è stata definita nel teorema KAM analitico 4.2.1) e definiremo le seguenti costanti:

$$\tilde{c}_3 = \tilde{c}_3(m,n) = \hat{C}(m+1,n)\,,$$

(dove la costante $\hat{C}$ è la costante definita nel lemma 3.2.5)

$$\lambda = l - 2\tau - 2 - m \tag{4.46}$$

$$\tilde{c}_4 = \frac{4\,\tilde{c}_2}{1-2^{-m}} \tag{4.47}$$

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{c}_2\tilde{c}_3}{136M^3}\left(\frac{2}{\theta}\right)^{m+\tau+1} \tag{4.48}$$

in modo che siano soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

$$(2+e^n)\tilde{c}_1{\varepsilon^*}^\lambda \le \left(\frac{\theta}{2}\right)^l \tag{4.49}$$

$$16n\tilde{c}_1\theta\varepsilon M \le 1 \tag{4.50}$$

$$\tilde{c}_4{\varepsilon^*}^m \le 1-\theta \le \log 2\,. \tag{4.51}$$

D'ora in poi assumeremo che la costante $\varepsilon > 0$ che compare in (3.34) e (3.37) sia minore o uguale di ε^*.

Definiamo infine

$$\begin{cases} M_\nu = \dfrac{M_{\nu-1}}{1-\tilde{c}_2 r_\nu^m} \\ M_0 = 2M \end{cases} \tag{4.52}$$

ed usando la (4.47), otteniamo che per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ si ha:[7]

$$\begin{aligned} M_\nu &\le M_{\nu-1}e^{2\tilde{c}_2 r_\nu^m} \le \ldots \le M_0 e^{2\tilde{c}_2\sum_{j=1}^{\nu} r_j^m} \le \\ &\le 2Me^{4\tilde{c}_2\frac{\varepsilon^m}{1-2^{-m}}} \le 2Me^{\tilde{c}_4{\varepsilon^*}^m} \le 4M\,, \end{aligned} \tag{4.53}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la (4.51).

Passo 1

Mostreremo che esiste una trasformazione simplettica $z = \psi^{(0)}(\zeta)$ della forma (4.40) da Σ_{r_1} in $\Sigma_{\theta r_0}$, tale che $\psi^{(0)}(\xi,0) - (\xi,0)$ sia periodica di periodo 1 e

[7] Per la prima disuguaglianza useremo:

$$\frac{1}{1-x} \le e^{2x} \qquad \text{per } 0 \le x \le \frac{1}{2}\,.$$

Osserviamo che nel nostro caso

$$\tilde{c}_2 r_\nu^m < \frac{1}{2}$$

per come è stata scelta la costante $\tilde{c}_2$ (vedi teorema 4.2.1).

la hamiltoniana trasformata $K^{(0)} = H^{(0)} \circ \psi^{(0)}$ soddisfi (4.41). Inoltre faremo vedere che $K^{(0)}$ e $\psi^{(0)}$ soddisfano le stime (4.42) con $\nu = 0$.

Dimostrazione: Cominciamo col mostrare che $H^{(0)}$ soddisfa le ipotesi necessarie per applicare il teorema KAM isoenergetico analitico (teorema 4.2.1). Come prima cosa stimiamo

$$\left| H^{(0)}(x,0) - E \right|$$

per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_0 = \theta\varepsilon$.
Osserviamo che:

$$\begin{aligned} |H^{(0)}(x,0) - E| \ &\leq \ \left| H^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta \right| + \\ &+ \ \left| \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta - F(\mathrm{Re}\, x, 0) \right| + \\ &+ \ |F(\mathrm{Re}\, x, 0) - E)| \, . \end{aligned} \tag{4.54}$$

Stimiamo separatamente i vari termini per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_0 = \theta\varepsilon$:

- Dalla (4.38) otteniamo che:

$$\begin{aligned} \left| H^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta \right| \ &\leq \ \tilde{c}_1 (\theta r_0)^l \leq \\ &\leq \ \tilde{c}_1 \varepsilon^l \, . \end{aligned}$$

- Cominciamo con l'osservare che:

$$F(\mathrm{Re}\, x, 0) \ = \ \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta F(\mathrm{Re}\, x, 0)}{\beta!} (i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta \, ;$$

  infatti, per la (4.34) abbiamo che $F_x(x,0) = 0$ e di conseguenza ogni derivata rispetto alla x, calcolata in $(x,0)$, è nulla; per quanto riguarda i termini in cui compaiono le derivate rispetto alle y, questi sono nulli in quanto il fattore $(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta$ è uguale a 0. Quindi, usando la (4.36),

otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\,x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta - F(\mathrm{Re}\,x,0)\right| = \\
&= \left|\sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta H(\mathrm{Re}\,x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta - \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{\partial^\beta F(\mathrm{Re}\,x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta\right| \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{|\partial^\beta H(\mathrm{Re}\,x,0) - \partial^\beta F(\mathrm{Re}\,x,0)|}{\beta!}|(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta| \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|}}}{\beta!}(\theta r_0)^{|\beta|} \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|}}}{\beta!}\varepsilon^{|\beta|} \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]} M\frac{\varepsilon^{l-|\beta|}\varepsilon^{|\beta|}}{\beta!} \leq \\
&\leq M e^n \varepsilon^l \,,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$
\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\beta!} = e^n \,,
$$

che abbiamo già avuto modo di dimostrare (vedi (3.54)).

- Dalla (4.34) abbiamo che:

$$
|F(\mathrm{Re}\,x,0) - E| = 0\,.
$$

Riassumendo le stime trovate ed usando (4.39), (4.46),(4.49) e (4.54) :

$$
\begin{aligned}
\left|H^{(0)}(x,0) - E\right| &\leq \tilde{c}_1\varepsilon^l + Me^n\varepsilon^l \leq \\
&\leq \tilde{c}_1\varepsilon^l(1+e^n) = (1+e^n)\tilde{c}_1\varepsilon^\lambda\varepsilon^m\varepsilon^{2\tau+2} \leq \\
&\leq \varepsilon^m(\theta\varepsilon)^{2\tau+2}\,.
\end{aligned}
$$

In maniera simile otteniamo la stima per $|H_y^{(0)}(x,0)-\omega|$. Infatti:

$$
\begin{aligned}
|H_y^{(0)}(x,0)-\omega| &= |H_y^{(0)}(x,0) - F_y(x,0)| \leq \\
&\leq \left|H_y^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta\right| + \\
&+ \left|\sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\,x,0)^\beta - F_y(x,0)\right|\,. \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

Stimiamo separatamente i due addendi:

- usando (4.38) otteniamo:

$$\left| H_y^{(0)}(x,0) - \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta \right| \leq \tilde{c}_1 \varepsilon^{l-1} \; .$$

- Cominciamo con l'osservare che:

$$F_y(x,0) \quad = \quad \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta F_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta$$

  (si ragiona analogamente a quanto visto per la stima precedente). Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{\partial^\beta H_y(x,0)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta - F_y(x,0) \right| \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{|\partial^\beta H_y(x,0) - \partial^\beta F_y(x,0)|}{\beta!} \left|(i\mathrm{Im}\, x, 0)^\beta\right| \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|+1}}}{\beta!}(\theta e_0)^{|\beta|} \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|+1}}}{\beta!}\varepsilon^{|\beta|} \leq \\
&\leq \sum_{|\beta|=0}^{[l]-1} \frac{M\varepsilon^{l-|\beta|-1}\varepsilon^{|\beta|}}{\beta!} \leq M e^n \varepsilon^{l-1} \; .
\end{aligned}$$

Riassumendo le stime trovate ed usando (4.39), (4.46), (4.49) e (4.55), possiamo concludere:

$$\begin{aligned}
|H_y^{(0)}(x,0) - \omega| &\leq (\tilde{c}_1 + e^n M)\varepsilon^{l-1} \leq \\
&\leq (1+e^n)\tilde{c}_1 \varepsilon^{l-1} = \\
&= (1+e^n)\tilde{c}_1 \varepsilon^{\lambda} \varepsilon^m \varepsilon^{2\tau+1} \leq \\
&\leq \varepsilon^m (\theta\varepsilon)^{\tau+1} \; .
\end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare ora la stima relativa alla matrice hessiana di $H^{(0)}$. Ricordiamo che abbiamo definito $Q^{(0)}(z) = F_{yy}^{(0)}(z)$, dove $F^{(0)}$ è la "*regolarizzata*" di

F (vedi Lemma 3.2.3) e soddisfa:[8]

$$\begin{aligned}\left|F^{(0)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta\right| &\le \tilde c_1(\theta r_0)^{l-2} = \\ &= \tilde c_1(\theta\varepsilon)^{l-2} .\end{aligned}$$

Consideriamo la seguente stima per $(x,y)\in\Sigma_{\theta r_0}$:

$$\begin{aligned}|H^{(0)}_{yy}(z) - Q^{(0)}(z)| &\le \left|H^{(0)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta\right| + \\ &+ \left|\sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta - \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta\right| + \\ &+ \left|\sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta - Q^{(0)}(z)\right| . \qquad (4.56)\end{aligned}$$

Stimiamo i vari addendi separatamente:

- Usando la (4.38) abbiamo:

$$\begin{aligned}\left|H^{(0)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta\right| &\le \tilde c_1(\theta r_0)^{l-2} \le \\ &\le \tilde c_1\varepsilon^{l-2} .\end{aligned}$$

- Dalla (4.36) segue che

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta H_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta - \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\mathrm{Re}\, z)}{\beta!}(i\mathrm{Im}\, z)^\beta\right| \le \\ &\le \sum_{|\beta|\le l-2} \frac{|H-F|_{C^{|\beta|+2}}}{\beta!}|(i\mathrm{Im}\, z)^\beta| \le \\ &\le \sum_{|\beta|\le l-2} M\frac{\varepsilon^{l-|\beta|-2}\varepsilon^{|\beta|}}{\beta!} \le e^n M\varepsilon^{l-2} .\end{aligned}$$

Quindi riassumendo le stime trovate ed usando (4.56), (4.46) ed il fatto che $\tilde c_2 \ge 8M$ (vedi (4.43)), possiamo concludere:

$$\begin{aligned}|H^{(0)}_{yy}(z) - Q^{(0)}(z)| &\le (2\tilde c_1 + e^n M)\varepsilon^{l-2} \le \\ &\le (2+e^n)\tilde c_1\varepsilon^\lambda\varepsilon^m\varepsilon^{2\tau} \le \\ &\le \frac{c_2\varepsilon^m}{8M} .\end{aligned}$$

[8]Possiamo prendere la costante $\tilde c_1$ uguale alla costante che compare in (4.38), in quanto per ipotesi anche $|F|_{C^l}\le M$.

Per concludere la dimostrazione di questo passo ci resta soltanto da far vedere che $Q^{(0)}$ soddisfa le ipotesi del teorema 4.2.1, cioè:

$$\left|Q^{(0)}\right| \leq 2M \qquad \text{e} \qquad \left|\langle A^{(0)}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq 2M\,.$$

- Osserviamo che usando (4.38) e (4.50), otteniamo la seguente stima in $\Sigma_{\theta r_0}$:

$$\begin{aligned}
|Q^{(0)}(z)| &\leq \left|F^{(0)}_{yy}(z) - \sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\operatorname{Re} z)}{\beta!}(i\operatorname{Im} z)^\beta\right| + \\
&+ \left|\sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\operatorname{Re} z)}{\beta!}(i\operatorname{Im} z)^\beta\right| \leq \\
&\leq \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} + \sum_{|\beta|\leq l-2} |F|_{C^l}\frac{(\theta r_0)^{|\beta|}}{\beta!} \leq \\
&\leq \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} + Me^{n\theta\varepsilon} \leq \\
&\leq \frac{M}{4} + Me^{\frac{1}{4}} \leq 2M\,.
\end{aligned}$$

- In tale striscia, definiamo le seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
B &:= \left\langle A^{(0)}(\cdot,0) - A(\cdot,0)\right\rangle \\
C &:= \langle A(\cdot,0)\rangle\ .
\end{aligned}$$

  Usando[9] il lemma 3.2.3 e (4.35), otteniamo:

$$\begin{aligned}
|B| &\leq \tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2} \\
|C^{-1}| &= \left|\langle A(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\ .
\end{aligned}$$

  Quindi usando (4.50) possiamo concludere:

$$\begin{aligned}
\left|\langle A^{(0)}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| &= |(B+C)^{-1}| \leq \\
&\leq |(\mathbb{I}+BC^{-1})^{-1}||C^{-1}| \leq \\
&\leq M\sum_{k=0}^{\infty}(|B||C^{-1}|)^k \leq \\
&\leq M\sum_{k\geq 0}(\tilde{c}_1(\theta\varepsilon)^{l-2}M)^k \\
&\leq M\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \\
&\leq 2M\ .
\end{aligned}$$

[9] Osserviamo che stiamo facendo la media su $\mathbb{T}^n$, quindi stiamo considerando x reali e di conseguenza:

$$\sum_{|\beta|\leq l-2} \frac{\partial^\beta F_{yy}(\operatorname{Re} x,0)}{\beta!}(i\operatorname{Im} x,0)^\beta = F_{yy}(x,0)\,.$$

Riassumendo, le stime appena dimostrate e la (4.35) mostrano che la funzione hamiltoniana $H^{(0)}(x,y)$ soddisfa le ipotesi del teorema KAM isoenergetico analitico (teorema 4.2.1) con $r=\theta r_0=\theta\varepsilon$, $\delta=\varepsilon^m$ e $M'=2M$; quindi possiamo concludere che esiste una trasformazione $z=\psi^{(0)}(\zeta)$ della forma (4.40) da Σ_{r_1} in $\Sigma_{\theta r_0}$, tale che $\psi^{(0)}(\xi,0)-(\xi,0)$ sia periodica con periodo 1 e la hamiltoniana trasformata $K^{(0)}=H^{(0)}\circ\psi^{(0)}$ soddisfi (4.41). Inoltre, sempre dal teorema 4.2.1, si ottiene che $K^{(0)}$ e $\psi^{(0)}$ soddisfano le stime (4.42) con $\nu=0$.
Questo completa la dimostrazione del Passo 1.

Osserviamo che per $\eta=0$ le disuguaglianze in (4.44) seguono immediatamente dal Passo 1, semplicemente definendo

$$\phi^{(-1)}(\zeta)=\zeta \qquad \text{e} \qquad \phi^{(0)}=\phi^{(-1)}\circ\psi^{(0)}=\psi^{(0)}\ .$$

Alcuni preliminari al Passo 2

Ora assumeremo di aver costruito una trasformazione $z=\phi^{(\nu-1)}(\zeta)$ della forma (4.40), da $\Sigma_{\theta r_\nu}$ in $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$, in modo tale che $u^{(\nu-1)}(\xi)-\xi$ e $v^{(\nu-1)}$ siano entrambe periodiche di periodo 1 e soddisfino (4.44), con $\nu-1$ al posto di ν. Inoltre, la hamiltoniana trasformata

$$K^{(\nu-1)}=H^{(\nu-1)}\circ\phi^{(\nu-1)}$$

dovrà soddisfare (4.41).
In aggiunta a ciò, assumeremo che le trasformazioni $z=\psi^{(\mu)}(\zeta)$ (dove $\mu=0,\ldots,\nu-1$) soddisfino la (4.42) e, usando (4.52) e (4.53), otterremo in maniera induttiva le seguenti stime per $(\xi,\eta)\in\Sigma_{r_\nu}$:

$$\begin{cases} \left|K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\zeta)\right|\le M_{\nu-1} \\ \left|\langle A^{(\nu-1)}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right|\le M_{\nu-1} \\ |\omega^{(\nu)}|\le M_\nu\ . \end{cases} \tag{4.57}$$

Infatti:

- cominciamo con la dimostrazione della prima:

$$\begin{aligned} \left|K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\zeta)\right| &\le \left|K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}(\zeta)-Q^{(\nu-1)}(\zeta)\right|+\left|Q^{(\nu-1)}(\zeta)\right|\le \\ &\le \frac{\tilde c_2}{4M}r_{\nu-1}^m+M_{\nu-2}\le \\ &\le M_{\nu-2}(1+\tilde c_2 r_{\nu-1}^m)\le \\ &\le \frac{M_{\nu-2}}{1-\tilde c_2 r_{\nu-1}^m}=M_{\nu-1}\ . \end{aligned}$$

- Al fine di dimostrare la seconda disuguaglianza, definiamo le seguenti matrici:

$$C\equiv\left\langle A^{(\nu-1)}(\cdot,0)-Q^{(\nu-1)}(\cdot,0)\right\rangle \qquad \text{e} \qquad B\equiv\left\langle Q^{(\nu-1)}(\cdot,0)\right\rangle\ .$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva otteniamo

$$\begin{aligned} |C| &\leq \frac{\tilde{c}_2}{4M} r_{\nu-1}^m \\ |B^{-1}| &\leq M_{\nu-2} \end{aligned}$$

e quindi possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} \left\langle A^{(\nu-1)}(\cdot,0)\right\rangle &= \langle (C+B)^{-1}\rangle = \\ &= |B^{-1}||(\mathbb{I}+B^{-1}C)^{-1}| \leq \\ &\leq M_{\nu-2}\sum_{k=0}^{\infty}|B^{-1}C|^k \leq \\ &\leq M_{\nu-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(M_{\nu-2}\frac{\tilde{c}_2}{4M}r_{\nu-1}^m\right)^k \leq \\ &\leq M_{\nu-2}\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{c}_2 r_{\nu-1}^m)^k \leq \\ &\leq \frac{M_{\nu-2}}{1-\tilde{c}_2 r_{\nu-1}^m} = M_{\nu-1}\,. \end{aligned}$$

- Ci rimane da dimostrare che:

$$|\omega^{(\nu)}| \leq M_\nu\,.$$

Questo è vero per ipotesi per $\nu = 0$; supponendo che sia vero quando $\mu = 0, \ldots, \nu-1$, dimostriamola per $\mu = \nu$. Cominciamo con l'osservare che, poiché $n \geq 2$ e vale la (4.50), si ha:

$$\begin{aligned} |k^{(\nu)}| &\leq 2^{2\tau+6}\tilde{c}_2 r_\nu^{m+\tau+1} = \\ &= 2^{2\tau+6} r_\nu^{\tau+1}\tilde{c}_2 r_\nu^m = \\ &= 2^{2\tau+6}\frac{\varepsilon^{\tau+1}}{2^{\nu(\tau+1)}}\tilde{c}_2 r_\nu^m = \\ &= 2^{(2-\nu)\tau+(6-\nu)}\varepsilon^{\tau+1}\tilde{c}_2 r_\nu^m \leq \\ &\leq (2^4\varepsilon)^{\tau+1}\tilde{c}_2 r_\nu^m \leq \\ &\leq 2^4\varepsilon\tilde{c}_2 r_\nu^m \leq \\ &\leq \tilde{c}_2 r_\nu^m\,. \end{aligned}$$

Quindi otterremo:

$$\begin{aligned} |\omega^{(\nu)}| &\leq (1+|k^{(\nu)}|)|\omega^{(\nu-1)}| \leq (1+|k^{(\nu)}|)M_{\nu-1} \leq \\ &\leq (1+\tilde{c}_2 r_\nu^m)M_{\nu-1} = \\ &\leq \frac{M_{\nu-1}}{1-\tilde{c}_2 r_\nu^m} = M_\nu\,. \end{aligned}$$

Passo 2

Definiamo nella striscia $\Sigma_{\theta r_\nu}$ la seguente funzione:

$$\tilde{H}(x,y) = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}(x,y)\,.$$

Vogliamo dimostrare che valgono le seguenti stime per $(x,y) \in \Sigma_{\theta r_\nu}$:

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{H}(x,0) - E\right| &\leq r_\nu^m (\theta r_\nu)^{2\tau+2} \\
\left|\tilde{H}_y(x,0) - \omega^{(\nu)}\right| &\leq r_\nu^m (\theta r_\nu)^{\tau+1} \\
\left|\tilde{H}_{yy}(x,y) - Q^{(\nu)}(x,y)\right| &\leq \frac{\tilde{c}_2}{8M} r_\nu^m\,.
\end{aligned}$$

<u>Dimostrazione</u>: Poiché $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_\nu$, allora $\phi^{(\nu-1)}(x,0)$ assume valori nella regione in cui la stima (4.38) vale sia per $H^{(\nu)}$ che per $H^{(\nu-1)}$ (infatti la trasformazione $\phi^{(\nu-1)}$ mappa $\Sigma_{\theta r_\nu}$ in $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$). Quindi per $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_\nu$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
|\tilde{H}(x,0) - E| &\leq \left|\tilde{H}(x,0) - K^{(\nu-1)}(x,0)\right| + \\
&+ |K^{(\nu-1)}(x,0) - E| \leq \\
&\leq \sup_{|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_\nu} \left|\tilde{H}(x,0) - K^{(\nu-1)}(x,0)\right| = \\
&= \sup_{|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_\nu} \left|H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}(x,0) - H^{(\nu-1)} \circ \phi^{(\nu-1)}(x,0)\right| \leq \\
&\leq \tilde{c}_1 r_\nu^l + \tilde{c}_1 r_{\nu-1}^l \leq \\
&\leq \tilde{c}_1 r_\nu^l + 2^l \tilde{c}_1 r_\nu^l \leq \\
&\leq 2\tilde{c}_1 2^l r_\nu^\lambda r_\nu^m r_\nu^{2\tau+2} \leq \\
&\leq \left(\frac{\theta}{2}\right)^l 2^l r_\nu^m r_\nu^{2\tau+2} \leq \\
&\leq r_\nu^m (\theta r_\nu)^{2\tau+2}
\end{aligned}$$

come segue facilmente usando (4.38), (4.46) e (4.49).

Notiamo che sostituendo $\eta = 0$ nella seconda disuguaglianza in (4.44) ed usando la (4.47), troviamo che vale la seguente stima per $|\mathrm{Im}\, \xi| \leq \theta r_\nu$:[10]

$$\begin{aligned}
|u_\xi^{(\nu-1)}(\xi) - \mathbb{I}| &\leq \sum_{\mu=0}^{\nu-1} |u_\xi^{(\mu)}(\xi) - u_\xi^{(\mu-1)}(\xi)| \leq \\
&\leq \frac{\tilde{c}_2}{68M^3} \sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu^m = \frac{\tilde{c}_2}{68M^3} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{2^{\mu m}} = \\
&= \frac{\tilde{c}_2 \varepsilon^m}{68M^3(1-2^{-m})} \leq \tilde{c}_4 \varepsilon^m \leq 1 - \theta\,. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

[10] Come già sottolineato in precedenza, indicheremo $\phi^{(-1)} = \mathrm{id}$.

Da ciò otteniamo per $|\mathrm{Im}\,\xi| \leq \theta r_\nu$:

$$\begin{aligned}
\left|\left(u_\xi^{(\nu-1)}(\xi)\right)^{-1}\right| &= \left|\left((u_\xi^{(\nu-1)}(\xi)-\mathbb{I})+\mathbb{I}\right)^{-1}\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_\xi^{(\nu-1)}(\xi)-\mathbb{I}|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(1-\theta)^k = \\
&\leq \frac{1}{1-(1-\theta)} = \frac{1}{\theta}\,. \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

Quindi applicando la *chain rule* ed usando (4.38), (4.46) e (4.49) possiamo concludere la seguente stima nella striscia $\Sigma_{\theta r_\nu}$:

$$\begin{aligned}
&|\tilde{H}_y(x,0)-\omega^{(\nu)}| = \\
&= \left|\left(u_\xi^{(\nu-1)}(x)\right)^{-1}\left[H_y^{(\nu)}\circ\phi^{(\nu-1)}(x,0)-H_y^{(\nu-1)}\circ\phi^{(\nu-1)}(x,0)\right]\right| \leq \\
&\leq \theta^{-1}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-1}+\tilde{c}_1 r_{\nu-1}^{l-1}) \leq \\
&\leq \theta^{-1}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-1}+\tilde{c}_1 2^{l-1} r_\nu^{l-1}) \leq \\
&\leq 2\theta^{-1}\tilde{c}_1 2^{l-1} r_\nu^{l-1} = \\
&= 2\theta^{-1}\tilde{c}_1 2^{l-1} r_\nu^{\lambda} r_\nu^{m} r_\nu^{2\tau+1} = \\
&\leq 2^l\theta^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)^l r_\nu^m r_\nu^{2\tau+1} \leq \\
&\leq r_\nu^m(\theta r_\nu)^{\tau+1}
\end{aligned}$$

e questo dimostra la seconda disuguaglianza.

Infine:

$$\begin{aligned}
&|\tilde{H}_{yy}(z)-Q^{(\nu)}(z)| = \\
&= \left|\left(u_\xi^{(\nu-1)}(x)\right)^{-1}\left[H_{yy}^{(\nu)}\circ\phi^{(\nu-1)}(z)-\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-\ H_{yy}^{(\nu-1)}\circ\phi^{(\nu-1)}(z)\right]\left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(x)\right)^{-1}\right| \leq \\
&\leq \theta^{-2}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-2}+\tilde{c}_1 r_{\nu-1}^{l-2}) \leq \\
&\leq \theta^{-2}(\tilde{c}_1 r_\nu^{l-2}+\tilde{c}_1 2^{l-2} r_\nu^{l-2}) \leq \\
&\leq 2\theta^{-2}\tilde{c}_1 2^{l-2} r_\nu^{l-2} = \\
&\leq 2\theta^{-2}\tilde{c}_1 2^{l-2} r_\nu^{\lambda} r_\nu^{m} r_\nu^{2\tau} = \\
&\leq 2^{l-1}\theta^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^l r_\nu^m r_\nu^{2\tau} \leq \\
&\leq \frac{\tilde{c}_2 r_\nu^m}{8M}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato (3.42).
Questo completa la dimostrazione del Passo 2.

Passo 3

Dal Passo 2 e dalla (4.57) segue che la funzione hamiltoniana

$$\tilde{H} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu-1)}$$

soddisfa le ipotesi del teorema KAM isonergetico analitico (teorema 4.2.1), prendendo $r = \theta r_\nu$, $\delta = r_\nu^m$ e $Q = Q^{(\nu)} = K_{\eta\eta}^{(\nu-1)}$. Quindi esiste una trasformazione simplettica $z = \psi^{(\nu)}(\zeta)$ della forma (4.40), dalla striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ (dove $r_{\nu+1} = \theta^2 r_\nu$), nella striscia $\Sigma_{\theta r_\nu}$ e tale che $\psi^{(\nu)}(\xi,0) - (\xi,0)$ sia periodica di periodo 1 e la hamiltoniana trasformata

$$K^{(\nu)} = \tilde{H} \circ \psi^{(\nu)} = H^{(\nu)} \circ \phi^{(\nu)}$$

(dove $\phi^{(\nu)} = \phi^{(\nu-1)} \circ \psi^{(\nu)}$) soddisfi (4.41). Inoltre, $K^{(\nu)}$ e $\psi^{(\nu)}$ soddisfano le disuguaglianza in (4.42). Osserviamo che per costruzione la trasformazione

$$\phi^{(\nu)} = \phi^{(\nu-1)} \circ \psi^{(\nu)}$$

mappa la striscia $\Sigma_{r_{\nu+1}}$ nella striscia $\sigma_{r_{\nu-1},\rho}$.

Mostreremo ora qualcosa di più: faremo vedere che la trasformazione simplettica $z = \phi^{(\nu)}(\zeta)$ mappa la striscia $\Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ nella striscia $\sigma_{r_\nu,\rho}$ e che soddisfa (4.44) .

<u>Dimostrazione</u>: Usando la seconda disuguaglianza in (4.44) con ν sostituito da $\mu = 0, \ldots, \nu-1$ e procedendo come in (4.58) otteniamo la seguente stima per $(\xi,\eta) \in \Sigma_{\theta r_\nu}$:

$$\begin{aligned}
|\phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)| &\le |\phi_\zeta^{(-1)}(\zeta)| + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} |\phi_\zeta^{(\mu)}(\zeta) - \phi_\zeta^{(\mu-1)}(\zeta)| \le \\
&\le 1 + \frac{\tilde{c}_2}{68M^3} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} r_\mu^m \le \\
&\le 1 + \frac{\tilde{c}_2}{68M^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^m}{2^m}\right)^\mu \le \\
&\le 1 + \frac{\tilde{c}_2}{68M^3(1-2^{-m})} \varepsilon^m \le \\
&\le 1 + \tilde{c}_4 \varepsilon^m \le 1 + (1-\theta) \le 2\,;
\end{aligned} \tag{4.60}$$

da ciò segue - usando la (4.42) e Lagrange - che per $(\xi,\eta) \in \Sigma_{r_{\nu+1}}$:

$$\begin{aligned}
|\phi^{(\nu)}(\zeta) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)| &= |\phi^{(\nu-1)}(\psi^{(\nu)}(\zeta)) - \phi^{(\nu-1)}(\zeta)| \le \\
&\le |\phi_\zeta^{(\nu-1)}(\zeta)||\psi^{(\nu)}(\zeta) - \zeta| \le \\
&\le 2\frac{\tilde{c}_2(1-\theta)}{272} r_\nu^{m+1} = \\
&= \frac{\tilde{c}_2(1-\theta)}{136M^3} r_\nu^{m+1}\,.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato la prima disuguaglianza in (4.46) e la seconda segue semplicemente usando la stima di Cauchy (vedi proposizione 2.1.1 con $r = r_{\nu+1}$ e $\rho = \theta r_{\nu+1}$). Questa disuguaglianza implica, analogamente a quanto visto in (4.60), che $|\phi^{(\nu)}_\zeta(\zeta)| \leq 2$ per $\zeta \in \Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ e perciò $z = \phi^{(\nu)}(\zeta)$ soddisfa la seguente disuguaglianza per $\zeta \in \Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\, z| &\leq 2|\mathrm{Im}\,\zeta| = 2\sqrt{|\mathrm{Im}\,\xi|^2 + |\mathrm{Im}\,\eta|^2} \leq \\ &\leq 2r_{\nu+1} = r_\nu \,. \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo già visto che $|\mathrm{Re}\, y| \leq \rho$. Questo mostra che tale trasformazione mappa la striscia $\Sigma_{\theta r_{\nu+1}}$ nella striscia $\sigma_{r_\nu,\rho}$.

Al fine di stabilire l'ultima disuguaglianza in (4.44), utilizziamo la seguente identità (vedi (2.12)):

$$v^{(\nu)} \circ (u^{(\nu)})^{-1}(x) - v^{(\nu-1)} \circ (u^{(\nu-1)})^{-1}(x) = \left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(\xi)\right)^{-1} U_x^{(\nu)}(\xi)$$

per $x = u^{(\nu-1)}(\xi)$. Utilizzando la (4.58), otteniamo che se $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_{\nu+1}$ e $x = u^{(\nu-1)}(\xi)$, allora si ha che $|\mathrm{Im}\,\xi| \leq r_{\nu+1}$, in quanto la mappa

$$f(\xi) = x + \xi - u^{(\nu-1)}(\xi)$$

definisce una contrazione della striscia $|\mathrm{Im}\, x| \leq r_{\nu+1}$ in se stessa. Questo ci consente di applicare le disuguaglianze (4.42) e (4.59) ottenendo:

$$\begin{aligned} \left|\left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(\xi)\right)^{-1} U_x^{(\nu)}(\xi)\right| &= \left|\left(u_\xi^{(\nu-1)^T}(\xi)\right)^{-1}\right| \left|U_x^{(\nu)}(\xi)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta}\left(\theta \frac{\tilde{c}_2}{152M^3} r_\nu^{m+\tau+1}\right) = \\ &= \frac{\tilde{c}_2}{152M^3} r_\nu^{m+\tau+1} \,. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del Passo 3.

Conclusione dello schema induttivo

Con il Passo 3 abbiamo completato la costruzione dello schema induttivo; ci rimane da dimostrare la convergenza delle successioni $\{u^{(\nu)}(\xi)\}_\nu$ e $\{v^{(\nu)}(\xi)\}_\nu$ e le stime in (4.37). Osserviamo che le disuguaglianze in (4.44) implicano per $|\mathrm{Im}\,\xi| \leq r_{\nu+1}$ e $|\mathrm{Im}\, x| \leq \theta r_{\nu+1}$:

$$\begin{cases} |u^{(\nu)}(\xi) - u^{(\nu-1)}(\xi)| \leq 2^{m+1} \dfrac{\tilde{c}_2}{136M^3} r_{\nu+1}^{m+1} \\ |v^{(\nu)} \circ u^{(\nu)^{-1}}(x) - v^{(\nu-1)} \circ u^{(\nu-1)^{-1}}(x)| \leq \left(\dfrac{2}{\theta}\right)^{m+\tau+1} \dfrac{\tilde{c}_2}{152M^3} (\theta r_{\nu+1})^{m+\tau+1} \,. \end{cases} \tag{4.61}$$

In particolare queste stime rimangono valide per $\nu = 0$, semplicemente ponendo

$$u^{(-1)} = \xi \qquad \text{e} \qquad v^{(-1)}(\xi) = 0\,.$$

Concludendo, segue dal lemma 3.2.5 che le funzioni limite (la cui esistenza è garantita dalle stime in (4.61))

$$u(\xi) = \lim_{\nu\to\infty} u^{(\nu)}(\xi) \qquad v(\xi) = \lim_{\nu\to\infty} v^{(\nu)}(\xi)$$

soddisfano (4.37) con

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{c}_2\tilde{c}_3}{136M^3}\left(\frac{2}{\theta}\right)^{m+\tau+1}\,.$$

Le funzioni $x = u(\xi)$ e $y = v(\xi)$ soddisfano le condizioni di periodicità ed inoltre

$$\begin{cases} D_{(1+k)\omega}u = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\ \\ D_{(1+k)\omega}v = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases}$$

dove[11] $k = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1+k^{(\nu)})$ e con energia

$$H(u(\xi),\, v(\xi)) = E\,.$$

Cerchiamo di dare una stima della costante k relativa alla *frequenza perturbata*. Stimiamo in via preliminare la seguente sommatoria:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty}|k^{(\nu)}| &\le \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{2\tau+6}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}\left(\frac{1}{2^{m+\tau+1}}\right)^{\nu} = \\ &= 2^{2\tau+6}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}\frac{2^{-(m+\tau+1)}}{1-2^{-(m+\tau+1)}} \le \\ &\le 2^{2\tau+7}2^{-(m+\tau+1)}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1} = \\ &= 2^{\tau+6-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1} \end{aligned}$$

(osserviamo quindi che tale sommatoria è minore di 1, come segue facilmente dalle condizioni imposte su $\tilde{c}_2$ nel teorema 4.2.1).

[11] La convergenza della seguente produttoria è assicurata dalle condizioni che abbiamo sui $k^{(\nu)}$. Infatti:

$$|k^{(\nu)}| \le 2^{2\tau+6}\tilde{c}_2 r_\nu^{m+\tau+1} = 2^{2\tau+6}\frac{\tilde{c}_2}{2^{\nu(m+\tau+1)}}\varepsilon^{m+\tau+1}\,.$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
|k| &\le \left|\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+k^{(\nu)})-1\right| \le \\
&\le \left(\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+|k^{(\nu)}|)-1\right) \le \\
&\le \left(e^{\sum_{\nu=1}^{\infty}\log(1+|k^{(\nu)}|)}-1\right) \le \\
&\le \left(e^{\sum_{\nu=1}^{\infty}|k^{(\nu)}|}-1\right) \le \\
&\le 3\sum_{\nu=1}^{\infty}|k^{(\nu)}| \le \\
&\le 3\,2^{\tau+6-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1} \le \\
&\le 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}\,.
\end{aligned}
$$

E questo conclude la dimostrazione del Teorema.

□

Dal teorema appena dimostrato, possiamo dedurre il seguente corollario.

Corollario 4.3.2. (Teorema KAM isoenerg., caso differenziabile II) *Siano $n \ge 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \ge 1$, $E \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$, e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ,τ)-diofantino tale che $|\omega| \le M$. Sia inoltre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio aperto contenente $B_\rho(y_0)$.*
Sia $H(x,y) = h(y) + f(x,y)$ una hamiltoniana in $C^l(\mathbb{T}^n \times \Omega)$ tale che:

(i) $h'(y_0) = \omega\,,$

(ii) $h(y_0) = E\,,$

(iii) $|h|_{C^l} \le M\,,$

(iv) $\left|(A(y_0))^{-1}\right| \le M$, *dove*

$$
A(y) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y) & -\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}(y)\right)^T \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(y) & 0 \end{pmatrix}.
$$

Allora esistono delle costanti

$$
\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0
$$

in modo che, se per qualche $\varepsilon \le \varepsilon^*$

$$
|f|_{C^s} \le M\varepsilon^{l-s} \qquad \textit{per ogni } \ 0 \le s \le l\,,
$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + y_0 \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} D_{(1+k)\omega} u = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u, v + y_0) \\ \\ D_{(1+k)\omega} v = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u, v + y_0)\,, \end{cases}$$

dove $|k| \leq 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2 \varepsilon^{m+\tau+1}$ *(per un'opportuna costante* $\tilde{c}_2$*), tali che:*

i) $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono entrambe periodiche con periodo* 1*;*

ii) $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \circ u^{-1} + y_0 \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$ *, per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*;*

iii) $H(u(\xi), v(\xi) + y_0) = E$ *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$*.*

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{aligned} |u - \mathrm{id}\,|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+1-s} \qquad 0 < s \leq m+1 \\ |v \circ u^{-1}|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+\tau+1-s} \qquad 0 < s \leq m+\tau+1\,, \end{aligned}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$.

Capitolo 5

Tori parzialmente iperbolici (caso differenziabile)

5.1 Introduzione

Abbiamo visto nei capitoli precedenti l'eccezionalità e la novità dell'utilizzo delle tecniche KAM per la dimostrazione della sopravvivenza dei tori non risonanti di sistemi hamiltoniani, sia nel caso analitico che in quello differenziabile. In questo capitolo vogliamo spostare la nostra attenzione sul destino dei tori risonanti parzialmente iperbolici, che svolgono un ruolo di cruciale importanza nello studio della cosiddetta *diffusione di Arnol'd*. Questi particolari tori furono inizialmente studiati da Poincaré; fu Arnol'd in [5] a denominare tali tori *whiskered* (cioè *coi baffi*) e ad utilizzarli nel suo famoso esempio di un fenomeno di diffusione, che oggi porta il suo nome. Vediamo di dare una definizione rigorosa di tali particolari tori invarianti per il nostro sistema.

Definizione 5.1.1. Sia $(\mathbb{V}, \omega)$ una varietà simplettica $2n$-dimensionale e consideriamo una hamiltoniana H. Indichiamo con

$$\Phi_t : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

il flusso associato al nostro sistema. Sia $N \subset \mathbb{V}$ un toro invariante k-dimensionale (con $k < n$). N è detto *parzialmente iperbolico* se esistono due sottofibrati l-dimensionali (con $l = n - k$) $E^{\pm}$ del fibrato $T_N\mathbb{V}$, tali che:

1. $E^{\pm}$ sono invarianti per l'azione del flusso linearizzato:

$$D\Phi_t(p)E^{\pm}_p = E^{\pm}_{\Phi_t(p)}\,, \qquad p \in N,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

2. Il flusso linearizzato è *attrattivo* su E^- ed *espansivo* su E^+; cioè esistono delle opportune costanti positive C e λ, tali che:

$$\begin{aligned} \left| D\Phi_t(p)_{|_{E_p^-}} \right| &\leq Ce^{-\lambda t}, \qquad p \in N,\ t \geq 0, \\ \left| D\Phi_{-t}(p)_{|_{E_p^+}} \right| &\leq Ce^{-\lambda t}, \qquad p \in N,\ t \geq 0 \end{aligned}$$

(con $|\cdot|$ intendiamo una qualsiasi metrica di Riemann su $\mathbb{V}$).

Risultati di tipo KAM relativi alla sopravvivenza dei tori parzialmente iperbolici, per effetto di piccole perturbazioni del sistema, sono stati ottenuti e ampiamente discussi in [35] e [71], dove vengono analizzate hamiltoniane analitiche. In questo nostro lavoro vogliamo invece soffermare la nostra attenzione su hamiltoniane sufficientemente differenziabili, ma non necessariamente analitiche. Il metodo che seguiremo consisterà nel combinare una versione del teorema KAM (caso differenziabile), con degli schemi propri della teoria delle *varietà normalmente iperboliche*, sviluppata da Fenichel (cfr. [28] e [69]).

5.2 Persistenza dei tori parzialmente iperbolici

Sia $r \in \mathbb{N}$ e consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ della forma:

$$H_0(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) \tag{5.1}$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k \end{aligned}$$

con U aperto di $\mathbb{R}^k$.

Assumiamo, inoltre, che valgano le seguenti proprietà (le proprietà (P2a) e (P2b) sono in alternativa tra loro):

(P1) A è una matrice definita positiva ed indichiamone i relativi autovalori nel seguente modo:

$$0 < \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_l\,;$$

(P2a) condizione di *non degenerazione standard*:

$$\det\left[\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)\right] \neq 0\,.$$

(P2b) condizione di *non degenerazione isoenergetica*:

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I) & -\omega(I)^T \\ \omega(I) & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

dove $\omega(I) \equiv \dfrac{\partial h}{\partial I}(I)$.

Consideriamo quindi il sistema hamiltoniano associato:

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x \\ \dot{y} = -Ay \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) \equiv \omega(I) \end{cases} \tag{5.2}$$

dove $\omega(I) = (\omega_1(I),\, \omega_2(I),\, \ldots\, , \omega_k(I))\,.$

Si osserva immediatamente che tale sistema ammette una varietà invariante $2k$-dimensionale, data da:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, I, \varphi) : \; x = y = 0 \, , \; I \in U \, , \; \varphi \in \mathbb{T}^k\} \, .$$

Infatti, il campo vettoriale (5.2) ristretto alla varietà $\mathbb{M}$ è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega(I) \, . \end{cases} \tag{5.3}$$

In realtà $\mathbb{M}$ consiste in una famiglia k-parametrica di tori k-dimensionali, cioè:

$$\mathbb{M} = \bigcup_{I \in U} \mathbb{T}(I) \, ,$$

dove

$$\mathbb{T}(I) \equiv \{(0, 0, I, \varphi) \, , \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\}.$$

Inoltre, dalla proprietà $(P1)$ si ottiene che $\mathbb{M}$ possiede delle varietà stabili e instabili $(2k+l)$-dimensionali, date rispettivamente da:

$$\begin{aligned} W^s(\mathbb{M}) \;\; &\equiv \;\; \{(0, y, I, \varphi) : \; y \in \mathbb{R}^l, \; I \in \mathbb{R}^k, \; \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{x = 0\} \\ W^u(\mathbb{M}) \;\; &\equiv \;\; \{(x, 0, I, \varphi) : \; x \in \mathbb{R}^l, \; I \in \mathbb{R}^k, \; \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{y = 0\} \, . \end{aligned}$$

Più precisamente, $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ sono anch'esse delle varietà invarianti (come si vede facilmente da (5.2)) contenenti $\mathbb{M}$ (in particolare $W^s(\mathbb{M}) \cap W^u(\mathbb{M}) = \mathbb{M}$) e costituite da traiettorie che le si avvicinano asintoticamente per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$ rispettivamente. Ancora più precisamente, a ciascun toro k-dimensionale in $\mathbb{M}$

$$\mathbb{T}(I_0) = \{(0, 0, I_0, \varphi) \, , \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\},$$

possiamo associare delle varietà $(k+l)$-dimensionali, dette rispettivamente *baffi stabili* e *baffi instabili*:[1]

$$\begin{aligned} W^s(I_0) \;\; &\equiv \;\; \{(0, y, I_0, \varphi) : \; y \in \mathbb{R}^l, \; I \in \mathbb{R}^k, \; \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{x = 0, \; I = I_0\} \\ W^u(I_0) \;\; &\equiv \;\; \{(x, 0, I_0, \varphi) : \; x \in \mathbb{R}^l, \; I \in \mathbb{R}^k, \; \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{y = 0, \; I = I_0\} \, , \end{aligned}$$

che costituiscono una foliazione di $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ e sono tali che:

$$W^s(I_0) \cap W^u(I_0) = \mathbb{T}(I_0) \, .$$

Quello che vorremmo mostrare è il seguente risultato (che in seguito enunceremo in una formulazione più quantitativa):

[1] Fu Arnol'd a denominarle in tale maniera molto suggestiva.

Teorema. *Sia $I_0 \in U$ tale che $\omega(I_0)$ sia un vettore (γ,τ)-diofantino. Allora, sotto opportune ipotesi di non degenerazione per h (vedi (P2a) o (P2b)), il toro invariante $\mathbb{T}(I_0)$ per la hamiltoniana (5.1), con r sufficientemente grande, sopravvive insieme ai suoi baffi stabili e instabili, ad una perturbazione sufficientemente piccola e regolare del sistema.*

Quello che mostreremo è che le varietà $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ sopravvivono localmente a delle perturbazioni sufficientemente piccole del nostro sistema hamiltoniano (subendo una leggera deformazione dipendente dalla taglia della perturbazione) e dedurremo da ciò la sopravvivenza locale della varietà $\mathbb{M}$.

Consideriamo quindi la seguente perturbazione hamiltoniana del nostro sistema:

$$\begin{aligned} H(x,y,I,\varphi) &= H_0(x,y,I,\varphi) + \varepsilon H_1(x,y,I,\varphi) = \\ &= x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x,y,I,\varphi) \end{aligned}$$

con

$$H_1 \in C^r(B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_2}(I_0) \times \mathbb{T}^k)$$

tale che $B_{\rho_2}(I_0) \subset U$.

Il sistema hamiltoniano associato sarà:

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial y}(x,y,I,\varphi) \\ \dot{y} = -Ay - \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial x}(x,y,I,\varphi) \\ \dot{I} = -\varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi}(x,y,I,\varphi) \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) + \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial I}(x,y,I,\varphi)\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

Nei prossimi paragrafi mostreremo dettagliatamente la persistenza locale di $W^u(\mathbb{M})$, cioè l'esistenza di una varietà che denoteremo con $W^{u,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$, che sia C^{r-1}-diffeomorfa a $W^u(\mathbb{M})$; analogamente si dimostrerà la persistenza (sempre locale) della varietà $W^s(\mathbb{M})$, cioè di una varietà $W^{s,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$, C^{r-1} - diffeomorfa a $W^s(\mathbb{M})$ (osserviamo infatti tale varietà non è altri che la varietà instabile del sistema ottenuto invertendo il verso dello scorrere del tempo).

5.2.1 Conservazione locale della varietà $W^u(\mathbb{M})$

Preliminari

Cominciamo col considerare il seguente intorno della nostra varietà:

$$N_\lambda \equiv \{(x,y,I,\varphi):\ |y| < \lambda\}$$

dove il parametro $0 < \lambda < \dfrac{\rho_1}{8}$ è un parametro che ci permette di controllare lo *spessore di tale intorno*. Definiamo inoltre i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{M}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &\equiv B_{\frac{\rho_1}{4}}(0) \times \{0\} \times B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k \\
\mathcal{D}_2 &\equiv B_{\frac{\rho_1}{2}}(0) \times \{0\} \times B_{\frac{\rho_2}{2}}(I_0) \times \mathbb{T}^k \\
\mathcal{D}_3 &\equiv B_{\frac{3}{4}\rho_1}(0) \times \{0\} \times B_{\frac{3}{4}\rho_2}(I_0) \times \mathbb{T}^k \,.
\end{aligned}
$$

Indichiamo con Φ_t^0 il flusso associato al sistema imperturbato. Vogliamo mostrare il seguente lemma:

Lemma 5.2.1. *Per ogni $0 < \lambda < \dfrac{\rho_1}{8}$, esiste un $T > 0$ tale che:*

$$\Phi_T^0 : N_\lambda|_{\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)} \longrightarrow N_{\frac{\lambda}{2}}|_{\mathcal{D}_3} \,.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda le coordinate x, I e φ non abbiamo alcun problema. Ci resta da studiare l'evoluzione delle coordinate y. Osserviamo che per ogni $T > 0$:

$$y(T) = e^{-AT} y.$$

Quindi, ricordando la proprietà $(P1)$, abbiamo:

$$|y(T)| \le e^{-\sigma_1 T}|y|$$

e quindi è sufficiente richiedere che

$$
\begin{aligned}
e^{-\sigma_1 T} < \frac{1}{2} \qquad &\Longrightarrow \qquad e^{\sigma_1 T} > 2 \\
&\Longrightarrow \qquad T > \frac{\log 2}{\sigma_1} \,. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

$\square$

Denoteremo d'ora in poi il flusso al tempo T nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\Phi_T^0 : N_\lambda|_{\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)} &\longrightarrow N_{\frac{\lambda}{2}}|_{\mathcal{D}_3} \\
(x, y, I, \varphi) &\longmapsto (f_1^0(x, y, I, \varphi), g^0(x, y, I, \varphi), f_2^0(x, y, I, \varphi), f_3^0(x, y, I, \varphi))
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
f_1^0(x, y, I, \varphi) &= e^{A^T T} x \\
g^0(x, y, I, \varphi) &= e^{-AT} y \\
f_2^0(x, y, I, \varphi) &= I \\
f_3^0(x, y, I, \varphi) &= \omega(I) T + \varphi \,.
\end{aligned}
$$

Per semplificare la notazione, indicheremo:

$$f^0(x, y, I, \varphi) = (f_1^0(x, y, I, \varphi), f_2^0(x, y, I, \varphi), f_3^0(x, y, I, \varphi)) \,,$$

ed inoltre denoteremo nel seguente modo gli operatori di differenziazione parziale:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{(x,I,\varphi)} \\ D_2 &= D_y\,. \end{aligned}$$

E' abbastanza facile verificare che l'invarianza di $W^u(\mathbb{M})$ implica che:

$$g^0(x,0,I,\varphi) = 0\,.$$

Quindi l'espressione locale del flusso al tempo T, ristretto a $\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)$, è data da:

$$\Phi^0(x,0,I,\varphi) = (f_1^0(x,0,I,\varphi), 0, f_2^0(x,0,I,\varphi), f_3^0(x,0,I,\varphi))\,.$$

Inoltre, valgono le seguenti stime:

Lemma 5.2.2. *Esiste un $T > 0$ tale che:*

1. *per ogni $(x,0,I,\varphi) \in \Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)$ e per ogni $0 \le k \le r-1$ si ha:*

$$|(D_1 f^0(x,0,I,\varphi))^{-1}|^k |D_2 g^0(x,0,I,\varphi)| < \frac{1}{4}\,;$$

2. *per ogni $(x,y,I,\varphi) \in N_\lambda|_{\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)}$ si ha:*

$$|g^0(x,y,I,\varphi)| < \frac{\lambda}{2}\,.$$

Dimostrazione. 1. Osserviamo che il flusso linearizzato è:

$$D\Phi^0_T = \begin{pmatrix} e^{A^T T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-AT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_k & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)T & \mathbb{I}_k \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Quindi:

$$D_1 f^0(x,0,I,\varphi) = \begin{pmatrix} e^{A^T T} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_k & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)T & \mathbb{I}_k \end{pmatrix},$$

e di conseguenza:

$$(D_1 f^0(x,0,I,\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-A^T T} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_k & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)T & \mathbb{I}_k \end{pmatrix}.$$

Passando alle norme:

$$|(D_1 f^0(x,0,I,\varphi))^{-1}| \leq 1 + \left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right| T \leq 1 + MT$$

dove

$$M \geq \left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right| .$$

D'altro canto

$$|D_2 g^0(x,0,I,\varphi)| = |e^{-AT}| \leq e^{-\sigma_1 T} .$$

Cerchiamo di trovare delle condizioni su T affinchè valga la condizione sopra.

$$\begin{aligned}(1+MT)^{r-1}e^{-\sigma_1 T} < \frac{1}{4} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sigma_1 T - (r-1)\log(1+MT) > \log 4 \\ \Longleftrightarrow \quad &\frac{\sigma_1}{M} MT - (r-1)\log(1+MT) > \log 4 . \qquad (5.7)\end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni $\beta > 0$, vale la seguente disuguaglianza:

$$\log(1+x) \leq \beta x \qquad \forall\, x > \frac{2}{\beta^2} .$$

Applicandola direttamente a (5.7) con $\beta = \dfrac{\sigma_1}{2M(r-1)}$, otteniamo che per

$$T > \max\left\{\frac{8M(r-1)^2}{\sigma_1^2}, \frac{2\log 4}{\sigma_1}\right\}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{M} MT - (r-1)\log(1+MT) \quad &\geq \quad \frac{\sigma_1}{2M} MT > \\ &> \quad \log 4 .\end{aligned}$$

In conclusione (tenendo in considerazione (5.5)), dobbiamo richiedere che

$$T > \max\left\{\frac{8M(r-1)^2}{\sigma_1^2}, \frac{2\log 4}{\sigma_1}\right\} . \qquad (5.8)$$

2. E' semplicemente una riscrittura in coordinate locali del lemma 5.2.1

□

Consideriamo ora il sistema hamiltoniano perturbato ed indichiamo con Φ_t il relativo flusso. D'ora in poi indicheremo con l'apice 0 le quantità relative al sistema imperturbato e senza apice quelle relative al sistema perturbato. Cominciamo col dimostrare le seguenti stime, che ci permetteranno di confrontare il comportamento del sistema perturbato con quello del sistema imperturbato.

A tal fine useremo la seguente disuguaglianza detta *disuguaglianza di Gronwall*, per la cui dimostrazione rimandiamo ad un qualsiasi testo di analisi matematica (ad esempio [16]).

Lemma 5.2.3. (Gronwall)
Siano $\mathcal{I}$ un intervallo, δ, $\alpha \in (0, +\infty)$ e $g \in C(\mathcal{I})$ una funzione continua e positiva tale che per un qualche $t_0 \in \mathcal{I}$ si abbia

$$g(t) \leq \delta + \alpha \left| \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \right| \qquad \forall\, t \in \mathcal{I}\,.$$

Allora, per ogni $t \in \mathcal{I}$ si ha

$$g(t) \leq \delta e^{\alpha |t - t_0|}\,.$$

Applichiamola ora ai nostri scopi per ottenere le stime sopra accennate.

Proposizione 5.2.4. *Siano $\Phi_t^0(\cdot)$ e $\Phi_t(\cdot)$ rispettivamente il flusso imperturbato e il flusso perturbato. Indichiamo con*

$$\begin{aligned} M &\geq \max\left\{ |A|, \left| \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} \right| \right\}\,, \\ M_1 &\geq |DH_1|\,, \\ M_2 &\geq |D^2 H_1|\,, \\ M_3 &\geq \left| \frac{\partial^3 h}{\partial I^3} \right|\,. \end{aligned}$$

Allora, per ogni $|t| \leq T$ abbiamo:

$$\begin{aligned} |\Phi_t^0(x) - \Phi_t(x)| &\leq \varepsilon M_1 T e^{MT}\,, \\ |D\Phi_t^0(x) - D\Phi_t(x)| &\leq \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare la prima di queste disuguaglianze. L'idea è quella di scriverci tali flussi in forma integrale:

$$\begin{aligned} &\Phi_t^0(x,y,I,\varphi) - \Phi_t(x,y,I,\varphi) = \\ &\quad = \Phi_0^0(x,y,I,\varphi) - \Phi_0(x,y,I,\varphi) + \\ &\quad + \int_0^t \left[F^0(\Phi_s^0(x,y,I,\varphi)) - F(\Phi_s(x,y,I,\varphi)) \right] ds = \\ &\quad = \int_0^t \left[F^0(\Phi_s^0(x,y,I,\varphi)) - F^0(\Phi_s(x,y,I,\varphi)) \right] ds + \\ &\quad + \int_0^t \left[F^0(\Phi_s(x,y,I,\varphi)) - F(\Phi_s(x,y,I,\varphi)) \right] ds \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con F^0 e F i relativi campi vettoriali hamiltoniani, associati ad H_0 e H; cioè:

$$F^0(x,y,I,\varphi) = \begin{pmatrix} A^T x \\ -Ay \\ 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial I} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(x,y,I,\varphi) = \begin{pmatrix} A^T x + \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial y}(x,y,I,\varphi) \\ -Ay - \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial x}(x,y,I,\varphi) \\ -\varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi}(x,y,I,\varphi) \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) + \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial I}(x,y,I,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Passando alle norme otteniamo:

$$\begin{aligned} &|\Phi_t^0(x,y,I,\varphi) - \Phi_t(x,y,I,\varphi)| \le \\ &\quad \le |DF^0| \int_0^T |\Phi_s^0(x,y,I,\varphi) - \Phi_s(x,y,I,\varphi)|\, ds + \varepsilon |DH_1| T \le \\ &\quad \le \varepsilon M_1 T + M \int_0^T |\Phi_s^0(x,y,I,\varphi) - \Phi_s(x,y,I,\varphi)|\, ds \end{aligned}$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Gronwall:

$$|\Phi_t^0(x,y,I,\varphi) - \Phi_t(x,y,I,\varphi)| \le \varepsilon M_1 T e^{MT}\,.$$

Per ottenere la seconda disuguaglianza relativa al flusso linearizzato, procediamo in maniera analoga:

$$\begin{aligned} &D\Phi_t^0(x,y,I,\varphi) - D\Phi_t(x,y,I,\varphi) = \\ &\quad = D\Phi_0^0(x,y,I,\varphi) - D\Phi_0(x,y,I,\varphi) + \\ &\qquad + \int_0^t \left[DF^0(D\Phi_s^0(x,y,I,\varphi)) - DF(D\Phi_s(x,y,I,\varphi)) \right] ds = \\ &\quad = \int_0^t \left[DF^0(D\Phi_s^0(x,y,I,\varphi)) - DF^0(D\Phi_s(x,y,I,\varphi)) \right] ds + \\ &\qquad + \int_0^t \left[DF^0(D\Phi_s(x,y,I,\varphi)) - DF(D\Phi_s(x,y,I,\varphi)) \right] ds \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con DF^0 e DF i relativi campi vettoriali hamiltoniani linearizzati associati ad H_0 e H.

Passando alle norme otteniamo:

$$\begin{aligned} &|D\Phi_t^0(x,y,I,\varphi) - D\Phi_t(x,y,I,\varphi)| \le \\ &\quad \le |D^2 F_0| \int_0^T |D\Phi_s^0(x,y,I,\varphi) - D\Phi_s(x,y,I,\varphi)|\, ds + \varepsilon |D^2 H_1| T \le \\ &\quad \le \varepsilon M_2 T + M_3 \int_0^T |D\Phi_s^0(x,y,I,\varphi) - D\Phi_s(x,y,I,\varphi)|\, ds \end{aligned}$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Gronwall:

$$|D\Phi_t^0(x,y,I,\varphi) - D\Phi_t(x,y,I,\varphi)| \le \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,.$$

$\square$

Corollario 5.2.5. *Per ogni* $0 < \lambda < \dfrac{\rho_1}{8}$ *esiste un* ε *sufficientemente piccolo tale che:*

$$\Phi_T\left(N_{\lambda|_{\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)}}\right) \subset N_{\lambda|_{\mathcal{D}_3}}\,.$$

Dimostrazione. Questo risultato segue immediatamente dal lemma 5.2.1 e dalla proposizione 5.2.4. Denotiamo con $y(t)$ l'evoluzione delle coordinate y rispetto all'azione del flusso del sistema perturbato e con $y^0(t)$ l'evoluzione rispetto al flusso imperturbato. Affinché sia soddisfatta la condizione sopra, si dovrà avere:

$$|y(T)| \quad\leq\quad |y(T)-y^0(T)|+|y^0(T)| \leq \varepsilon M_1 T e^{MT} + \frac{\lambda}{2}$$

e di conseguenza la condizione da richiedere sarà:

$$\varepsilon M_1 T e^{MT} < \frac{\lambda}{2}\,.$$

Dobbiamo ripetere un ragionamento analogo anche per le coordinate x ed I:

$$\begin{aligned} |x(T)| \quad &\leq \quad |x(T)-x^0(T)|+|x^0(T)| \leq \varepsilon M_1 T e^{MT} + \frac{\rho_1}{2} \\ \Longrightarrow \quad &\qquad \varepsilon M_1 T e^{MT} < \frac{\rho_1}{4}\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |I(T)-I_0| \quad &\leq \quad |I(T)-I^0(T)|+|I^0(T)-I_0| \leq \varepsilon M_1 T e^{MT} + \frac{\rho_2}{2} \\ \Longrightarrow \quad &\qquad \varepsilon M_1 T e^{MT} < \frac{\rho_2}{4}\,. \end{aligned}$$

Mettendo insieme le tre condizioni trovate e ricordando che $\lambda < \rho_1$, otteniamo:

$$4\varepsilon M_1 T e^{MT} < \min\{\rho_2, \lambda\}\,. \tag{5.9}$$

□

Anche per il flusso perturbato (considerato al tempo T) possiamo introdurre una rappresentazione in coordinate locali, data da:

$$\begin{aligned} \Phi_T : N_{\lambda|_{\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)}} \quad &\longrightarrow \quad N_{\lambda|_{\mathcal{D}_3}} \\ (x,y,I,\varphi) \quad &\longmapsto \quad (f_1(x,y,I,\varphi), g(x,y,I,\varphi), f_2(x,y,I,\varphi), f_3(x,y,I,\varphi)) \end{aligned}$$

e analogamente a quanto già fatto, abbrevieremo la notazione indicando

$$f(x,y,I,\varphi) = (f_1(x,y,I,\varphi), f_2(x,y,I,\varphi), f_3(x,y,I,\varphi))\,.$$

Vale inoltre il seguente lemma:

Lemma 5.2.6. *Sia* $\eta > 0$ *fissato. Allora per* ε *e* λ *sufficientemente piccoli, valgono le seguenti stime per* $(x,y,I,\varphi) \in N_{\lambda|_{\Phi^0_{-T}(\mathcal{D}_2)}}$ *:*

1. per ogni $0 \leq k \leq r-1$

$$|(D_1 f(x,y,I,\varphi))^{-1}|^k |D_2 g(x,y,I,\varphi)| < \frac{1}{2}\,;$$

2.

$$|g(x,y,I,\varphi)| < \lambda\,;$$

3.

$$|D_1 g(x,y,I,\varphi)| < \eta\,.$$

Inoltre esiste una costante Q *che limita dall'alto le norme delle derivate parziali di* f^0, g^0, f, g *e di* $(D_1 f)^{-1}$ *sull'insieme* N_λ.

Dimostrazione. 1. Usando la proposizione 5.2.4 otteniamo:

$$|D_2 g^0(x,y,I,\varphi)| \quad \leq \quad |D_2 g^0(x,y,I,\varphi)| + \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}$$

Inoltre, imponendo la condizione

$$\begin{aligned}
&|(D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}||D_1 f(x,y,I,\varphi) - D_1 f^0(x,y,I,\varphi)| \leq \\
&\leq\ e^{MT}\varepsilon M_2 T e^{M_3 T} = \\
&=\ \varepsilon M_2 T e^{(M_3+M)T} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ricaviamo la seguente stima:

$$\begin{aligned}
&|(D_1 f(x,y,I,\varphi))^{-1}| = \\
&=\ |(D_1 f(x,y,I,\varphi) - D_1 f^0(x,y,I,\varphi) + D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}| \leq \\
&\leq\ |(D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}|(1 + 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+M)T}) \leq \\
&\leq\ |(D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}| + 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T}
\end{aligned}$$

e quindi, per $0 \leq k \leq r$:

$$\begin{aligned}
&|(D_1 f(x,y,I,\varphi))^{-1}|^k |D_2 g(x,y,I,\varphi)| \leq \\
&\qquad \leq \left(|(D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}| + 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T}\right)^k \cdot \\
&\qquad\quad \cdot \left(|D_2 g^0(x,y,I,\varphi)| + \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\right)\,.
\end{aligned}$$

Per semplificare la notazione indichiamo:

$$\begin{aligned}
a &\equiv |(D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}|\,, \\
b &\equiv |D_2 g^0(x,y,I,\varphi)| = |e^{-AT}|\,, \\
\xi &\equiv 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T}\,.
\end{aligned}$$

Con queste semplificazioni, usando il lemma 5.2.2, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&|(D_1 f(x,y,I,\varphi))^{-1}|^k |D_2 g(x,y,I,\varphi)| \le \\
&\quad \le (a+\xi)^k (b+\xi) = \\
&\quad = \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} a^j \xi^{k-j} \right) (b+\xi) = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} (a^j b) \xi^{k-j} + \xi \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} a^j \xi^{k-j} \le \\
&\quad \le \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \xi^{k-j} + \xi \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{1}{4b} \xi^{k-j} \le \\
&\quad \le \frac{1}{4}(1+\xi)^k + \frac{\xi}{4b}(1+\xi)^k = \\
&\quad \le \frac{1}{4}(1+\xi)^k (1+\frac{\xi}{b}) \le \\
&\quad \le \frac{1}{4} e^{k \log(1+\xi) + \log(1+\frac{\xi}{b})} \le \\
&\quad \le \frac{1}{4} e^{(r-1)\xi + \frac{\xi}{b}} \le \\
&\quad \le \frac{1}{4} e^{((r-1)+\frac{1}{b})\xi} .
\end{aligned}
$$

Quindi dovremmo richiedere la seguente condizione:

$$
e^{((r-1)+\frac{1}{b})\xi} \le 2 \quad \Longrightarrow \quad \left((r-1) + \frac{1}{b} \right) \xi \le \log 2
$$

che è soddisfatta, ad esempio, imponendo

$$
\begin{aligned}
&\left((r-1) + \frac{1}{b} \right) \xi \le \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 4((r-1) + |e^{AT}|) \varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T} < 1 \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad 4((r-1) + e^{\sigma_l T}) \varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T} < 1 \, . \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

2. Questa proprietà è una riscrittura in coordinate locali del corollario 5.2.5.

3. Usando la proposizione 5.2.4 e ricordando l'espressione del flusso non perturbato:

$$
\begin{aligned}
&|D_1 g(x,y,I,\varphi)| = \\
&\quad = |D_1 g(x,y,I,\varphi) - D_1 g^0(x,y,I,\varphi) + D_1 g^0(x,y,I,\varphi)| \le \\
&\quad \le |D_1 g(x,y,I,\varphi) - D_1 g^0(x,y,I,\varphi)| + \\
&\qquad + |D_1 g^0(x,y,I,\varphi)| \le \\
&\quad \le \varepsilon M_2 T e^{M_3 T} + |e^{-AT} y| \le \\
&\quad \le \varepsilon M_2 T e^{M_3 T} + e^{-\sigma_1 T} \lambda \, ;
\end{aligned}
$$

quindi la condizione da richiedere sarà:

$$\varepsilon M_2 T e^{M_3 T} + e^{-\sigma_1 T}\lambda < \eta\,. \tag{5.11}$$

Per quando riguarda l'ultima parte del lemma, basta osservare che:

$$\begin{aligned}
|D_1 f^0(x,y,I,\varphi)| &\leq \max\left\{e^{\sigma_l T},\, 1+MT\right\} \leq e^{MT}\,,\\
|D_2 f^0(x,y,I,\varphi)| &= 0\,,\\
|D_1 g^0(x,y,I,\varphi)| &= 0\,,\\
|D_2 g^0(x,y,I,\varphi)| &\leq \eta\,,\\
|(D_1 f^0(x,y,I,\varphi))^{-1}| &\leq \max\left\{|e^{-AT}|,\, 1+MT\right\} = 1+MT \leq e^{MT}
\end{aligned}$$

(abbiamo usato che $|A| = \sigma_l \leq M$). Ora, usando la proposizione 5.2.4 otteniamo:

$$\begin{aligned}
|D_1 f(x,y,I,\varphi)| &\leq e^{MT} + \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,,\\
|D_2 f(x,y,I,\varphi)| &\leq \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,,\\
|D_1 g(x,y,I,\varphi)| &\leq \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,,\\
|D_2 g(x,y,I,\varphi)| &\leq \eta + \varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,,\\
|(D_1 f(x,y,I,\varphi))^{-1}| &\leq e^{MT} + 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T}\,.
\end{aligned}$$

Quindi è sufficiente prendere

$$Q = e^{MT} + 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T} \tag{5.12}$$

con l'ulteriore condizione (tra l'altro banale, visto che stiamo pensando ad η come ad un parametro sufficientemente piccolo) che $\eta < e^{MT}$. □

Dimostrazione geometrica della conservazione locale di $W^u(\mathbb{M})$

Consideriamo ora lo *spazio delle sezioni di* $N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}}$ che denoteremo con S. In sostanza, ogni $u \in S$ altri non è che un'applicazione

$$\begin{aligned}
u : B_{\frac{\rho_1}{4}}(0) \times B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^l\\
(x, I, \varphi) &\longmapsto u(x,I,\varphi)
\end{aligned}$$

tale che

$$(x, u(x,I,\varphi), I, \varphi) \in N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}} \qquad \text{per ogni } \ (x,0,I,\varphi) \in \mathcal{D}_1\,,$$

quindi la possiamo vedere come un'applicazione da $\mathcal{D}_1 \subset W^u(\mathbb{M})$ in un suo intorno, considerando la naturale inclusione di $W^u(\mathbb{M})$ in $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^k$; per tale motivo spesso vedremo tale sezione direttamente come un'applicazione da

$\mathcal{D}_1$, evitando eccessi di notazione. Osserviamo inoltre che la sua immagine in $\mathbb{R}^{2n-k} \times \mathbb{T}^k$ è una varietà avente la stessa dimensione di $W^u(\mathbb{M})$.

Definiamo, qualora esista finito, la costante di Lipschitz associata ad u, come

$$\mathrm{Lip}\, u \equiv \sup_{\substack{(x,I,\varphi)\neq(x',I',\varphi') \\ (x,I,\varphi),\,(x',I',\varphi')\in\mathcal{D}_1}} \frac{|u(x,I,\varphi)-u(x',I',\varphi')|}{|(x,I,\varphi)-(x',I',\varphi')|}\,,$$

e denotiamo lo spazio delle sezioni con costante di Lipschitz δ

$$S_\delta \equiv \{u \in S :\ \mathrm{Lip}\, u \leq \delta\}\,.$$

L'immagine in $\mathbb{R}^{2n-k} \times \mathbb{T}^k$ di ognuna di queste $u \in S_\delta$ è una varietà lipschitziana avente la stessa dimensione di $W^u(\mathbb{M})$. Notiamo che se $\delta = 0$, allora u è una porzione di iperpiano $(2k+l)$-dimensionale parallelo all'iperpiano delle (x, I, φ).

Arriviamo ora alla parte principale della nostra costruzione, che ci permetterà di dimostrare la sopravvivenza della nostra varietà. Il metodo che useremo è un metodo puramente geometrico simile a quello sviluppato da Hadamard per provare l'esistenza delle varietà stabile e instabile associate ad un punto fisso di un diffeomorfismo. Nel nostro caso tale varietà verrà costruita come *grafico* sul sottospazio definito da $W^u(\mathbb{M})$.

Vogliamo definire quindi la *trasformazione grafico*: questa mapperà S_δ in S_δ e verrà costruita a partire dalla dinamica del nostro sistema, in modo che i punti fissi di questa mappa corrispondano a varietà invarianti (in un senso che spiegheremo meglio in seguito) per il sistema perturbato. Per tale costruzione avremo bisogno del seguente risultato che ci permetterà di definire la trasformazione grafico.

Proposizione 5.2.7. *Sia $i(x) = x$ la mappa inclusione di $\mathcal{D}_2$ in $\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k$. Allora esiste un intorno $\mathcal{I}$ di i nello spazio delle funzioni lipschitziane da $\mathcal{D}_2$ in $\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k$, con la topologia indotta dalla norma Lipschitz, tale che ogni $\chi \in \mathcal{I}$:*

1. *χ è una mappa iniettiva;*
2. *$\overline{\mathcal{D}_1} \subset \chi(\mathcal{D}_2) \subset \overline{\chi(\mathcal{D}_2)} \subset \mathcal{D}_3$.*

Dimostrazione. Denotiamo con $Lip(\mathcal{D}_2)$ lo spazio delle funzioni lipschitziane da D_2 in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k$, dotato della norma:

$$|f|_{Lip} \equiv \sup_{p\in\mathcal{D}_2} |f(p)| + \sup_{p\neq p'} \frac{|f(p)-f(p')|}{|p-p'|}\,.$$

Consideriamo una sfera di raggio β intorno all'inclusione i:

$$B_\beta(i) \equiv \{f \in\ Lip(\mathcal{D}_2) :\quad |f - i|_{Lip} < \beta\,\}\,.$$

Troviamo ora delle condizioni su β in modo che valgano le proprietà richieste.

1. Supponiamo che p, $p' \in \mathcal{D}_2$, con $p \neq p'$. Allora, usando il fatto che
$$\chi \in B_\beta(i)$$
possiamo concludere che la funzione $\chi - i$ ha costante di Lipschitz minore di β. Quindi, richiedendo semplicemente che $\beta < 1$, otteniamo:
$$\begin{aligned} |\chi(p) - \chi(p')| &\geq |i(p) - i(p')| - |[\chi(p) - i(p)] - [\chi(p') - i(p')]| \geq \\ &\geq (1-\beta)|p - p'| > 0 \end{aligned}$$
e quindi abbiamo mostrato l'iniettività.

2. Mostriamo ora che
$$\chi(\mathcal{D}_2) \subset U$$
dove U è un insieme aperto, ben contenuto in $\mathcal{D}_3$ (cioè $\overline{U} \subset \mathcal{D}_3$). Indichiamo con (χ_1, χ_2, χ_3) le tre componenti di χ. Avremo:
$$\begin{aligned} |\chi_1(x, I, \varphi)| &\leq |\chi_1(x, I, \varphi) - x| + |x| \leq \\ &\leq \beta + \frac{\rho_1}{2} \overset{\text{th.}}{<} \frac{5}{8}\rho_1 \,, \end{aligned}$$
quindi dovremo richiedere
$$\beta < \frac{\rho_1}{8} \,.$$
Analogamente:
$$\begin{aligned} |\chi_2(x, I, \varphi) - I_0| &\leq |\chi_2(x, I, \varphi) - I| + |I - I_0| \leq \\ &\leq \beta + \frac{\rho_2}{2} \overset{\text{th.}}{<} \frac{5}{8}\rho_2 \,, \end{aligned}$$
quindi dovremo richiedere
$$\beta < \frac{\rho_2}{8} \,.$$
Vediamo invece la condizione da imporre affinché:
$$\chi(\mathcal{D}_2) \supset \overline{\mathcal{D}_1} \,.$$
Studiamo l'immagine dei punti sulla frontiera di un disco $\mathcal{D}$ compreso tra $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$. Sia $(x, I, \varphi) \in \partial\mathcal{D}$, cioè tale che
$$\begin{aligned} |x| &= \frac{3\rho_1}{8} \\ |I - I_0| &= \frac{3\rho_2}{8} \end{aligned}$$
e mostriamo che l'immagine di tali punti è ancora "compresa" tra tali dischi.
Osserviamo che:
$$\begin{aligned} |\chi_1(x, I, \varphi)| &\geq |x| - |\chi_1(x, I, \varphi) - x| \geq \\ &\geq \frac{3\rho_1}{8} - \beta \overset{\text{th.}}{>} \frac{5\rho_1}{16} \,, \end{aligned}$$

quindi dovremo richiedere
$$\beta < \frac{\rho_1}{16}\,.$$
Inoltre:
$$\begin{aligned}|\chi_2(x,I,\varphi)-I_0| &\geq |I-I_0|-|\chi_1(x,I,\varphi)-I|\geq\\ &\geq \frac{3\rho_2}{8}-\beta \overset{\text{th.}}{>} \frac{5\rho_2}{16}\,,\end{aligned}$$
quindi dovremo richiedere
$$\beta < \frac{\rho_2}{16}\,.$$
Ora osserviamo che χ è una funzione aperta: questo è conseguenza del seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [62][2]:

Teorema. *Sia X uno spazio compatto ed Y uno spazio di Haussdorff. Se*
$$f: X \longrightarrow Y$$
è un'applicazione continua allora f è chiusa. Se f è continua e biunivoca, allora f è un omeomorfismo.

Definiamo, quindi:
$$E_1 \equiv \mathcal{D}_1 \cap \chi(\mathcal{D}) \qquad \text{e} \qquad E_2 \equiv \mathcal{D}_1 \setminus \chi(\mathcal{D})\,.$$
Inoltre per quanto abbiamo appena visto nessun punto della frontiera di $\mathcal{D}$ viene mandato in $\mathcal{D}_1$, quindi possiamo tranquillamente cosiderare $\chi(\overline{\mathcal{D}})$ nella definizione di E_1 ed E_2. Osserviamo ora che $\mathcal{D}_1$ è aperto e $\chi(\overline{\mathcal{D}})$ è un compatto, quindi E_2 è aperto; inoltre anche E_1 è aperto. Per le ipotesi fatte su β sappiamo che $E_1 \neq \emptyset$; infatti:
$$\begin{aligned}|\chi(0,I_0,\varphi)-(0,I_0,\varphi)| &= |\chi(0,I_0,\varphi)-i(0,I_0,\varphi)|\leq\\ &\leq \beta < \min\left\{\frac{\rho_1}{4},\,\frac{\rho_2}{4}\right\}\,.\end{aligned}$$
Quindi:
$$\mathcal{D}_1 = E_1 \cup E_2$$
è un insieme connesso, unione di due insiemi aperti. Poiché $E_1 \neq \emptyset$, possiamo concludere che
$$E_1 = \mathcal{D}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{D}_1 \subset \chi(\mathcal{D})\,.$$

[2] In realtà di può dimostrare un risultato più generale che richiede un *background* più avanzato (la *teoria del grado*) e per la cui dimostrazione rimandiamo a [21] e [19]:

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^k$ e sia*
$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
una funzione continua e iniettiva; allora f è una funzione aperta.

Riassumendo, la condizione finale da richiedere sarà:

$$\beta < \min\left\{\frac{\rho_1}{16}, \frac{\rho_2}{16}, 1\right\}.$$

□

Utilizzando questa proposizione si può dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 5.2.8. *Sia π la mappa proiezione sulla fibra, cioè*

$$\begin{array}{rcl} \pi : N_\lambda & \longrightarrow & W^u(\mathbb{M}) \\ (x,y,I,\varphi) & \longmapsto & (x,0,I,\varphi)\,. \end{array}$$

Definiamo l'applicazione

$$\chi \equiv \pi \circ \Phi_T \circ \hat{u} \circ \Phi^0_{-T}$$

dove $\hat{u} = (x, u(x,I,\varphi), I, \varphi)$; scritta in maniera più esplicita:

$$\chi(x,0,I,\varphi) \equiv \pi\left[\Phi_T(e^{-AT}x, u(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi)), I, -\omega(I)T+\varphi)\right]\,.$$

Allora esistono λ, ε e δ sufficientemente piccoli, tali che per ogni $u \in S_\delta$ si abbia:

1. *$\overline{\mathcal{D}_1} \subset \chi(\mathcal{D}_2) \subset \overline{\chi(\mathcal{D}_2)} \subset \mathcal{D}_3$.*
2. *Ogni punto in $\mathcal{D}_1$ è immagine di un solo punto di $\mathcal{D}_2$.*

Dimostrazione. Basta far vedere che per valori sufficientemente piccoli dei parametri, possiamo rendere χ arbitrariamente vicina all'identità, nella norma di Lipschitz sopra definita. Infatti, usando la proposizione 5.2.4 e l'espressione del flusso imperturbato (e osservando che la componente f^0 non dipende dalla y:

$$\begin{aligned}
&|\chi(x,0,I,\varphi) - (x,0,I,\varphi)| = \\
&\quad = \left|\pi\left[\Phi_T(e^{-AT}x, u(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi)), I, -\omega(I)T+\varphi)\right] - \right. \\
&\quad\quad \left. -\ \pi\left[\Phi^0_T(e^{-AT}x, u(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi)), I, -\omega(I)T+\varphi)\right]\right| \le \\
&\quad \le \varepsilon M_1 T e^{MT}\,.
\end{aligned}$$

Ci rimane da stimare la costante di Lipschitz della funzione $\chi - i$. Utilizzando la rappresentazione locale del flusso al tempo T, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&|\chi(x,0,I,\varphi) - (x,0,I,\varphi) - \chi(x',0,I',\varphi') - (x',0,I',\varphi')| = \\
&= \ |f[\hat{u}(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi))] - f^0[\hat{u}(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi))] - \\
&\quad\quad - f[\hat{u}(\Phi^0_{-T}(x',0,I',\varphi'))] + f^0[\hat{u}(\Phi^0_{-T}(x',0,I',\varphi'))]| \le \\
&\le \ |Df - Df^0||\hat{u}(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi)) - \hat{u}(\Phi^0_{-T}(x',0,I',\varphi'))| \le \\
&\le \ |Df - Df^0|\left(|(x,0,I,\varphi) - (x',0,I'\varphi')| + \right. \\
&\quad\quad \left. + u(\Phi^0_{-T}(x,0,I,\varphi)) - u(\Phi^0_{-T}(x',0,I',\varphi'))|\right) \le \\
&\le \ 2\delta(|Df - Df^0||D\Phi^0_{-T}|)\,|(x,0,I,\varphi) - (x',0,I',\varphi')|\,.
\end{aligned}$$

In conclusione, la costante di Lipschitz di tale funzione è stimabile nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}\,(\chi - i) &\leq 2\delta\,|Df - Df^0||D\Phi^0_{-T}| \leq \\ &\leq 2\delta Q\varepsilon M_2 T e^{M_3 T} \leq \\ &\leq 2\varepsilon M_2 T e^{M_3 T}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo imposto l'ulteriore condizione

$$\delta Q < 1\,. \tag{5.13}$$

Quindi, affinché la funzione χ appartenga all'intorno di i individuato nella proposizione precedente, si dovrà avere:

$$2\varepsilon \max\{M_1, M_2\} T e^{\max\{M, M_3\}T} < \min\left\{\frac{\rho_1}{16}, \frac{\rho_2}{16}, 1\right\}\,. \tag{5.14}$$

□

Diamo ora un'interpretazione geometrica di tale risultato. Come conseguenza della precedente proposizione, abbiamo che se $u \in S_\delta$ (cioè è un grafico su $\mathcal{D}_1$), allora l'evoluzione della sua immagine attraverso il flusso perturbato al tempo T, può essere ancora vista come un grafico su $\mathcal{D}_1$. In altre parole, l'immagine di una sezione u non può "ripiegarsi" e diventare multivoca. Spieghiamo ciò in maniera più precisa. Supponiamo che $p = (x, 0, I, \varphi)$ e $p' = (x', 0, I', \varphi')$ siano due punti distinti di $\mathcal{D}_1$ e sia $u \in S_\delta$. Allora $u(\Phi^0_{-T}(p))$ e $u(\Phi^0_{-T}(p'))$ sono ancora due punti distinti nel grafico di u (che da ora in poi denoteremo con $\mathrm{graph}\, u$). Consideriamo ora $\Phi_T(\mathrm{graph}\, u)$ e, in particolare, analizziamo il "destino" dei due punti $u(\Phi^0_{-T}(p))$ e $u(\Phi^0_{-T}(p'))$. Se i due punti $\Phi_T(u(\Phi^0_{-T}(p)))$ e $\Phi_T(u(\Phi^0_{-T}(p')))$ avessero la stessa fibra avremmo che:

$$\begin{aligned}\chi(p) &= \pi\left[\Phi_T(e^{-AT}x, u(\Phi^0_{-T}(p)), I, -\omega(I)T + \varphi)\right] = \\ &= \pi\left[\Phi_T(e^{-AT}x', u(\Phi^0_{-T}(p')), I, -\omega(I)T + \varphi)\right] = \chi(p')\end{aligned}$$

e di conseguenza, per la proposizione 5.2.8, si avrebbe che $p = p'$, contraddicendo l'assunzione iniziale.

Perciò la proposizione 5.2.8 implica che per λ, ε e δ sufficientemente piccoli, $\Phi_T(\mathrm{graph}\, u)$ è un grafico su $\mathcal{D}_1$ e quindi gli possiamo associare una sezione in N_λ che denoteremo Gu.

Da ciò segue che per λ, ε e δ sufficientemente piccoli, possiamo definire la seguente mappa:

$$\begin{aligned}G : S_\delta &\longrightarrow S \\ u &\longmapsto Gu\end{aligned}$$

che possiamo scrivere in coordinate locali. Consideriamo, infatti, la mappa

$$\begin{aligned}(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) \quad \longrightarrow \quad & (f_1(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi),\ g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi), \\ & f_2(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi),\ f_3(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi))\end{aligned}$$

che descrive l'immagine di un punto in graph u sotto l'azione del flusso perturbato al tempo T; quindi, l'espressione in coordinate locali di Gu sarà data da:

$$Gu(f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) = g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)\,.$$

La condizione affinché graph u sia invariante per l'azione del flusso perturbato al tempo T è (espressa in coordinate locali):

$$u(f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)) = g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)\,,$$

che è anche la condizione affinché u sia un punto fisso per G.

Quello che mostreremo è che

$$G : S_\delta \longrightarrow S$$

ha un unico punto fisso, che chiameremo u e che graph u è una varietà lipschitziana (localmente) invariante rispetto al flusso perturbato. In seguito, studieremo la regolarità di tale varietà.

L'idea che seguiremo è la seguente: dimostreremo che G è una contrazione da S_δ in sé e poi applicheremo il principio delle contrazioni per concludere l'asserto.

D'ora in avanti, useremo la seguente notazione:

$$\begin{aligned}\hat{A} &\equiv D_1 g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)\,, \\ \hat{B} &\equiv D_2 g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)\,, \\ \hat{C} &\equiv D_1 f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)\,, \\ \hat{E} &\equiv D_2 f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Quindi i risultati del lemma 5.2.6, possono essere riscritti nella seguente forma:

$$\begin{aligned} & |\hat{A}|,\ |\hat{B}|,\ |\hat{C}|,\ |\hat{C}^{-1}|,\ |\hat{E}|\ \le Q\,, \\ & |\hat{A}| < \eta\,, \\ & |\hat{B}| < \frac{1}{2}\,, \\ & |\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^k \le \frac{1}{2} \qquad k = 1,\dots,r-1\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Cominciamo con la seguente proposizione:

Proposizione 5.2.9. *Per ε, λ, δ ed η suffcientemente piccoli:*

$$G : S_\delta \longrightarrow S_\delta$$

cioè, per ogni $u \in S_\delta$ si ha che:

$$|(Gu)(\xi) - (Gu)(\xi')| \leq \delta|\xi - \xi'|$$

per ogni ξ, $\xi' \in \mathcal{D}_1$.

Dimostrazione. Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \xi &= f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) \\ \xi' &= f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi') . \end{aligned}$$

Come prima cosa otteniamo un lower bound di $|\xi - \xi'|$ in termini di

$$|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| .$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} |\xi - \xi'| &= |f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi')| \geq \\ &\geq |f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - f(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi')| - \\ &- |f(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi') - f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi')| . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Stimiamo separatamente i due termini, trovando un *lower bound* per il primo e un *upper bound* per il secondo:

- Osserviamo che, usando il teorema di Lagrange, possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} &|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| = \\ &= |(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - (x', u(x, I, \varphi), I', \varphi')| \leq \\ &\leq |f^{-1} f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - f^{-1} f(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi')| \leq \\ &\leq |\hat{C}^{-1}||f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - f(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi')| . \end{aligned}$$

  Quindi:

$$|f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - f(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi')| \geq \tag{5.18}$$
$$\leq |\hat{C}^{-1}|^{-1}|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| . \tag{5.19}$$

- Per il secondo termine si procede facilmente usando Lagrange e la lipschitzianeità della sezione u:

$$\begin{aligned} &|f(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi') - f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi')| \leq \\ &\leq |\hat{E}||u(x, I, \varphi) - u(x', I', \varphi')| \leq \\ &\leq \delta|\hat{E}||(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| . \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due stime precedenti, otteniamo da (5.17) che:

$$
\begin{aligned}
|\xi - \xi'| &\geq (|\hat{C}^{-1}|^{-1} - \delta|\hat{E}|)|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| = \\
&= |\hat{C}^{-1}|^{-1}(1 - \delta|\hat{E}||\hat{C}^{-1}|)|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| \geq \\
&\geq |\hat{C}^{-1}|^{-1}(1 - \delta Q^2)|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')|\,,
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

imponendo naturalmente la condizione

$$
\delta Q^2 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta < \frac{1}{Q^2}\,. \tag{5.21}
$$

Concludendo (usando Lagrange e la stime precedenti):

$$
\begin{aligned}
&|(Gu)(\xi) - (Gu)(\xi')| = \\
&\quad = |g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - g(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi')| \leq \\
&\quad \leq |g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) - g(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi')| + \\
&\quad\quad + |g(x', u(x, I, \varphi), I', \varphi') - g(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi')| \leq \\
&\quad \leq (|\hat{A}| + \delta|\hat{B}|)|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| \leq \\
&\quad \leq (|\hat{A}| + \delta|\hat{B}|)\frac{|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2}|\xi - \xi'| \leq \\
&\quad \leq \frac{(\eta + \delta|\hat{B}|)|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2}|\xi - \xi'|
\end{aligned}
$$

da cui, richiedendo le condizioni

$$
1 - \delta Q^2 > \frac{3}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta \leq \frac{1}{4Q^2} \tag{5.22}
$$

e

$$
\eta Q < \frac{\delta}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \eta < \frac{\delta}{4Q} \tag{5.23}
$$

otteniamo

$$
\frac{(\eta + \delta|\hat{B}|)|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2} \leq \frac{\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2}}{\frac{3}{4}} = \delta \tag{5.24}
$$

e quindi abbiamo dimostrato l'asserto. □

Vogliamo dimostrare ora che G è una contrazione su S_δ con la norma C^0.

Proposizione 5.2.10. *Per valori sufficientemente piccoli dei parametri ε, λ, δ ed η, G è una contrazione sullo spazio S_δ con la norma C^0.*

Dimostrazione. Siano u, $u' \in S_\delta$ e $\xi \in \mathcal{D}_1$ assegnati. Scegliamo due punti (x, I, φ) e (x', I', φ') tali che:

$$
\xi = f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) = f(x', u'(x', I', \varphi'), I', \varphi')\,.
$$

Consideriamo inzialmente la seguente stima:

$$
\begin{aligned}
|(Gu)(\xi) - (Gu')(\xi)| = \\
&= |g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) - g(x',u'(x',I',\varphi'),I',\varphi')| \le \\
&\le |g(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) - g(x',u(x,I,\varphi),I',\varphi')| + \\
&\quad + |g(x',u(x,I,\varphi),I',\varphi') - g(x',u(x',I',\varphi'),I',\varphi')| + \\
&\quad + |g(x',u(x',I',\varphi'),I',\varphi') - g(x',u'(x',I',\varphi'),I',\varphi')| \le \\
&\le |\hat{A}||(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| + \\
&\quad + |\hat{B}||u(x',I',\varphi') - u'(x',I',\varphi')| + \\
&\quad + |\hat{B}||u'(x,I,\varphi) - u'(x',I',\varphi')| \le \\
&\le (|\hat{A}| + \delta|\hat{B}|)|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| + \frac{1}{2}|u-u'| \le \\
&\le (\eta + \frac{\delta}{2})|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| + \frac{1}{2}|u-u'|\,.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Vogliamo ora stimare $|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')|$ in termini $|u-u'|$. Dalla (5.18) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&|f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) - f(x',u(x,I,\varphi),I',\varphi')| \ge \\
&\qquad \ge |\hat{C}^{-1}|^{-1}|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')|\,,
\end{aligned}
$$

inoltre

$$
\begin{aligned}
|f(x',u'(x',I',\varphi'),I',\varphi') - f(x',u(x,I,\varphi),I',\varphi')| \le \\
&\le |f(x',u'(x',I',\varphi'),I',\varphi') - f(x',u'(x,I,\varphi),I',\varphi')| + \\
&+ |f(x',u'(x,I,\varphi),I',\varphi') - f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)| \le \\
&\le \delta|\hat{E}||(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| + |\hat{E}||u-u'|\,.
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme queste due stime e usando il fatto che

$$
f(x',u'(x,I,\varphi),I',\varphi') = f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi)
$$

otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&|\hat{C}^{-1}|^{-1}|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| \le \\
&\qquad \le \delta|\hat{E}||(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| + |\hat{E}||u-u'|
\end{aligned}
$$

o equivalentemente:

$$
\begin{aligned}
&(|\hat{C}^{-1}|^{-1} - |\hat{E}|\delta)|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| \le |\hat{E}||u-u'| \\
\Longrightarrow \quad &|(x,I,\varphi) - (x',I',\varphi')| \le \frac{Q^2}{1-\delta Q^2}|u-u'|\,.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Concludendo, da (5.25) e (5.26):

$$|(Gu)(\xi) - (Gu')(\xi)| \quad \leq \quad \left(\frac{\eta + \delta Q}{1 - \delta Q^2} Q^2 + \frac{1}{2}\right) |u - u'| \, ,$$

quindi affinché si tratti una contrazione è sufficiente richiedere

$$\frac{\eta + \delta Q}{1 - \delta Q^2} Q^2 < \frac{1}{2} \, .$$

Tale condizione si può semplificare osservando che per la (5.24) abbiamo che:

$$\frac{\eta + \delta Q}{1 - \delta Q^2} Q^2 < \delta Q \, ,$$

quindi è sufficiente richedere la condizione

$$2\delta Q < 1 \, . \tag{5.27}$$

□

Abbiamo ora tutti gli strumenti per concludere il risultato che volevamo:

Corollario 5.2.11. *Esiste un'unica $u \in S_\delta$ tale che*

$$\Phi_t(\operatorname{graph} u) \supset \operatorname{graph} u$$

per ogni $t > 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che S_δ è uno spazio metrico chiuso rispetto alla convergenza C^0, quindi, applicando il principio delle contrazioni, possiamo concludere che G ha un unico punto fisso, che chiameremo u. Procedendo analogamente a quanto già fatto per la proposizione 5.2.8, si dimostra che per $t > 0$ sufficientemente piccoli

$$\Phi_t(\operatorname{graph} u) \cap N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}}$$

è ancora il grafico di un elemento $u_t \in S_\delta$. Inoltre, poiché u è un punto fisso di G, abbiamo:

$$\operatorname{graph} u \subset \Phi_T(\operatorname{graph} u)$$

e perciò

$$\Phi_t(\operatorname{graph} u) \subset \Phi_t(\Phi_T(\operatorname{graph} u)) = \Phi_T(\Phi_t(\operatorname{graph} u)) \, .$$

Mettendo insieme queste due espressioni e usando il fatto che G ha un unico punto fisso, otteniamo che:

$$u_t = u.$$

Iterando indefinitivamente questo fatto, otteniamo la tesi per $t > 0$. □

Osservazione. Osserviamo che la proposizione precedente, ci dice che la varietà trovata è negativamente invariante, nel senso che è invariante per l'azione del flusso all'indietro nel tempo. Inoltre, abbiamo dimostrato che per ogni $t > 0$, si ha:

$$\Phi_t(\operatorname{graph} u) \cap N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}} = \operatorname{graph} u\,. \tag{5.28}$$

In particolare per ogni punto $p \in \operatorname{graph} u$, si ha che esiste un tempo $t_0 = t_0(p) > 0$ tale che

$$\Phi_t(p) \in N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}}$$

per ogni $0 < t < t_0$; da ciò possiamo concludere che

$$\Phi_t(p) \in \operatorname{graph} u$$

anche per $0 < t < t_0$. Diremo quindi che la nostra varietà è *localmente invariante*, nel senso che le orbite originate in punti di graph u, la possono abbandonare soltanto attraversando il bordo.

Quindi, abbiamo concluso l'esistenza di una varietà localmente invariante per il sistema dinamico perturbato, ma gli argomenti fin qui usati non ci permettono di concludere altro relativamente alla regolarità di tale varietà.

Regolarità

Vogliamo mostrare ora che la varietà appena costruita è in realtà più che lipschitziana: è C^{r-1}. Osserviamo che tale varietà è il grafico della sezione u in $\mathbb{R}^{2n-k} \times \mathbb{T}^k$. Se u fosse C^1, potremmo denotare con Du la sua derivata: questa associerebbe a ciascun punto in $\mathcal{D}_1$ una mappa lineare da $\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k$ in $\mathbb{R}^l$:

$$Du \in C^0\left(\mathcal{D}_1, L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l)\right)\,.$$

Sia quindi $v = Du$ e consideriamo la norma (che induce la convergenza uniforme)

$$|v| \equiv \sup_{p \in \mathcal{D}_1} |v(p)|\,;$$

lo spazio $C^0\left(\mathcal{D}_1, L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l)\right)$ con tale norma è uno spazio completo e la topologia indotta è quella della convergenza uniforme.

Ecco la strategia che seguiremo per dimostrare che la u è C^{r-1}:

1. Prima dimostreremo che la u è C^1, nel seguente modo:

   (a) ricaveremo una equazione formale che Du deve soddisfare per essere C^1;

(b) useremo un procedimento iterativo ed il principio delle contrazioni, per mostrare che una soluzione di tale equazione esiste;

(c) mostreremo che la soluzione così trovata è proprio la derivata di u.

2. Usando gli stessi argomenti in maniera induttiva mostreremo che u è C^{r-1}.

Ricaviamo ora questa *equazione formale* che la derivata deve soddisfare. Ricordiamo che in coordinate locali la u soddisfa la seguente relazione:

$$u(\xi) = g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)\,,$$

dove

$$\xi = f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)\,.$$

Differenziando formalmente queste due espressioni, otteniamo:

$$(Du)D\xi = D_1 g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) + D_2 g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)Du(x, I, \varphi)$$

e

$$D\xi = D_1 f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) + D_2 f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)Du(x, I, \varphi)\,.$$

Combinando queste due espressioni troviamo

$$\begin{aligned} Du(\xi) &= [D_1 g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) + D_2 g(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)Du(x, I, \varphi)] \cdot \\ &\cdot [D_1 f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) + D_2 f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)Du(x, I, \varphi)]^{-1} \end{aligned}$$

e, utilizzando le notazioni introdotte in (5.15), otteniamo una forma più compatta:

$$v(\xi) = [\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1} \equiv Hv(\xi)\,. \tag{5.29}$$

Quindi, l'equazione funzionale che la derivata di u deve soddisfare è:

$$v(\xi) = Hv(\xi)\,. \tag{5.30}$$

Possiamo risolvere tale equazione attraverso il seguente schema iterativo:

$$\begin{cases} v_0(\xi) = 0 \\ v_{n+1}(\xi) = Hv_n(\xi)\,. \end{cases} \tag{5.31}$$

Mostreremo che (5.31) ha un unico punto fisso e che tale punto fisso è proprio la derivata di u. Questo avverrà in due steps: prima mostreremo l'esistenza di un punto fisso, attraverso un procedimento iterativo; dopo mostreremo che tale punto fisso è la derivata di u, usando direttamente la definizione di derivata.

Cominciamo col sviluppare tale metodo iterativo attraverso una serie di proposizioni.

Proposizione 5.2.12. *Per ε, δ, λ e η sufficientemente piccoli si ha che*

$$|v_n| < \delta$$

per ogni n.

Dimostrazione. E'sufficiente dimostare che $|Hv_{n-1}(\xi)| < \delta$, per ogni ξ e per ogni n.

- Ovviamente è vero per $n = 1$: infatti $v_0 = 0$ e quindi usando la condizione (5.23):

$$Hv_0 = |\hat{A}||\hat{C}^{-1}| < Q\eta < \frac{\delta}{4}.$$

- Supponiamo che $|Hv_n(\xi)| < \delta$ per ogni ξ e dimostriamolo per $|Hv_{n+1}|$.

  Per definizione:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= Hv_n = \\ &= [\hat{A} + \hat{B}v_n][\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1} = \\ &= [\hat{A} + \hat{B}v_n][\mathbb{I} + \hat{E}v_n\hat{C}^{-1}]^{-1}\hat{C}^{-1} \end{aligned}$$

  ed otteniamo

$$|v_{n+1}| \leq |\hat{A} + \hat{B}v_n||\hat{C}^{-1}||[\mathbb{I} + \hat{E}v_n]^{-1}|\,.$$

  Usando (5.16) e (5.22) ricaviamo:

$$\begin{aligned} |[\mathbb{I} + \hat{E}v_n\hat{C}^{-1}]^{-1}| &\leq \sum_{j=0}^{k} |\hat{E}v_n\hat{C}^{-1}|^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k} (\delta Q^2)^j = \\ &= 1 + \frac{Q^2\delta}{1 - \delta Q^2} \leq 1 + 2\delta Q^2\,; \end{aligned} \tag{5.32}$$

  quindi

$$\begin{aligned} |v_{n+1}| &\leq (|\hat{A}| + \delta|\hat{B}|)|\hat{C}^{-1}||1 + 2\delta Q^2| \leq \\ &\leq (Q\eta + \frac{\delta}{2})(1 + 2\delta Q^2) = \\ &= \eta(Q + 2\delta Q^3) + \frac{\delta}{2} + \delta^2 Q^2 < \delta\,, \end{aligned}$$

  dove abbiamo usato la condizione (5.23) e richiesto:

$$\delta Q^2 < \frac{1}{8}\,. \tag{5.33}$$

□

Useremo questo risultato nella prossima proposizione, che rappresenta un fatto di cruciale importanza per la riuscita del metodo iterativo.

Proposizione 5.2.13. *Per ε, δ, λ e η sufficientemente piccoli si ha che*

$$|v_{n+1} - v_n| < \frac{3}{5}|v_n - v_{n-1}|$$

per ogni n.

Dimostrazione. Infatti, usando (5.32) e (5.33):

$$\begin{aligned}
|v_{n+1} - v_n| &= |Hv_n - Hv_{n-1}| = \\
&= |[\hat{A} + \hat{B}v_n][\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1} - [\hat{A} + \hat{B}v_{n-1}][\hat{C} + \hat{E}v_{n-1}]^{-1}| = \\
&= \Big|[\hat{A} + \hat{B}v_n][\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1} \Big([\hat{C} + \hat{E}v_{n-1}] - [\hat{C} + \hat{E}v_n]\Big) \cdot \\
&\quad \cdot [\hat{C} + \hat{E}v_{n-1}]^{-1} + \Big([\hat{A} + \hat{B}v_n] - [\hat{A} + \hat{B}v_{n-1}]\Big) \cdot \\
&\quad \cdot \ [\hat{C} + \hat{E}v_{n-1}]^{-1}\Big| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta|\hat{E}||v_n - v_{n-1}||\hat{C}^{-1}| \sum_{j\geq 0} |\hat{E}v_{n-1}\hat{C}^{-1}| + \\
&\quad + |\hat{B}||v_n - v_{n-1}||\hat{C}^{-1}| \sum_{j\geq 0} |\hat{E}v_{n-1}\hat{C}^{-1}| \leq \\
&\leq (\delta|\hat{E}| + |\hat{B}|)|\hat{C}^{-1}|(1 + 2\delta Q^2)|v_n - v_{n-1}| \leq \\
&\leq (\frac{1}{2} + \delta Q^2)(1 + 2\delta Q^2)|v_n - v_{n-1}| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}(1 + \delta Q^2)^2 |v_n - v_{n-1}| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{16}\right)^2 |v_n - v_{n-1}| \leq \\
&\leq \frac{3}{5}|v_n - v_{n-1}| \,.
\end{aligned}$$

□

Segue quindi il seguente corollario:

Corollario 5.2.14. *La successione $\{v_n\}_n$ converge ad una soluzione v, ed inoltre v soddisfa l'equazione:*

$$v = Hv \,.$$

Dimostrazione. Per la proposizione 5.2.13, la successione $\{v_n\}$ è di Cauchy. Poiché $C^0\left(\mathcal{D}^3,\ L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l)\right)$ è uno spazio metrico completo (con la metrica indotta dalla norma considerata), allora la successione di Cauchy converge ad un elemento v in tale spazio. Per costruzione v soddisfa tale equazione funzionale.

□

Dobbiamo ora dimostrare che v è la derivata di u.

Prima di procedere oltre, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 5.2.15. *Supponiamo che $\gamma(a)$ sia una funzione non negativa, non decrescente e che soddisfi la seguente disuguaglianza*

$$\gamma(a) \leq \alpha\gamma(\beta a) + r(a)$$

dove a è piccolo, $0 \leq \alpha < 1$ e

$$\lim_{a \to 0} r(a) = 0\,.$$

Allora:

$$\lim_{a \to 0} \gamma(a) = 0\,.$$

Dimostrazione. E' conveniente distinguere due casi: i) $\beta \leq 1$ e ii) $\beta > 1$.

i) In tal caso abbiamo:

$$\gamma(a) \quad \leq \quad \alpha\gamma(a\beta) + r(a) \leq \alpha\gamma(a) + r(a)$$

e quindi

$$\gamma(a) \leq \frac{r(a)}{1-\alpha}$$

da cui segue immediatamente che

$$\lim_{a \to 0} \gamma(a) = 0\,.$$

ii) Cominciamo considerando la disuguaglianza

$$\gamma(a) \quad \leq \quad \alpha\gamma(\beta a) + r(a)$$

e creando n nuove disuguaglianze, ottenute sostituendo a con

$$a\beta^{-1},\, a\beta^{-2}, \ldots, a\beta^{-n}$$

e moltiplicando le disequazioni così ottenute, rispettivamente per

$$\alpha^{n-1},\, \alpha^{n-2}, \ldots, 1\,.$$

Otteniamo:

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{n-1}\gamma(a\beta^{-1}) & \leq & \alpha^n\gamma(a)+\alpha^{n-1}r(a\beta^{-1}) \\ \alpha^{n-2}\gamma(a\beta^{-2}) & \leq & \alpha^{n-1}\gamma(a\beta^{-1})+\alpha^{n-2}r(a\beta^{-2}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\gamma(a\beta^{-(n-1)}) & \leq & \alpha^2\gamma(a\beta^{-(n-2)})+\alpha r(a\beta^{-(n-1)}) \\ \gamma(a\beta^{-n}) & \leq & \alpha\gamma(a\beta^{-(n-1)})+r(a\beta^{-n})\,. \end{array}$$

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{n\to\infty} r(a\beta^{-n}) = 0\,,$$

quindi esistono un $n_0 = n_0(\beta) \in \mathbb{N}$ ed una costante $C_0 = C_0(\beta) > 1$ tale che per ogni a sufficientemente piccolo (ad esempio possiamo supporre $|a| < \delta$ con δ sufficientemente piccolo in modo che r sia limitata in $[-\delta, \delta]$) si abbia:

$$\begin{array}{rcll} |r(a\beta^{-n})| & < & |r(a\beta^{-1})| & \text{per ogni } n \geq n_0\,, \\ |r(a\beta^{-n})| & \leq & C_0|r(a\beta^{-1})| & \text{per ogni } n < n_0\,. \end{array}$$

Questi due fatti ci permettono di costruire la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{array}{rcl} \gamma(a\beta^{-n}) & \leq & \alpha\gamma(a\beta^{-(n-1)})+r(a\beta^{-n}) \leq \\ & \leq & \alpha^2\gamma(a\beta^{-(n-2)})+\alpha r(a\beta^{-(n-1)})+r(a\beta^{-n}) \leq \\ & & \vdots \\ & \leq & \alpha^n\gamma(a)+\alpha^{n-1}r(a\beta^{-1})+\alpha^{n-2}r(a\beta^{-2})+\ldots+r(a\beta^{-n}) \leq \\ & \leq & \alpha^n\gamma(a)+C_0(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\ldots+1)|r(a\beta^{-1})| \leq \\ & \leq & \alpha^n\gamma(a)+\dfrac{C_0}{1-\alpha}|r(a\beta^{-1})|\,. \end{array}$$

Passando ora al limite per $a \to 0$ ed osservando che

$$\lim_{a\to 0}\gamma(a\beta^{-n}) \quad = \quad \lim_{a\to 0}\gamma(a)\,,$$

in quanto si tratta di una funzione monotona non decrescente e quindi ammette un limite (che è unico), otteniamo:

$$0 \leq \lim_{a\to 0}\gamma(a) \quad \leq \quad \alpha^n \lim_{a\to 0}\gamma(a)$$

e di conseguenza:

$$\lim_{a\to 0}\gamma(a) = 0\,. \qquad \square$$

Abbiamo sviluppato ora tutti gli strumenti per dimostrare il risultato che ci interessa.

Proposizione 5.2.16. *Per ogni $p \in \mathcal{D}_1$, $Du(p)$ esiste ed è uguale a $v(p)$. Quindi u è una funzione $C^1(\mathcal{D}_1)$.*

Dimostrazione. Motivati dalla definizione di derivata, definiamo la seguente *funzione incremento*:

$$\begin{aligned} \gamma :\ (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \sup_{\substack{\xi,\,\xi' \in \mathcal{D}_1 \\ 0<|\xi-\xi'|<a}} \frac{|u(\xi') - v(\xi)(\xi - \xi')|}{|\xi - \xi'|} \,. \end{aligned}$$

Questa funzione è chiaramente non decrescente, in quanto estremo superiore su una famiglia non decrescente di insiemi (al variare del parametro a). Usando il fatto che $u \in S_\delta$ e la proposizione 5.2.13, abbiamo immediatamente che

$$\gamma(a) < 2\delta \,,$$

e quindi è sufficiente mostrare che

$$\lim_{a \to 0} \gamma(a) = 0 \,.$$

Per fare questo useremo il lemma 5.2.15. Osserviamo che ciò è sufficiente per concludere la tesi; infatti:

$$\lim_{|\xi-\xi'| \to 0} \frac{|u(\xi') - v(\xi)(\xi - \xi')|}{|\xi - \xi'|} = 0$$

implica proprio che v è la derivata di u.

Dobbiamo far vedere che sono soddisfatte le ipotesi del lemma 5.2.15, quindi dobbiamo mostrare che:

$$|u(\xi') - u(\xi) - Hv(\xi)(\xi - \xi')| \leq [\alpha\gamma(\beta a) + r(a)]|\xi - \xi'| \tag{5.34}$$

per ogni $|\xi - \xi'| < a$; da ciò, applicando il lemma 5.2.15 segue immediatamente l'asserto.

Analizziamo un piccolo dettagli tecnico. Sia $\xi \in \mathcal{D}_1$ assegnato e supponiamo che

$$\xi = f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) \,;$$

se scegliamo un d opportunatamente piccolo, allora per $\xi' \in \mathcal{D}_1$, con $|\xi' - \xi| < d$, esiste un punto in $\mathcal{D}_1$ tale che

$$\xi' = f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi').$$

Inoltre per compattezza si può scegliere d indipendente da ξ. In altre parole $f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi)$ è *localmente suriettiva*. Questo si può facilmente verificare usando il teorema delle funzioni implicite e il fatto che $|(D_1 f)^{-1}|$ è limitato.

Siano, quindi:

$$\begin{aligned}
\xi &= f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) \\
\xi' &= f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi'),
\end{aligned}$$

tali che $|\xi - \xi'| \leq a < d$.

Cominciamo con delle stime preliminari:

$$\begin{aligned}
\xi' - \xi &= f(x', u(x', I', \varphi'), I', \varphi') - f(x, u(x, I, \varphi), I, \varphi) = \\
&= \hat{C}((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)) + \\
&+ \hat{E}(u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi)) + \\
&+ O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2),
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
u(\xi') - u(\xi) &= g(x', u(x', I', f'), I', \varphi') - g(x, u(x, I, f), I, \varphi) = \\
&= \hat{A}((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)) + \\
&+ \hat{B}(u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi)) + \\
&+ O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Ricordiamo inoltre la disuguaglianza (5.20):

$$|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| \leq \frac{|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2} |\xi - \xi'|. \tag{5.37}$$

Osserviamo che è possibile riscrivere (5.35) in una maniera più utile:

$$\begin{aligned}
\xi' - \xi &= [\hat{C} + \hat{E} v(x, I, \varphi)]((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)) + \\
&+ \hat{E}[u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi) - \\
&- v(x, I, \varphi)((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi))] + \\
&+ O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Usando (5.36), (5.29), (5.38), (5.37), la definizione di γ e la proposizione 5.2.12,

otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&|u(\xi') - u(\xi) - Hv(\xi)(\xi - \xi')| = \\
&\quad = |\hat{A}((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)) + \hat{B}(u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi)) - \\
&\quad - [\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1}(\xi - \xi') + \\
&\quad + O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2)| = \\
&\quad = |\hat{A}((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)) + \hat{B}(u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi)) - \\
&\quad - [\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot [\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)) + \\
&\quad + \hat{E}[u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi) - v(x, I, \varphi)((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi))] + \\
&\quad + O(|(x', I', \varphi') - (x, I, f)|^2)| = \\
&\quad = |\hat{B}[u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi)] - \hat{B}v(x, I, \varphi)[(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')] - \\
&\quad - [\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot \hat{E}[u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi) - v(x, I, \varphi)((x', I', \varphi') - (x, I, \varphi))] + \\
&\quad + O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2)| = \\
&\quad = |\{\hat{B} - [\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1}\hat{E}\} \cdot \\
&\quad \cdot [u(x', I', \varphi') - u(x, I, \varphi) - v(x, I, \varphi)((x, I, \varphi) - (x', I', \varphi'))] + \\
&\quad + O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2)| \leq \\
&\quad \leq (|\hat{B}| + Q\delta)\, \gamma(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|)\, |(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)| + \\
&\quad + O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2)| \leq \\
&\quad \leq \frac{(|\hat{B}| + Q\delta)|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2}\, \gamma(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|)\, |\xi - \xi'| + \\
&\quad + O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2)| \,. \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

Il nostro obiettivo ora, è scriverci tutto ciò in una forma simile a (5.34). Definiamo

$$\alpha \equiv \frac{(|\hat{B}| + Q\delta)|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2} \qquad (5.40)$$

ed osserviamo che per la (5.22) si ha:

$$
\begin{aligned}
\alpha &\equiv \frac{(|\hat{B}| + Q\delta)|\hat{C}^{-1}|}{1 - \delta Q^2} \\
&\leq \frac{\frac{1}{2} + Q^2\delta}{1 - \delta Q^2} < \\
&< \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 \,.
\end{aligned}
$$

Definiamo inoltre

$$\beta \equiv \frac{Q}{1 - \delta Q^2} \,,$$

ed otteniamo dalla (5.37) che:

$$|(x, I, \varphi) - (x', I', \varphi')| \leq \beta|\xi - \xi'| < \beta a\,. \tag{5.41}$$

Poiché la funzione γ che abbiamo definito è non decrescente, possiamo concludere che

$$\gamma(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|) \leq \gamma(\beta a)\,. \tag{5.42}$$

Inoltre, dalla (5.41) abbiamo

$$O(|(x', I', \varphi') - (x, I, \varphi)|^2) \leq r(a)|\xi - \xi'| \tag{5.43}$$

per una qualche funzione $r(a)$, che soddisfa la proprietà

$$\lim_{a \to 0} r(a) = 0\,.$$

Quindi, mettendo insieme (5.39), (5.40), (5.42) e (5.43) possiamo concludere:

$$|u(\xi') - u(\xi) - Hv(\xi)(\xi - \xi')| \leq [\alpha\gamma(\beta a) + r(a)]|\xi - \xi'|\,.$$

□

Procederemo ora per induzione per mostrare che la varietà trovata (che denotiamo con $W^{u,\,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$) è C^{r-1}. Mostreremo innanzitutto che è C^2: questo ci permetterà di chiarire le principale difficoltà che si presentano e di procedere poi in maniera analoga per i successivi ordini di differenziazione.

La dimostrazione che $W^{u,\,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ è C^2, seguirà gli stessi steps che abbiamo usato per dimostrare che era C^1. Ricaveremo prima un'equazione formale che la derivata seconda deve soddisfare e, usando un argomento iterativo, mostreremo che tale equazione ammette un'unica soluzione, che è proprio la derivata seconda di u.

Differenziando formalmente l'uguaglianza in (5.30) otterremo la seguente equazione che dovrà essere soddisfatta dalla derivata seconda (si procede analogamente a quanto visto in (5.29)):

$$\begin{aligned} Dv(\xi) &= D\left\{[\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1}\right\}[\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1} = \\ &= \Big\{[D\hat{A} + (D\hat{B})v(x, I, \varphi) + \hat{B}Dv(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1} - \\ &\quad - [\hat{A} + \hat{B}v(x, I, \varphi)][\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot [D\hat{C} + (D\hat{E})v(x, I, \varphi) + \hat{E}Dv(x, I, \varphi)] \cdot \\ &\quad \cdot\ [\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1}\Big\}[\hat{C} + \hat{E}v(x, I, \varphi)]^{-1}\,, \end{aligned} \tag{5.44}$$

avendo già posto

$$
\begin{aligned}
D\xi &= D_1 f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) + D_2 f(x,u(x,I,\varphi),I,\varphi) Du(x,I,\varphi) = \\
&= \hat{C} + \hat{E}v(x,I,\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

Osservazione. Osserviamo ora il seguente fatto:

$$
\begin{aligned}
&D[\hat{C} + \hat{E}v(x,I,\varphi)]^{-1} = \\
&\quad -[\hat{C} + \hat{E}v(x,I,\varphi)]^{-1} \left(D[\hat{C} + \hat{E}v(x,I,\varphi)] \right) [\hat{C} + \hat{E}v(x,I,\varphi)]^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Ciò si può provare notando che se $\hat{A}$ è una mappa invertibile, allora:

$$0 = D(\hat{A}\hat{A}^{-1}) = (D\hat{A})\hat{A}^{-1} + \hat{A}D(\hat{A}^{-1})$$

e quindi:

$$D(\hat{A}^{-1}) = -\hat{A}^{-1}(D\hat{A})\hat{A}^{-1}\,.$$

Cerchiamo ora di risolvere l'equazione (5.44) in maniera iterativa con il seguente schema:

$$
\begin{aligned}
&Dv_{n+1}(\xi) = \\
&= D\left\{ [\hat{A} + \hat{B}v_n(x,I,\varphi)][\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \right\} [\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} = \\
&= \Big\{ [D\hat{A} + (D\hat{B})v_n(x,I,\varphi) + \hat{B}Dv_n(x,I,\varphi)][\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{A} + \hat{B}v_n(x,I,\varphi)][\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot [D\hat{C} + (D\hat{E})v_n(x,I,\varphi) + \hat{E}Dv_n(x,I,\varphi)] \cdot \\
&\quad \cdot\ [\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \Big\} [\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1}\,.
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

Riscriviamo la (5.45) in una maniera più utile:

$$
\begin{aligned}
&Dv_{n+1}(\xi) = \\
&= \Big\{ \hat{B}Dv_n(x,I,\varphi)[\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{A} + \hat{B}v_n(x,I,\varphi)][\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot \hat{E}Dv_n(x,I,\varphi)[\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \Big\} [\hat{C} + \hat{E}v_i^n(x)]^{-1} + \\
&\quad + \Big\{ [D\hat{A} + (D\hat{B})v_n(x,I,\varphi)][\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{A} + \hat{B}v_n(x,I,\varphi)][\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot [D\hat{C} + (D\hat{E})v_n(x,I,\varphi)] \cdot \\
&\quad \cdot\ [\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1} \Big\} [\hat{C} + \hat{E}v_n(x,I,\varphi)]^{-1}.
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

Il motivo di questa riscrittura è che i termini contenuti nella seconda parentesi graffa dipendono soltanto da v_n (che abbiamo dimostrato essere una successione di Cauchy) e non da Dv_n. Perciò il secondo termine ha la forma di $Z(v_n(\cdot))$ dove $Z(\cdot)$ è una funzione continua. Perciò

$$\lim_{n\to\infty} |Z(v_n(x,I,\varphi)) - Z(v_{n-1}(x,I,\varphi))| = 0\,.$$

La derivata seconda

$$D^2u(x,I,\varphi) \equiv Dv(x)$$

è una mappa bilineare da $\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k$ in $\mathbb{R}^l$. Di conseguenza è un elemento di $L^2(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l)$ che è in maniera naturale identificato con

$$L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l))\,.$$

Se u fosse C^2, allora

$$Dv = D^2u \in C^0\left(\mathcal{D}_1, L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, L(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l))\right)\,,$$

che è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica indotta dalla seguente norma:

$$|Dv| \equiv \sup_{\mathcal{D}_1} |Dv(x)|\,.$$

Ora vorremmo mostrare che $\{Dv_n\}$ è una successione di Cauchy. Useremo le stime (5.16):

$$\begin{aligned}
&|\hat{A}|,\ |\hat{B}|,\ |\hat{C}|,\ |\hat{C}^{-1}|,\ |\hat{E}| \le Q \\
&|\hat{A}| < \eta \\
&|\hat{B}| < \frac{1}{2} \\
&|\hat{B}||\hat{C}^{-1}| < \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Inoltre abbiamo anche ricavato le seguenti stime (vedi (5.32)):

$$1 - 2Q^2\delta \le |[\mathbb{I} + \hat{E}v_k\hat{C}^{-1}]^{-1}| \le 1 + 2Q\delta^2\,;$$

osserviamo che la prima parte della stima si ottiene usando (5.22) ed osservando che:

$$\begin{aligned}
|[\mathbb{I} + \hat{E}v_k\hat{C}^{-1}]^{-1}| &= |\mathbb{I} - \hat{E}v_k\hat{C}^{-1}[\mathbb{I} + \hat{E}v_k\hat{C}^{-1}]^{-1}| \ge \\
&\ge 1 - Q^2\delta(1 + 2Q^2\delta) = 1 - Q^2\delta - 2(Q^2\delta)^2 \ge \\
&\ge 1 - Q^2\delta - \frac{1}{2}Q^2\delta \ge 1 - 2Q^2\delta\,.
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora una serie di lemmi che ci forniranno gli elementi necessari per concludere la tesi.

Lemma 5.2.17. *Per ε, δ, η e λ sufficientemente piccoli, $\{Dv_{n+1}\}$ è una successione limitata.*

Dimostrazione. E' sufficiente mostrare che

$$|Dv_{n+1}| \leq \tilde{M}$$

per ogni n e per un'opportuna $\tilde{M}$. Usando la (5.46), (5.12), le stime precedenti e la proposizione 5.2.12, e definendo

$$K \equiv \sup_n |Z(v_n)| < \infty$$

(in quanto la Z è continua e la successione $\{v_n\}_n$ è di Cauchy), otteniamo:

$$\begin{aligned}
|Dv_{n+1}| &\leq [|\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^2(1+2\delta Q^2)^2 + \\
&+ \delta|\hat{E}||\hat{C}^{-1}|^2(1+2\delta Q^2)^2]|Dv_n| + |Z(v_n)| \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{2}+\delta Q^3\right)(1+2\delta Q^2)^2|Dv_n| + K \leq \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\delta Q^3\right)^3 |Dv_n| + K \leq \\
&\leq \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\delta Q^3\right)^3\right]^n |Dv_0| + K\sum_{j=0}^{n-1}[\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\delta Q^3)^3]^j .
\end{aligned}$$

Quindi, affinché esista un *upper bound*, dobbiamo richiedere:

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\delta Q^3)^3 < 1 ,$$

cioè è sufficiente imporre

$$\delta Q^3 < \frac{1}{4} . \tag{5.47}$$

□

Lemma 5.2.18. *Per ε, δ, η e λ sufficientemente piccoli, si ottiene:*

$$\begin{aligned}
&|\hat{B}Dv_n[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \hat{B}Dv_{n-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}| \leq \\
&\leq |\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^2(1+2\delta Q^2)^2|Dv_n - Dv_{n-1}| + M_1|G(v_n) - G_1(v_{n-1})| ,
\end{aligned}$$

dove $G_1(\cdot)$ è una funzione continua e M_1 è una costante.

Dimostrazione. Infatti:

$$\begin{aligned}
&|\hat{B}Dv_n[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \hat{B}Dv_{n-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}| \leq \\
&\leq \Big|(\hat{B}Dv_n - \hat{B}Dv_{n-1})[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1} + \\
&\quad + \hat{B}Dv_n\left([\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - [\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}\right)\Big| \leq \\
&\leq |\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^2(1+2\delta Q^2)^2|Dv_n - Dv_{n-1}| + \\
&\quad + |\hat{B}||Dv_n||[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| \leq \\
&\leq |\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^2(1+2\delta Q^2)^2|Dv_n - Dv_{n-1}| + M_1|G_1(v_n) - G_1(v_{n-1})| ,
\end{aligned}$$

dove G_1 è una funzione continua nelle sue componenti. □

Lemma 5.2.19. *Per ε, δ, η e λ sufficientemente piccoli, si ottiene:*

$$\begin{aligned}
&|[\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}\hat{E}Dv_n[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \\
&-[\hat{A}+\hat{B}v_{n-1}][\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}\hat{E}Dv_{n-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| \leq \\
&\leq O(\delta)|Dv_n - Dv_{n-1}| + M_2|G_2(v_n) - G_2(v_{n-1})| + \\
&+ M_3|G_3(v_n) - G_3(v_{n-1})|
\end{aligned}$$

dove $G_2(\cdot)$ e $G_3(\cdot)$ sono funzioni continue ed M_2 e M_3 sono delle costanti.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&|[\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}\hat{E}Dv_n[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{A}+\hat{B}v_{n-1}][\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}\hat{E}Dv_{n-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| = \\
&= \ |[\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}(\hat{E}Dv_n - \hat{E}Dv_{n-1})[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1} + \\
&\quad + [\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}\hat{E}Dv_n([\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}) + ([\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \\
&\quad - [\hat{A}+\hat{B}v_{n-1}][\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1})\hat{E}Dv_{n-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| \leq \\
&\leq \ |\hat{A}+\hat{B}v_n||[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}||\hat{E}||Dv_n - Dv_{n-1}| \cdot \\
&\quad \cdot |[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}||[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| + \\
&\quad + |\hat{A}+\hat{B}v_n||[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}||\hat{E}||Dv_n| \cdot \\
&\quad \cdot |[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - [\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| + \\
&\quad + |[\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - [\hat{A}+\hat{B}v_{n-1}][\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}||\hat{E}| \cdot \\
&\quad \cdot |Dv_{n-1}||[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}||[\hat{C}+\hat{E}v_{n-1}]^{-1}| \leq \\
&\leq \ \delta Q^3(1+2\delta Q^2)^2|Dv_n - Dv_{n-1}| + \\
&\quad + \delta Q\tilde{M}|G_2(v_n) - G_2(v_{n-1})| + \\
&\quad + Q^3(1+2\delta Q^2)^2\tilde{M}|G_3(v_n) - G_3(v_{n-1})|\,,
\end{aligned}$$

dove M_2 e M_3 sono delle costanti e $G_1(\cdot)$ e $G_2(\cdot)$ sono delle opportune funzioni continue. □

Infine dimostriamo la seguente proposizione:

Proposizione 5.2.20. *Per ε, δ, η e λ sufficientemente piccoli, si ottiene:*

$$\begin{aligned}
|Dv_{n+1} - Dv_n| \ &\leq \ (|\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^2 + \delta Q^3)(1+2\delta Q^2)^2|Dv_{n+1} - Dv_n| + \\
&+ \ M_1|G_1(v_n) - G_1(v_{n-1})| + M_2|G_2(v_n) - G_2(v_{n-1})| + \\
&+ \ M_3|G_3(v_n) - G_3(v_{n-1})| + |Z(v_n) - Z(v_{n-1})|\,.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente da (5.46) e dai lemmi 5.2.17, 5.2.18 e 5.2.19. □

Possiamo quindi dimostrare il nostro risultato relativo alla derivata seconda:

Proposizione 5.2.21. *Per* ε, δ, η *e* λ *sufficientemente piccoli,* $\{Dv_n\}$ *converge ad un elemento* Dv*, che è la derivata seconda di* u*. Inoltre* Dv *soddisfa* (5.46).

Dimostrazione. Sappiamo che $\{v_n\}_n$ è una successione di Cauchy che converge a v, e che v è la derivata di u. Inoltre ciascuna v_n è differenziabile. Per ipotesi sappiamo che $|\hat{B}||\hat{C}^{-1}| < \frac{1}{2}$; inoltre, imponendo la condizione:

$$\delta Q^3 < \frac{1}{8}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}(|\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^2 + \delta Q^3)(1 + 2\delta Q^2)^2 &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 \leq \\ &\leq \frac{125}{128}\,.\end{aligned}$$

Quindi segue dalla proposizione 5.2.20 che $\{Dv_n\}$ è una successione di Cauchy, quindi converge ad un limite che indicheremo Dv. Vorremmo mostrare che

$$Dv = D^2 u\,;$$

questo segue immediatamente dal fatto che la convergenza è uniforme e che le v_n sono differenziabili.
Inoltre v soddisfa l'equazione (5.46) per costruzione. □

Consideriamo ora il caso della derivata p-sima di u, con $1 \leq p \leq r - 1$.

Se u fosse C^p, allora $D^p u(x, I, \varphi)$ sarebbe una mappa p-lineare da $\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k$ in $\mathbb{R}^l$, in particolare:

$$D^p u \in C^0(\mathcal{D}_1,\, L^p(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l))\,.$$

Introduciamo una norma operatoriale, che denoteremo con $|\cdot|$ sullo spazio $L^p(\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{T}^k, \mathbb{R}^l)$, e definiamo:

$$|w| = \sup_{\mathcal{D}_1} |D^p u(x, I, \varphi)|\,.$$

Ricaveremo anche in questo caso un'equazione formale che dovrà essere soddisfatta dalla derivata p-sima. Ricordiamo l'equazione che avevamo visto nel caso $p = 2$:

$$\begin{aligned}&Dv_{n+1}(\xi) = \\ &\quad = \Big\{\hat{B}Dv_n[\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1} - [\hat{A} + \hat{B}v_n][\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1}\hat{E}Dv_n[\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1}\Big\} \cdot \\ &\qquad \cdot [\hat{C} + \hat{E}v_i^n(x)]^{-1} + \Big\{[D\hat{A} + (D\hat{B})v_n][\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1} - \\ &\qquad - [\hat{A} + \hat{B}v_n][\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1}[D\hat{C} + (D\hat{E})v_n] \cdot \\ &\qquad \cdot\; [\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1}\Big\}[\hat{C} + \hat{E}v_n]^{-1}.\end{aligned}$$

Differenziamo ora tale uguaglianza $p-2$ volte, ottenendo:

$$\begin{aligned} D^{p-1}v_{n+1} &= \Big\{ \hat{B}D^{p-1}v_n[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1} - \\ &+ [\hat{A}+\hat{B}v_n][\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}\hat{E}D^{p-1}v_n[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}\Big\} \cdot \\ &\cdot \underbrace{[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}\dots[\hat{C}+\hat{E}v_n]^{-1}}_{p-1 \text{ volte}} + \\ &+ F(v_n, Dv_n, D^2v_n, \dots, D^{p-2}v_n)\,, \end{aligned}$$

dove F è una funzione continua in ogni sua componente. Si possono dimostrare anche in questo caso dei risultati analoghi a quelli visti nei lemmi 5.2.17, 5.2.18 e 5.2.19, e quindi si ottiene una stima della forma:

$$\begin{aligned} |D^{p-1}v_{n+1} - D^{p-1}v_n| &\le (|\hat{B}||\hat{C}^{-1}|^p + \delta Q^p)(1+2\delta Q^2)^p |D^p v_{n+1} - D^p v_n| + \\ &+ |F(v_n, Dv_n, D^2v_n, \dots, D^{p-2}v_n) - \\ &- F(v_{n-1}, Dv_{n-1}, D^2v_{n-1}, \dots, D^{p-2}v_{n-1})|\,. \end{aligned}$$

Quindi assumendo che la u è C^{p-1}, possiamo ripetere esattamente la dimostrazione della proposizione 5.2.21 e dimostrare che è C^p. La condizione da richiedere sarà :

$$\delta Q^{p+1} \le \frac{1}{8}\,. \tag{5.48}$$

Questo completa la dimostrazione della conservazione della varietà instabile.

5.2.2 Conservazione locale della varietà $W^s(\mathbb{M})$

La dimostrazione della conservazione della varietà $W^s(\mathbb{M})$ segue esattamente le linee sviluppate nel paragrafo precedente. Infatti basta osservare che attraverso un'inversione temporale, tale varietà diventa proprio la varietà instabile del sistema così ottenuto. Quindi possiamo concludere l'esistenza di una varietà positivamente invariante (in realtà è *localmente invariante*, nel senso già discusso prima), C^{r-1} - diffeomorfa a $W^s(\mathbb{M})$, che denoteremo $W^{s,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$. Naturalmente le condizioni che dovremo imporre alla taglia della perturbazione saranno praticamente equivalenti a quelle viste nel caso della varietà stabile.

Osservazione. Chiaramente una volta note $W^{u,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ e $W^{s,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$, è possibile costruire le varietà *globali*, semplicemente considerandone l'evoluzione sotto l'azione del flusso del nostro sistema. Possiamo quindi definire:

$$\begin{aligned} W^{u,\varepsilon} &\equiv \bigcup_{t\ge 0} \Phi_t\,(W^{u,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})) \\ W^{s,\varepsilon} &\equiv \bigcup_{t\le 0} \Phi_t\,(W^{s,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}))\,. \end{aligned}$$

Le varietà così costruite sono invarianti per l'azione del flusso hamiltoniano.

5.2.3 Conservazione locale della varietà $\mathbb{M}$

Una volta conclusa la sopravvivenza locale delle varietà stabile e instabile, vediamo come sia possibile concludere la sopravvivenza (sempre locale) della varietà $\mathbb{M}$.

Consideriamo infatti:

$$\mathbb{M}_\varepsilon = W^{s,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) \cap W^{u,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})\,.$$

Vorremo mostrare che tale varietà è C^{r-1} - diffeomorfa a $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{M}$ ed invariante (localmente) per il flusso perturbato. Ricordiamo che le varietà $W^{s,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})$ e $W^{u,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})$ costruite nei paragrafi precedenti, sono state ottenute come grafico di funzioni. In particolare:

$$\begin{aligned} W^{u,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) &= \{y = u(x, I, \varphi) : \quad x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k\,\} \\ W^{s,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) &= \{x = w(y, I, \varphi) : \quad y \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k\,\}\,, \end{aligned}$$

con u e w funzioni C^{r-1} nel loro dominio di definizione, tali che (vedi la definizione dello spazio S delle sezioni di $N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}}$ e la proposizione 5.2.12):

$$\begin{aligned} |u| &\le \lambda \\ |w| &\le \lambda \\ |Du| &\le \delta \\ |Dw| &\le \delta\,, \end{aligned} \tag{5.49}$$

inoltre sono lipschitziane con costante di Lipschitz minore di δ.

Dimostreremo ora la seguente proposizione.

Proposizione 5.2.22. *L'insieme*

$$\mathbb{M}_\varepsilon = W^{s,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) \cap W^{u,\,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})$$

i) è non vuoto;

ii) è contenuto nell'insieme

$$N_{\lambda\times\lambda} \equiv \{(x, y, I, f) : \quad |x| < \lambda\,,\ |y| < \lambda\,,\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0)\}\,;$$

iii) è C^{r-1}-diffeomorfo a $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{M}$;

iv) è localmente invariante.

Osservazione. Osserviamo come la proposizione precedente ci fornisca anche delle informazioni sulla distanza di $\mathbb{M}_\varepsilon$ da $\mathbb{M}$.

Dimostrazione. i) Cominciamo dimostrando che tale insieme è non vuoto. A tal fine ricordiamo il seguente risultato (per la cui dimostrazione rimandiamo a [25]):

Proposizione 5.2.23 (Teorema del punto fisso). *Sia F uno spazio di Banach e V una sfera aperta di centro y_0 e raggio β. Sia v un'applicazione da V in F tale che:*

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \qquad \forall\, y_1,\, y_2\, \in V$$

con $0 \leq k < 1$. Allora se

$$|v(y_0) - y_0| < \beta(1-k)$$

esiste uno ed un solo punto $z \in V$ tale che:

$$z = v(z)$$

Vediamo come possiamo concludere il nostro asserto utilizzando tale risultato. Fissiamo $(I, \varphi) \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k$ e consideriamo l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} \psi_{(I,\varphi)} : B_{\frac{\rho_1}{4}}(0) & \longrightarrow & \mathbb{R}^l \\ x & \longrightarrow & w(u(x, I, \varphi), I, \varphi)\,. \end{array}$$

Questa applicazione soddisfa le ipotesi della proposizione precedente con $y_0 = 0$; infatti:

1. è lipschitziana con costante di Lipschitz minore di δ^2:

$$\begin{aligned} &|w(u(x, I, \varphi), I, \varphi) - w(u(x', I, \varphi), I, \varphi)| \leq \\ &\quad \leq \delta |u(x, I, \varphi) - u(x', I, \varphi)| \leq \\ &\quad \leq \delta^2 |x - x'|\,. \end{aligned}$$

2. abbiamo:

$$|w(u(0, I, \varphi), I, \varphi)| \leq \lambda < \frac{\rho_1}{4}(1 - \delta^2)\,;$$

infatti:

$$\lambda < \frac{\rho_1}{4}(1 - \delta^2)$$

in quanto per le assunzioni fatte su δ, sappiamo che

$$\delta < \frac{1}{8}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{4}(1 - \delta^2) &> \frac{\rho_1}{4}\frac{63}{64} > \\ &> \frac{\rho_1}{8} > \lambda\,. \end{aligned}$$

Quindi, usando la proposizione 5.2.23, possiamo concludere che esiste un punto $x_0 \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0)$ tale che:

$$w(u(x_0, I, \varphi), I, \varphi) = x_0 \,.$$

Indicando con

$$y_0 = u(x_0, I, \varphi)$$

otteniamo:

$$(x_0, u(x_0, I, \varphi), I, \varphi) = (w(y_0, I, \varphi), y_0, I, \varphi)$$

e quindi questo punto appartiene all'intersezione.

Osserviamo che per ogni punto (I, φ) esiste un unico punto che appartiene all'intersezione, quindi esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{D}_1$ e $\mathbb{M}_\varepsilon$.

ii) E' una semplice riscrittura delle proprietà (5.49).

iii) E' una conseguenza del teorema delle funzioni implicite (vedi [16]), applicato alla relazione:

$$\begin{cases} x = w(y, I, \varphi) \\ y = u(x, I, \varphi) \,. \end{cases}$$

Infatti, la matrice:

$$J \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -w_x \\ -u_y & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, in quanto per le proprietà (5.49)

$$|w_x u_y| \leq \delta^2 < 1 \,.$$

iv) Vediamo ora cosa possiamo dire sulle proprietà di invarianza di $\mathbb{M}_\varepsilon$. Consideriamo un punto $p = (x, y, I, \varphi) \in \mathbb{M}_\varepsilon$. Per come abbiamo definito $\mathbb{M}_\varepsilon$ sappiamo che:

$$p \in W^{u,\,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}) \cap W^{s,\,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}) \,;$$

dimostriamo che per ogni punto p esiste un $t_0 = t_0(p) > 0$ tale che:

$$\Phi_t(p) \in \mathbb{M}_\varepsilon \qquad \forall\, t \in (-t_0, t_0) \,.$$

Sarà sufficiente far vedere che per ogni $t \in (-t_0, t_0)$:

$$\Phi_t(p) \in W^{u,\,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}) \tag{5.50}$$

$$\Phi_t(p) \in W^{s,\,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}) \,. \tag{5.51}$$

Dimostriamolo nel caso (5.50), si procederà in maniera analoga nell'altro caso. Per le proprietà di $W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})$ sappiamo che

$$\Phi_t(p) \quad \in \quad W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) \qquad \forall\, t \leq 0\,;$$

d'altronde sappiamo dalla (5.28) che:

$$\Phi_t\left(W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})\right) \cap N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}} = W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})\,. \tag{5.52}$$

Quindi prendendo un $t > 0$ sufficientemente piccolo tale che:

$$\Phi_t(p) \in N_{\lambda|_{\mathcal{D}_1}}\,,$$

possiamo concludere da (5.52) che

$$\Phi_t(p) \in W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M})\,,$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare.

□

Osservazione. Osserviamo che la proprietà di invarianza di $\mathbb{M}_\varepsilon$ che abbiamo dimostrato è leggermente diversa dall'usuale definizione di invarianza, in quanto punti in $\mathbb{M}_\varepsilon$ possono abbandonare la varietà passando attraverso il bordo. Si tratta piuttosto di un'*invarianza locale*. Questo fatto non ci creerà particolari problemi, in quanto noi ci limiteremo a considerare soltanto i tori invarianti in $\mathbb{M}_\varepsilon$ e non l'intera varietà. Del resto non ci si poteva aspettare che tale varietà fosse invariante (nel senso solito) in quanto contiene anche le orbite che originariamente giacevano sui tori distrutti dalla perturbazione e che possono dare origine a fenomeni di diffusione.

Osserviamo inoltre che la varietà $\mathbb{M}_\varepsilon$ può essere anche rappresentata nella forma:

$$\mathbb{M}_\varepsilon = \Big\{(x,y,I,\varphi): \quad x = \tilde{u}(I,\varphi),\ y = \tilde{w}(I,\varphi),\ I \in B_{\frac{\varrho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k\Big\}$$

con $\tilde{u}$ e $\tilde{w}$ funzioni $C^{r-1}(B_{\frac{\varrho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k)$, e tali che

$$|\tilde{u}| < \lambda \qquad \text{e } |\tilde{w}| < \lambda\,.$$

5.2.4 Riassunto risultati ottenuti

Prima di procedere oltre, riassumiamo tutte le stime che abbiamo ottenuto precedentemente e che devono essere soddisfatte dai valori dei parametri.

Abbiamo definito (vedi (5.8), (5.12) e la proposizione 5.2.4):

$$
\begin{aligned}
M &\geq \left\{|A|, \left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|\right\} \\
M_1 &\geq |DH_1| \\
M_2 &\geq |D^2 H_1| \\
M_3 &\geq \left|\frac{\partial^3 h}{\partial I^3}\right| \\
Q &= e^{MT} + 2\varepsilon M_2 T e^{(M_3+2M)T} \leq 2e^{MT} \equiv \tilde{Q} \\
T &\geq \max\left\{\frac{8M(r-1)^2}{\sigma_1^2}, \frac{2\log 4}{\sigma_1}\right\}.
\end{aligned}
$$

Utilizzando (5.14), (5.13), (5.9), (5.10), (5.11), (5.21), (5.22), (5.23), (5.24), (5.27), (5.33), (5.47) e (5.48), ed eliminando quelle ridondanti, otteniamo le seguenti condizioni sui parametri:

- $8\delta Q^r \leq 1$
- $8\eta Q \leq \delta$
- $8\varepsilon\,[r + e^{\sigma_1 T}]\,\max\{M_1, M_2\}\,T\,e^{3\max\{M,M_3\}\,T} \leq \min\left\{\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \eta\right\}$
- $2e^{-\sigma_1 T}\lambda \leq \eta$.

Indicando con

$$
c_0 := 8\,[r + e^{\sigma_1 T}]\,\max\{M_1, M_2\}\,T\,e^{3\max\{M,M_3\}\,T}\,, \tag{5.53}
$$

e prendendo

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \varepsilon \\
\eta &= c_0\varepsilon \\
\delta &= 8c_0\tilde{Q}\varepsilon
\end{aligned}
$$

otteniamo che le condizioni sopra, possono essere riassunte in:

$$
128 c_0 \tilde{Q}^{r+1}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}\,. \tag{5.54}
$$

Possiamo riassumere quello finora dimostrato nel seguente risultato:

Teorema 5.2.24. *Sia $n = l + k \geq 2$ (con $k \geq 1$ e $l \geq 1$), $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq 3$, ρ_1, $\rho_2 > 0$.*
Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ della forma:

$$
H_0(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I)
$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k \end{aligned}$$

con U aperto di $\mathbb{R}^k$.

Assumiamo, inoltre, che valgano le seguenti proprietà:

1. *A è una matrice definita positiva;*
2. *$|h|_{C^r} \leq M$.*

Tale sistema ammette una varietà invariante $2k$-dimensionale, data da:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, I, \varphi) : \ x = y = 0\,,\ I \in U\,,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\}$$

consistente in una famiglia k-parametrica di tori k-dimensionali, cioè:

$$\mathbb{M} = \bigcup_{I \in U} \mathbb{T}(I)\,,$$

dove

$$\mathbb{T}(I) \equiv \{(0, 0, I, \varphi)\,, \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\}.$$

Inoltre $\mathbb{M}$ possiede delle varietà stabili e instabili $(2k + l)$-dimensionali, date rispettivamente da:

$$\begin{aligned} W^s(\mathbb{M}) &\equiv \{(0, y, I, \varphi) : \ y \in \mathbb{R}^l,\ I \in \mathbb{R}^k,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{x = 0\} \\ W^u(\mathbb{M}) &\equiv \{(x, 0, I, \varphi) : \ x \in \mathbb{R}^l,\ I \in \mathbb{R}^k,\ \varphi \in \mathbb{T}^k\} = \{y = 0\}\,, \end{aligned}$$

anch'esse invarianti e costituite da traiettorie che le si avvicinano asintoticamente, per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$ rispettivamente.

Allora esistono

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(l, k, M, A, r, \rho_1, \rho_2) \qquad e \qquad C = C(l, A, k, M, r, \rho_1, \rho_2)$$

tali che valga quanto segue. Se consideriamo una perturbazione hamiltoniana del nostro sistema

$$\begin{aligned} H(x, y, I, \varphi) &= H_0(x, y, I, \varphi) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi) = \\ &= x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi) \end{aligned}$$

con

$$H_1 \in C^r(B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_2}(I_0) \times \mathbb{T}^k)$$

tale che $B_{\rho_2}(I_0) \subset U$ *e* $\varepsilon \leq \varepsilon^*$*, allora le varietà* $\mathbb{M}$*,* $W^u(\mathbb{M})$ *e* $W^s(\mathbb{M})$ *sopravvivono localmente a tale perturbazione; in particolare:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{M}_\varepsilon & = & \Big\{ x = \tilde{w}(I,\varphi),\, y = \tilde{u}(I,\varphi) : \quad I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \Big\} \\ W^{u,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) & = & \Big\{ y = u(x,I,\varphi) : \quad x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \Big\} \\ W^{s,\varepsilon}_{\text{loc}}(\mathbb{M}) & = & \Big\{ x = w(y,I,\varphi) : \quad y \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \Big\}\,, \end{array}$$

con $\tilde{u}$*,* $\tilde{w}$*,* u *e* w *funzioni* C^{r-1} *nel loro dominio di definizione tali che*

$$\begin{array}{rcl} |\tilde{u}|,\ |\tilde{w}|,\ |u|,\ |w| & \leq & \varepsilon \\ |D\tilde{u}|,\ |D\tilde{w}|,\ |Du|,\ |Dw| & \leq & C\varepsilon\,. \end{array}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene mettendo insieme i risultati visti nei paragrafi precedenti. In particolare la costante C verrà scelta nel seguente modo (vedi il riassunto delle costanti dato all'inizio di questo paragrafo):

$$C \equiv 128 c_0 \tilde{Q}^{r+1}$$

dove c_0 è la costante definita in (5.53). Per quanto riguarda ε^*, questo verrà scelto in modo da soddisfare (5.54), cioè

$$C\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}\,.$$

□

5.2.5 Conservazione dei tori parzialmente iperbolici in $\mathbb{M}$

Finora ci siamo limitati a considerare cosa succede localmente all'intera varietà $\mathbb{M}$ e alle sue varietà stabili e instabili. Vediamo ora di poter concludere qualcosa circa la conservazione dei tori parzialmente iperbolici che costituiscono $\mathbb{M}$. Prima di dimostrare il risultato principale di questo capitolo relativo alla sopravvivenza dei tori parzialmente iperbolici in $\mathbb{M}$ (corrispondenti a *frequenze diofantine*, per quanto riguarda le componenti associate al moto delle I e delle φ), dimostriamo un lemma fondamentale relativo alla struttura simplettica di $\mathbb{M}_\varepsilon$.

Lemma 5.2.25. *Sia* $(\mathbb{P}, \omega)$ *una varietà simplettica* $2n$*-dimensionale (con* $n = l + k$*), con coordinate locali*

$$X = (x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l) \qquad Z = (z_1, \ldots, z_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$$

e con forma simplettica

$$\omega = \sum_{i=1}^{l} dy_i \wedge dx_i + \sum_{i=1}^{k} dz_i \wedge d\varphi_i\,.$$

Consideriamo una famiglia di C^s-sottovarietà $\mathbb{P}_\varepsilon \subset \mathbb{P}$, con $1 \leq s \leq r$, dipendente da un parametro $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, della forma:

$$\mathbb{P}_\varepsilon = \{(X, Z) \in \mathbb{P} : \quad X = h(z) + \varepsilon b(Z, \varepsilon)\}$$

con

$$\begin{aligned} h &= (h_1, \ldots, h_{2l}) \\ b &= (b_1, \ldots, b_{2l}) \end{aligned}$$

funzioni C^s.

Sia H una funzione C^r su $\mathbb{P}$, tale che per ogni ε, $\mathbb{P}_\varepsilon$ sia una varietà integrale del campo vettoriale hamiltoniano

$$F_H : \mathbb{P} \longrightarrow T\mathbb{P}$$

definita da $i_{F_H}\omega = dH$.

Allora per ε sufficientemente piccolo si ha che:

i) $(\mathbb{P}_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ è una C^s-varietà simplettica $2k$-dimensionale, con $\omega_\varepsilon = \omega_{|\mathbb{P}_\varepsilon}$.

ii) $F_\varepsilon = F_{H|\mathbb{P}_\varepsilon}$ è un campo vettoriale hamiltoniano su $\mathbb{P}_\varepsilon$, con hamiltoniana $H_\varepsilon = H_{|\mathbb{P}_\varepsilon}$, cioè

$$i_{F_\varepsilon}\omega_\varepsilon = dH_\varepsilon \,.$$

Dimostrazione. Come prima cosa dimostriamo che ω_ε definisce una struttura simplettica su $\mathbb{P}_\varepsilon$. Su $\mathbb{P}_\varepsilon$ abbiamo:

$$\begin{aligned} dx_i &= \varepsilon D_\varphi b_i \, d\varphi + D_z(h_i + \varepsilon b_i) \, dz && i = 1, \ldots, l \\ dy_j &= \varepsilon D_\varphi b_{j+l} \, d\varphi + D_z(h_{j+l} + \varepsilon b_{j+l}) \, dz && j = 1, \ldots, l \,. \end{aligned}$$

Attraverso un semplice conto, otteniamo:

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{k} [1 + \varepsilon \left(D_\varphi b_{i+l} D_z(h_i + \varepsilon b_i) - D_\varphi b_i D_z(h_{i+l} + \varepsilon b_{i+l}) \right)] \, dz_i \wedge d\varphi_i = \\ &= \sum_{i=1}^{k} (1 + O(\varepsilon)) dz_i \wedge d\varphi_i \,, \end{aligned} \tag{5.55}$$

e quindi per ε sufficientemente piccolo, la nostra 2-forma è non degenere su $\mathbb{P}_\varepsilon$. Sia

$$e_\varepsilon = (h + \varepsilon b, \mathrm{id}_{\,2k})$$

l'*embedding* di $\mathbb{P}_\varepsilon$, dove $\mathrm{id}_{\,2k}$ denota la mappa identità. Allora

$$d\omega_\varepsilon = d(e_\varepsilon^* \omega) = e_\varepsilon^* d(\omega) = 0 \,;$$

questo mostra che ω_ε è chiusa su $\mathbb{P}_\varepsilon$ (dove con e_ε^* denotiamo il *pull-back* di e_ε). Questo fatto, insieme alla non degenerazione, ci permette di concludere il punto i) del lemma.

Per mostrare ii) , consideriamo un punto $p_\varepsilon \in e_\varepsilon^{-1}(\mathbb{P}_\varepsilon)$ e $u \in T_{p_\varepsilon}\mathbb{R}^{2k}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} i_{F_\varepsilon}\omega_\varepsilon[p_\varepsilon](u) &= e_\varepsilon^*\omega[p_\varepsilon](e_\varepsilon^* F_H(p_\varepsilon), u) = \\ &= \omega[e_\varepsilon(p_\varepsilon)](de_\varepsilon de_\varepsilon^{-1} F_H(e_\varepsilon(p_\varepsilon)), de_\varepsilon u) = \\ &= \omega[e_\varepsilon(p_\varepsilon)](F_H(e_\varepsilon(p_\varepsilon)), de_\varepsilon u) = \\ &= dH[e_\varepsilon(p_\varepsilon)](de_\varepsilon u) = \\ &= d(e_\varepsilon^* H)[p_\varepsilon](u) = \\ &= dH_\varepsilon[p_\varepsilon](u) \end{aligned}$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Applichiamo ora il lemma precedente alla nostra varietà $\mathbb{M}_\varepsilon$.

Proposizione 5.2.26. *Per valori di ε sufficientemente piccoli, la dinamica del nostro sistema ristretto ad $\mathbb{M}_\varepsilon$ è ancora hamiltoniana, con funzione di Hamilton:*

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon H_1(0,0,I,\varphi) + R_\varepsilon(I,\varphi)\,,$$

dove

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(I,\varphi) &= O(\varepsilon^2) \;\equiv\; (\tilde{u}(I,\varphi)\,\cdot\, A\tilde{v}(I,\varphi)) + \\ &+ \;\varepsilon \int_0^1 \partial_{x,y}[H_1(t\tilde{u}(I,\varphi), t\tilde{v}(I,\varphi), I, \varphi)]\cdot(\tilde{u}(I,\varphi),\tilde{v}(I,\varphi))\,dt\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. E' un semplice corollario del lemma precedente. L'unica cosa che dobbiamo verificare è che sia soddisfatta la condizione di piccolezza del parametro ε, in modo che la forma simplettica ω_ε sia non degenere. Tale condizione si ottiene da (5.55), con $h = 0$ e $\varepsilon b = (\tilde{u}, \tilde{v})$:

$$1 \;>\; 2\delta^2 = 128\varepsilon^2 c_0^2 Q^2 = (128\varepsilon c_0 Q^2)(\varepsilon c_0)$$

che è chiaramente soddisfatta, come si vede facilmente usando (5.54). □

Possiamo quindi considerare il sistema hamiltoniano ristretto a tale varietà, ed applicare i teoremi dimostrati nei capitoli precedenti per il sistema così ottenuto(facendo attenzione che tale sistema è C^{r-1}, per quanto abbiamo dimostrato circa la regolarità di M_ε).

Teorema 5.2.27. (Conservazione tori parzialmente iperbolici, caso differenziabile)

Sia $n = l + k \geq 2$ *(con* $k \geq 1$ *e* $l \geq 1$*),* $\tau > k - 1$*,* $\gamma > 0$*,* $m > 0$*,* $r > 2\tau + m + 3$ *(con* $r \in \mathbb{N}$*),* $M \geq 1$*,* ρ_1*,* $\rho_2 > 0$ *e* $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ *un vettore* (γ, τ)*-diofantino. Sia inoltre* $U \subset \mathbb{R}^k$ *un dominio aperto contenente* $B_{\rho_2}(I_0)$*.*
Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ *della forma:*

$$H(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi)$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \dots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k . \end{aligned}$$

Assumiamo, inoltre, che:

1. *A sia una matrice definita positiva;*
2. $$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial I}(I_0) = \omega_0 \\ |h|_{C^r} \leq M \\ \left| \left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I_0) \right)^{-1} \right| \leq M . \end{cases}$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0 ,$$

in modo che se

$$\tilde{c}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}$$

e per qualche $\delta \leq \delta^*$ *si ha*

$$|\varepsilon H_1|_{C^s} \leq M\delta^{r-s} \qquad \textit{per ogni } \ 0 \leq s \leq r ,$$

allora esiste una soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H*,*

$$\begin{cases} I = \hat{I}(\xi) + I_0 \\ \varphi = \hat{\varphi}(\xi) \\ x = \hat{x}(\xi) = u(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ y = \hat{y}(\xi) = v(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) , \end{cases}$$

dove

$$u,\ v \in C^{r-1}(B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k) ,$$

tale che:

(a)

$$\begin{cases} D_{\omega_0}\hat{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial I}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ \\ D_{\omega_0}\hat{I} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi))\,; \end{cases}$$

b) $\hat{\varphi}(\xi) - \xi$ *e* $\hat{I}(\xi)$ *sono periodiche con periodo* 1 *;*

c) $\hat{\varphi} \in C^s(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ *e* $\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1} + I_0 \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^k, B_{\rho_2}(I_0))$ *per ogni* $s \le m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$.
Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\hat{\varphi} - \mathrm{id}\,|_{C^s} \le \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+1-s} & 0 < s \le m+1\,, \\ |\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1}|_{C^s} \le \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+\tau+1-s} & 0 < s \le m+\tau+1\,, \end{cases}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$ *.*

d) u *e* v *soddisfano le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} |u|,\ |w| &\le \varepsilon \\ |Du|,\ |Dw| &\le \tilde{c}\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. E' una conseguenza di quanto abbiamo ampliamente discusso nei paragrafi precedenti, nel teorema 5.2.24, nella proposizione 5.2.26 e nel teorema 3.3.1. In particolare la costante $\tilde{c}$ è scelta nel seguente modo:

$$\tilde{c} = \max\{C,\, c\}$$

dove C è la costante trovata nel teorema 5.2.24, mentre c è la costante del teorema 3.3.1 (quella che in quel caso avevamo denotato $\tilde{c}$). □

Dimostriamo ora un risultato analogo nel caso isoenergetico (il metodo usato si presta ad essere applicato anche in questo contesto diverso).

Teorema 5.2.28. (Conservazione tori parzialmente iperbolici, caso differenziabile - isoenergetico)
Sia $n = l + k \ge 2$ *(con* $k \ge 1$ *e* $l \ge 1$*),* $\tau > k-1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $r > 2\tau + m + 3$ *(con* $r \in \mathbb{N}$*),* $M \ge 1$, ρ_1, $\rho_2 > 0$, $E \in \mathbb{R}$ *e* $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ *un vettore* (γ, τ)*-diofantino, tale che* $|\omega_0| \le M$*. Sia inoltre* $U \subset \mathbb{R}^k$ *un dominio aperto contenente* $B_{\rho_2}(I_0)$*. Consideriamo una hamiltoniana* $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ *della forma:*

$$H(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi)$$

dove

$$\begin{array}{rcl} x &=& (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &=& (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &=& (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &=& (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k \,. \end{array}$$

Assumiamo, inoltre, che:

1. *A sia una matrice definita positiva;*
2. $$\begin{cases} h(I_0) = E \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I_0) = \omega_0 \\ |h|_{C^r} \leq M \\ \left|(\mathcal{A}(I_0))^{-1}\right| \leq M \,, \end{cases}$$

   dove

   $$\mathcal{A}(I) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I) & -\left(\dfrac{\partial h}{\partial I}(I)\right)^T \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) & 0 \end{pmatrix} .$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0 \,,$$

in modo che se

$$\tilde{c}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}$$

e per qualche $\delta \leq \delta^*$ si ha

$$|\varepsilon H_1|_{C^s} \leq M\delta^{r-s} \qquad \textit{per ogni } \; 0 \leq s \leq r \,,$$

allora esiste una soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H,

$$\begin{cases} I = \hat{I}(\xi) + I_0 \\ \varphi = \hat{\varphi}(\xi) \\ x = \hat{x}(\xi) = u(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ y = \hat{y}(\xi) = v(\hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \,, \end{cases}$$

dove

$$u, \; v \in C^{r-1}(B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k) \,,$$

tale che:

(a)

$$\begin{cases} D_{(1+\theta)\omega_0}\hat{\varphi} = & \dfrac{\partial H}{\partial I}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) \\ \\ D_{(1+\theta)\omega_0}\hat{I} = & -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)), \end{cases}$$

con $|\theta| \le 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}$ *(per un'opportuna costante* $\tilde{c}_2$*).*

b) $\hat{\varphi}(\xi) - \xi$ *e* $\hat{I}(\xi)$ *sono periodiche con periodo* 1 *;*

c) $H(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi) + I_0, \hat{\varphi}(\xi)) = E$*, per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^k$*.*

d) $\hat{\varphi} \in C^s(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ *e* $\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1} + I_0 \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^k, B_{\rho_2}(I_0))$ *per ogni* $s \le m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*.*
Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\hat{\varphi} - \mathrm{id}\,|_{C^s} \le \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+1-s} & 0 < s \le m+1\,, \\ |\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1}|_{C^s} \le \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+\tau+1-s} & 0 < s \le m+\tau+1\,, \end{cases}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$ *.*

e) u *e* v *soddisfano le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} |u|,\ |w| &\le \varepsilon \\ |Du|,\ |Dw| &\le \tilde{c}\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. E' una conseguenza di quanto abbiamo ampliamente discusso nei paragrafi precedenti, nel teorema 5.2.24, nella proposizione 5.2.26 e nel teorema 4.3.1. In particolare la costante $\tilde{c}$ è scelta nel seguente modo:

$$\tilde{c} = \max\{C,\, c\}$$

dove C è la costante trovata nel teorema 5.2.24, mentre c è la costante del teorema 4.3.1 (quella che in quel caso avevamo denotato $\tilde{c}$). □

Appendice A

Moti lineari su $\mathbb{T}^n$

Vogliamo dimostrare il teorema 1.1.3. Divideremo la dimostrazione in una serie di risultati parziali, di per sé non privi di un certo interesse.

Lemma A.0.1. *$(e_1, \dots, e_k)$ e $(e'_1, \dots, e'_k)$ sono due k-ple di generatori di uno stesso sottogruppo discreto G di $\mathbb{R}^n$ se e solo se esiste una matrice A, $k \times k$ a coefficienti interi e con determinante uguale a 1 (cioè $A \in \mathrm{SL}\,(k, \mathbb{Z})$), tale che per ogni $i = 1, \dots, k$ si abbia:*

$$e'_i = \sum_{j=1}^{k} A_{ij} e_j \,. \tag{A.1}$$

Dimostrazione. Evidentemente se $(e_1, \dots, e_k)$ genera G e $A \in \mathrm{SL}\,(k, \mathbb{Z})$, la k-pla $(e'_1, \dots, e'_k)$ definita dalla (A.1) genera un sottogruppo discreto G' di $\mathbb{R}^n$. Inoltre $G' \subset G$, poiché se $t' \in G'$, allora:

$$t' \;=\; \sum_{i=1}^{k} m'_i e'_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} m'_i A_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{k} m_j e_j$$

dove

$$m_j = \sum_{i=1}^{k} m'_i A_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Poiché $A^{-1} \in \mathrm{SL}\,(k, \mathbb{Z})$, si mostra immediatamente che anche $G \subset G'$.

Viceversa, se anche $(e'_1, \dots, e'_k)$ genera G, sia A la matrice definita dalla (A.1) che trasforma $(e_1, \dots, e_k)$ in $(e'_1, \dots, e'_k)$. I coefficienti di A sono interi, poiché $e'_i \in G$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Applicando lo stesso argomento ad A^{-1} si vede che anch'essa deve avere i coefficienti interi. Esistono dunque due interi m e $\tilde{m}$ tali che $\det(A) = m$ e $\det(A^{-1}) = \tilde{m}$. Ma

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

da cui segue che $\tilde{m} = m = 1$ e quindi $A \in \mathrm{SL}(k, \mathbb{Z})$. $\square$

Consideriamo ora un'arbitraria trasformazione lineare invertibile di coordinate del toro $\mathbb{T}^n$. Per il lemma precedente, la sua forma generale è:

$$\chi' = M\chi \tag{A.2}$$

con $M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$; di conseguenza la frequenza del moto diventerà:

$$\omega' = M\omega\,.$$

Lemma A.0.2. *Sia M_ω il modulo di risonanza corrispondente a ω. Esiste una trasformazione di coordinate della forma (A.2) del toro $\mathbb{T}^n$, tale che*

$$\omega'_{n-m+1} = \ldots = \omega'_n = 0$$

dove $m = \dim M_\omega$.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che ogni collezione $(e_1, \ldots, e_n)$ di n vettori di $\mathbb{Z}^n$ è una base di $\mathbb{Z}^n$ se e soltanto se il parallelepipedo di spigoli $e_1, \ldots, e_n$ ha il volume uguale a 1. Infatti la base canonica

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

genera l'ipercubo di lato 1, e per il lemma A.0.1 ogni altra base di $\mathbb{Z}^n$ è legata a quella canonica da una trasformazione lineare che conserva il volume.

Cerchiamo allora di completare una base qualunque $(f_1, \ldots, f_m)$ di M_ω, con $n - m$ vettori linearmente indipendenti $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-m})$, in modo che

$$B = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-m},\ f_1, \ldots, f_m)$$

sia una base di $\mathbb{Z}^n$. Se questo fosse possibile, allora il lemma si dimostrerebbe immediatamente, costruendo la matrice M le cui righe sono costituite dalle componenti dei vettori di B; infatti si avrebbe

$$\omega_{n-m+j} = \omega \cdot f_j = 0$$

per ogni $j = 1, \ldots, m$. Inoltre la matrice M ha componenti intere e determinante uguale a ± 1 per l'osservazione precedente, e quindi induce una trasformazione invertibile di coordinate su toro $\mathbb{T}^n$ e soddisfa la tesi.

D'altronde è immediato dimostrare che una tale scelta di $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-m})$ è possibile. Infatti, siano $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-m})$ vettori linearmente indipendenti di

$$M_\omega^\perp = \{\mu \in \mathbb{Z}^n : \quad \mu \cdot k = 0 \quad \text{per ogni } k \in M_\omega\}.$$

Evidentemente

$$(\mu_1, \ldots, \mu_{n-m},\ f_1, \ldots, f_m)$$

è una base di $\mathbb{R}^n$. Se il volume del parallelepipedo generato è uguale a 1, essa è anche una base di $\mathbb{Z}^n$ e la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, poiché tale volume è necessariamente uguale a un numero intero positivo, esisterà un vettore $v \in \mathbb{Z}^n$ non nullo all'interno del parallelepipedo tale che:

$$v = \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_{n-m} \mu_{n-m} + \lambda_{n-m+1} f_1 + \ldots + \lambda_n f_m$$

con $0 \leq \lambda_j < 1$ e λ_j razionale opportuno, per ogni $j = 1, \ldots, n$. Poiché il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da M_ω non contiene punti di $\mathbb{Z}^n$ diversi da quelli di M_ω, allora v non può appartenere a M_ω (che non ha vettori interni al parallelepipedo), e non è allora restrittivo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0$. Quindi sostituendo v a μ_1, abbiamo una nuova n-pla di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\det \begin{pmatrix} v \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-m} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \leq \det \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-m} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} - 1 \, .$$

Il volume del parallelepipedo generato dalla base è diminuito di almeno un'unità. Se non è ancora 1, ripetendo il procedimento un numero finito di volte si ottiene finalmente la base cercata. □

Dimostriamo ora un ultimo risultato che ci servirà per la dimostrazione del teorema.

Proposizione A.0.3. *Sia $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e consideriamo la funzione quasi-periodica ottenuta nel seguente modo:*

$$\phi(t) = f(\chi(0) + \omega t).$$

Se le frequenze ω sono non risonanti (cioè $\dim M_\omega = 0$), allora la media temporale

$$\langle \phi \rangle (\chi(0)) \equiv \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) \, dt$$

esiste ovunque, è costante su $\mathbb{T}^n$ e coincide con la media di fase

$$\langle f \rangle \equiv \int_{\mathbb{T}^n} f(\chi) d\chi \, .$$

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo la tesi nel caso particolare in cui f è un polinomio trigonometrico e si può pertanto scrivere come:

$$f(\chi) = \sum_{k \in \mathcal{F}} \hat{f}_k e^{2\pi i k \cdot \chi} \, ,$$

dove $\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}^n$ è un insieme finito di indici. Se $\mathcal{F}$ è costituito da un solo indice k, se $k = 0$ allora la funzione è costante ed evidentemente

$$\langle \phi \rangle = \hat{f}_0 = \langle f \rangle \,.$$

Altrimenti, se $k \neq 0$ è immediato verificare che la media di fase è nulla, e la media temporale vale:

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= e^{2\pi i (k \cdot \chi(0))} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i (k \cdot \omega t)} \, dt = \\ &= \frac{e^{2\pi i (k \cdot \chi(0))}}{2\pi i (k \cdot \omega)} \lim_{T \to \infty} \frac{e^{2\pi i (k \cdot \omega t)} - 1}{T} = 0 \,, \end{aligned}$$

per ogni $\chi(0) \in \mathbb{T}^n$.

Se $\mathcal{F}$ contiene un numero finito di indici, si fa uso della linearità sia dell'operatore "media temporale", che di quello "media di fase" per mostrare che la media temporale e quella di fase coincidono. Sia ora f una generica funzione continua. Per il teorema di Weierstrass (cfr. [34]), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico P_ε che approssima f uniformemente su $\mathbb{T}^n$ a meno di un errore $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\max_{\chi \in \mathbb{T}^n} |f(\chi) - P_\varepsilon(\chi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posto allora $P_- = P_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}$ e $P_+ = P_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$, avremo:

$$P_- \leq f \leq P_+ \tag{A.3}$$

e

$$\langle f \rangle - \langle P_- \rangle \leq \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \langle P_+ \rangle - \langle f \rangle \leq \varepsilon \,;$$

inoltre, per ogni $T > 0$ avremo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T P_-(\chi(0) + \omega t) \, dt &\leq \frac{1}{T} \int_0^T f(\chi(0) + \omega t) \, dt \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T P_+(\chi(0) + \omega t) \, dt \,. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Ma, per quanto precedentemente osservato, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $T_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $T > T_\varepsilon$ si ha:

$$\left| \langle P_\pm \rangle - \frac{1}{T} \int_0^T P_\pm(\chi(0) + \omega t) \, dt \right| \leq \varepsilon \,. \tag{A.5}$$

Combinando insieme (A.3), (A.4) e (A.5), troviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $T > T_\varepsilon$:

$$\left| \langle f \rangle - \frac{1}{T} \int_0^T f(\chi(0) + \omega t) \, dt \right| \leq 2\varepsilon \,,$$

da cui segue la tesi. $\square$

Possiamo quindi dimostrare il risultato che ci interessa.

Teorema. *Sia M_ω il modulo di risonanza associato al vettore di frequenze ω del moto; se $m = \dim M_\omega$, allora l'orbita è densa su un toro di dimensione $n - m$ immerso in $\mathbb{T}^n$.*

Dimostrazione. Chiaramente se $m = n$ abbiamo che ogni punto sul toro è un punto fisso, e quindi l'asserto è vero banalmente. Supponiamo ora che $m = 0$ e ragioniamo per assurdo. Se esistessero un punto $\chi \in \mathbb{T}^n$ e un suo intorno aperto U che non vengono visitati dall'orbita, consideriamo una qualunque funzione continua

$$f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà:

(a) $\langle f \rangle = 1$;

(b) $f(\chi) = 0$ per ogni $\chi \notin U$.

Allora f avrebbe media temporale nulla, diversa dalla media di fase, in contraddizione con quanto affermato nella proposizione A.0.3.

Infine, se $0 < m < n$, per il lemma A.0.2 esiste una trasformazione di coordinate su $\mathbb{T}^n$ tale da annullare le ultime m frequenze. E'quindi sufficiente ripetere l'argomento precedente restringendosi al toro $\mathbb{T}^{n-m}$, i cui punti sono

$$(\chi_1, \ldots, \chi_{n-m}, \chi_{n-m+1}(0), \ldots, \chi_n(0)).$$

$\square$

Appendice B

Proprietà dei vettori diofantini

Definizione B.0.1. Un vettore $\omega \in \mathbb{R}^n$ si dice (γ, τ)-diofantino se

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Dimostriamo ora alcune proprietà relative a tali vettori.

Proposizione B.0.2. *Se $\tau > n-1$, l'insieme dei vettori diofantini*

$$\mathcal{D}_\tau \equiv \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{D}_{\gamma,\tau} \equiv \bigcup_{\gamma>0} \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n : \quad |\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}\ \forall\, k \neq 0 \right\}$$

ha misura piena, cioè il suo complementare ha misura nulla.

Dimostrazione. Fissiamo $\tau > n-1$. Definendo

$$\mathcal{D}_R^c \equiv \mathcal{D}_\tau^c \cap B_R(0)$$

e

$$\begin{aligned} A_{R,\gamma} &\equiv \mathcal{D}_{\gamma,\tau}^c \cap B_R(0) \equiv \\ &\equiv \left\{ \omega \in B_R(0) : \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \text{ t.c. } |\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \right\}, \end{aligned}$$

avremo:

$$\mathcal{D}_R^c = \bigcap_{\gamma>0} A_{R,\gamma}\,.$$

Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} A_{R,\gamma} &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \{ \omega \in B_R(0) : \quad |\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \} \equiv \\ &\equiv A_{R,\gamma}^k\,. \end{aligned}$$

Questo mostra che $A_{R,\gamma}$ è un insieme misurabile, in quanto l'abbiamo scritto come un'unione numerabile di aperti e inoltre, poiché per ogni $\gamma > 0$ fissato

$$\operatorname{mis}\left(A^k_{R,\gamma}\right) \leq c \frac{\gamma}{|k|^{\tau+1}}$$

(con $c = c(n, R)$), otteniamo:

$$\operatorname{mis}\left(\mathcal{D}^c_R\right) \leq \operatorname{mis}\left(A_{R,\gamma}\right) \leq \tilde{c}\gamma$$

con

$$\tilde{c} = \tilde{c}(n, R, \tau) = c \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{\tau+1}}$$

che esiste finita, perchè $\tau > n - 1$ e quindi tale serie è convergente. Ora, mandando γ a 0, possiamo concludere che

$$\operatorname{mis}\left(D^c_R\right) = 0 \, .$$

Osserviamo, infine, che:

$$\mathcal{D}^c = \bigcup_{R>0,\ R \in \mathbb{Q}} \mathcal{D}^c_R$$

quindi è unione numerabile di insiemi di misura nulla e di conseguenza è anch'esso di misura nulla. Ciò completa la dimostrazione. □

Il risultato precedente può essere meglio specificato, nel senso che se $\tau < n - 1$ non si hanno più vettori diofantini.

Lemma B.0.3. *Sia $d \geq 1$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tale che*

$$\alpha \cdot q + p \neq 0 \qquad \forall\, (q, p) \in (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}) \setminus \{0\} \, .$$

Allora, per ogni $Q \in \mathbb{N}$ esiste una coppia $(q, p) \in (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ con

$$|p| \leq 1 + |\alpha||q|_\infty \qquad \text{e} \qquad |q|_\infty \leq Q \, ,$$

tale che:

$$|\alpha \cdot q + p| \leq \frac{1}{Q^d} \, .$$

In particolare

$$|\alpha \cdot q + p| \leq \frac{1}{|q|^d_\infty} \, .$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$I_Q \equiv \{\alpha \cdot r - [\alpha \cdot r], \qquad 1 \leq r_i \leq Q\} \cup \{0\} \, ,$$

dove con $[\,\cdot\,]$ indichiamo la *parte intera.* Si ha che $\operatorname{Card}(I_Q) = Q^d{+}1$ e $I_Q \subset [0, 1]$. Dividiamo $[0, 1]$ in Q^d intervalli di lunghezza Q^{-d}. Per il *Principio delle gabbie* *di piccioni*, esiste almeno un intervallo che contiene due punti di I_Q, cioè esistono $r^{(1)}$, $r^{(2)} \in I_Q$ tali che:

$$|\alpha \cdot r^{(1)} - [\alpha \cdot r^{(1)}] - \alpha \cdot r^{(2)} + [\alpha \cdot r^{(2)}]| \leq \frac{1}{Q^d}\,.$$

Quindi, ponendo

$$q \equiv r^{(1)} - r^{(2)} \qquad \text{e} \qquad p = [\alpha \cdot r^{(1)}] - [\alpha \cdot r^{(2)}]$$

otteniamo:

$$|\alpha \cdot q - p| \leq \frac{1}{Q^d}\,.$$

Ovviamente si ha anche

$$|q|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |r_i^{(1)} - r_i^{(2)}| \leq Q$$

e

$$\begin{aligned} |p| &= |[\alpha \cdot r^{(1)}] - [\alpha \cdot r^{(2)}]| \leq \\ &\leq |\alpha \cdot r^{(1)} - \alpha \cdot r^{(2)}| + 1 = \\ &\leq |\alpha||r^{(2)} - r^{(1)}|_\infty + 1 = |\alpha||q|_\infty + 1\,. \end{aligned}$$

□

Proposizione B.0.4 (Liouville). *Per ogni $n \geq 2$, esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $\omega \in \mathbb{R}^n$*

$$|\omega \cdot k| \leq c\frac{|\omega_\infty|}{|k|^{n-1}}$$

per infiniti $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Assumiamo, a meno di cambiare ordine alle componenti di ω, che $|\omega|_\infty = |\omega_n|$. Applicando il lemma precedente con

$$\begin{aligned} d &= n-1 \\ \alpha &= \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}, \ldots, \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\right) \\ q &= (k_1, \ldots, k_{n-1}) \\ p &= k_n\,, \end{aligned}$$

segue che esistono opportuni Q, q e p per cui:

$$\begin{aligned} |\omega \cdot k| &= |\omega_n||\alpha(k_1, \ldots, k_{n-1}) + k_n| = \\ &= |\omega|_\infty |\alpha \cdot q + p| \leq \frac{|\omega|_\infty}{Q^d}\,. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Poiché

$$\begin{aligned} |p|_\infty &\leq |p| \leq 1 + |\alpha||q|_\infty \leq \\ &\leq 1 + |\alpha|Q \leq 1 + dQ \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} |k|_\infty &= |(q,p)|_\infty \le |q|_\infty + |p|_\infty \le \\ &\le Q + 1 + dQ \le (2+d)Q \end{aligned}$$

da cui, sostituendo in (B.1)

$$|\omega \cdot k| \le \frac{|\omega|_\infty}{|k|_\infty^d}(2+d)^d \le \frac{|\omega|_\infty}{|k|} n^d (2+d)^d\,.$$

Per concludere, mostriamo che di tali (q,p) ne esistono infiniti. Infatti, cominciamo dal caso ω *razionalmente indipendente* e sia

$$\mathcal{S} \equiv \bigcup_{Q\in\mathbb{N}} \left\{ (q,p): \quad |\alpha \cdot q + p| < \frac{1}{Q^d} \quad \text{con} \quad |p| \le 1 + |\alpha||q|_\infty \text{ e } |q|_\infty \le Q \right\}.$$

Se per assurdo, $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) < \infty$, allora si avrebbe

$$\min_{(q,p)\in\mathcal{S}} |\alpha \cdot q + p| > 0$$

in quanto tale minimo è fatto su un numero finito di numeri positivi, essendo ω razionalmente indipendente. D'altra parte per costruzione si ha:

$$\min_{(q,p)\in\mathcal{S}} |\alpha \cdot q + p| < \frac{1}{Q^d}$$

per ogni $Q \in \mathbb{N}$, e quindi mandando Q all'infinito si giungerebbe ad un assurdo:

$$0 < \min_{(q,p)\in\mathcal{S}} |\alpha \cdot q + p| \le 0\,.$$

Consideriamo il caso ω *razionalmente dipendente*. In tal caso sappiamo che esistono infiniti k per cui tale prodotto scalare è nullo, da cui segue banalmente la conclusione. □

Corollario B.0.5. *Se $\tau < n-1$, non esistono vettori diofantini.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ω sia un vettore (γ,τ)-diofantino, con $\tau < n-1$; inoltre non è restrittivo assumere $|\omega_1| = |\omega|_\infty \ne 0$. Allora, dalla definizione di vettore diofantino e dalla proposizione precedente, abbiamo:

$$\frac{\gamma}{|k|^{n-1}} \le \frac{\gamma}{|k|^\tau} \le |\omega \cdot k| \le c\frac{|\omega_\infty|}{|k|^{n-1}}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Consideriamo dei vettori della seguente forma:

$$\hat{k} = (K, 0, \dots, 0)\,;$$

allora, per ogni $K > 0$:

$$\frac{\gamma}{K^{n-1}} \le |\omega|_\infty K \le c\frac{|\omega_\infty|}{K^{n-1}}$$

cioè

$$\gamma \leq |\omega|_\infty K^n \leq c|\omega_\infty| \,,$$

che conduce ad una palese contraddizione, se si passa al limite per K che tende a $+\infty$. $\square$

Osservazione. Nella discussione sopra fatta, non abbiamo considerato il caso $\tau = n-1$. In tal caso l'insieme $\mathcal{D}_{n-1}$ continua ad avere misura nulla ma non è vuoto; infatti si può dimostrare che ha misura di Hausdorff n: quindi esiste un insieme con la cardinalità del continuo di frequenze diofantine di esponente $n-1$, ma di misura nulla (vedi [59]).

Bibliografia

[1] N. I. Achieser. *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 1953.

[2] V. I. Arnol'd. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25 : 21–86, 1961.

[3] V. I. Arnol'd. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. *Uspehi Mat. Nauk*, 18 (5 (113)): 13–40, 1963.

[4] V. I. Arnol'd. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Uspehi Mat. Nauk*, 18 (6 (114)): 91–192, 1963.

[5] V. I. Arnol'd. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156 : 9–12, 1964.

[6] V.I. Arnol'd. *Metodi matematici della meccanica classica*. Edizioni MIR, Mosca, 1979.

[7] V.I. Arnol'd. *Dynamical sistems III*. Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, 1988.

[8] M. Berti, L. Biasco, and P. Bolle. Drift in phase space: a new variational mechanism with optimal diffusion time. *J. Math. Pures Appl., to appear*.

[9] M. Berti and P. Bolle. A functional analysis approach to Arnold diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 19 (4): 395–450, 2002.

[10] U. Bessi. An approach to Arnold's diffusion through the calculus of variations. *Nonlinear Anal.*, 26(6):1115–1135, 1996.

[11] U. Bessi. An analytic counterexample to the KAM theorem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(2):317–333, 2000.

[12] L. Biasco. Stime analitiche sui tempi di instabilità per perturbazioni di sistemi hamiltoniani integrabili. Master's thesis, Università degli studi Roma Tre, Febbraio 1999.

[13] S. V. Bolotin and D. V. Treschev. Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 5 (4): 401–412, 2000.

[14] J. B. Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnol'd, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...). *Astérisque*, (133-134): 113–157, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.

[15] A. Celletti and L. Chierchia. On the stability of realistic three-body problems. *Comm. Math. Phys.*, 186(2): 413–449, 1997 .

[16] L. Chierchia. *Lezioni di analisi matematica 2.* Aracne, Roma, 1997.

[17] L. Chierchia. Kam lectures, Dicembre 2002.

[18] L. Chierchia and G. Gallavotti. Drift and diffusion in phase space. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 60 (1): 1–144, 1994. *Erratum* Ann. Inst. Poincaré, Phys. Théor., 68 (1): 135, 1998.

[19] S. N. Chow and J. K. Hale. *Methods of bifurcation theory*, volume 251 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* [*Fundamental Principles of Mathematical Science*]. Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] R. De la Llave and R. Obaya. Regularity of the composition operator in spaces of Hölder functions. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 5 (1): 157–184, 1999.

[21] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[22] A. Delshams, R. De La Llave, and T. M. Seara. Unbounded growth of energy in periodic perturbations of geodesic flows of the torus. In *Hamiltonian systems and celestial mechanics* (*Pátzcuaro, 1998*), volume 6 of *World Sci. Monogr. Ser. Math.*, pages 90–110. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[23] A. Delshams and P. Gutiérrez. Effective stability and KAM theory. *J. Differential Equations*, 128 (2): 415–490, 1996.

[24] F. Diacu and P. Holmes. *Celestial encounters: the origin of chaos and stability.* Princeton Science Library. Princeton University Press, 1996.

[25] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis.* Pure and Applied Mathematics, Vol. X. Academic Press, New York, 1960.

[26] L. H. Eliasson. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 15 (1): 115–147, 1988.

[27] A. Fasano and S. Marmi. *Meccanica analitica.* Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[28] N. Fenichel. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.*, 21 : 193–226, 1971/1972.

[29] N. Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, 23 : 1109–1137, 1973/74.

[30] G. Gallavotti. Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, 12 (1): 125–152 (2002), 2001.

[31] G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro. Mel'nikov's approximation dominance. Some examples. *Rev. Math. Phys.*, 11 (4): 451–461, 1999.

[32] G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro. On homoclinic splitting problems. *Phys. D*, 137 (1-2):202–204, 2000.

[33] E. Giusti. *Analisi matematica. 1.* Editore Boringhieri, Torino, 1988.

[34] E. Giusti. *Analisi matematica. 2.* Editore Boringhieri, Torino, 1989.

[35] S. M. Graff. On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems. *J. Differential Equations*, 15 : 1–69, 1974.

[36] S. M. Graff. Invariant tori for a class of Hamiltonian differential equations. In *Global analysis–analysis on manifolds*, volume 57 of *Teubner-Texte Math.*, pages 111–125. Teubner, Leipzig, 1983.

[37] M. R. Herman. *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Vol. 1*, volume 103 of *Astérisque.* Société Mathématique de France, Paris, 1983.

[38] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[39] D. Huang and Z. Liu. On the persistence of lower-dimensional invariant hyperbolic tori for smooth Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 13 (1): 189–202, 2000.

[40] A. N. Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 98 : 527–530, 1954.

[41] P. Lochak. Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency. *Nonlinearity*, 6 (6): 885–904, 1993.

[42] J. N. Mather. Nonexistence of invariant circles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 4 (2): 301–309, 1984.

[43] J. N. Mather. Variational construction of connecting orbits. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), 43 (5): 1349–1386, 1993.

[44] J. Moser. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 47 : 1824–1831, 1961.

[45] J. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1962 : 1–20, 1962.

[46] J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann.*, 169 : 136–176, 1967.

[47] J. Moser. On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations. In *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics* (*Tokyo, 1969*), pages 60–67. Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[48] J. Moser. Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3 (3): 229–272, 1986.

[49] J. Moser. Recent developments in the theory of Hamiltonian systems. *SIAM Rev.*, 28 (4): 459–485, 1986.

[50] J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. Reprint of the 1973 original.

[51] N. N. Nehorošev. An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. *Uspehi Mat. Nauk*, 32(6): 5–66, 1977.

[52] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987.

[53] J. Pöschel. *Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Systemen*, volume 120 of *Bonner Mathematische Schriften* [*Bonn Mathematical Publications*]. Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1980. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1979, Beiträge zur Differentialgeometrie [Contributions to differential geometry], 3.

[54] J. Pöschel. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (5): 653–696, 1982.

[55] J. Pöschel. Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems. *Math. Z.*, 213 (2): 187–216, 1993.

[56] J. Pöschel. A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 23 (1): 119–148, 1996.

[57] J. Pöschel. A lecture on the classical KAM theorem. In *Smooth ergodic theory and its applications* (*Seattle, WA, 1999*), pages 707–732. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[58] H. Rüssmann. Kleine Nenner. I. Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1970 : 67–105, 1970.

[59] H. Rüssmann. On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus. In *Dynamical systems, theory and applications* (*Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974*), pages 598–624.Lecture Notes in Phys., Vol. 38. Springer, Berlin, 1975.

[60] D. Salamon. The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem. Forschungininstitut für Mathematik ETH Zürich (http://www.math.ethz.ch/ salamon/PREPRINTS/KAM.htm), Settembre 1986.

[61] D. Salamon and E Zehnder. KAM theory in configuration space. *Comment. Math. Helv.*, 64 (1): 84–132, 1989.

[62] E. Sernesi. *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[63] C. L. Siegel. *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* Springer-Verlag, Berlin, 1956.

[64] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[65] F. Takens. A C^1 counterexample to Moser's twist theorem. *Indag. Math.*, 33 : 378–386, 1971.

[66] D. V. Treshchëv. A mechanism for the destruction of resonance tori in Hamiltonian systems. *Mat. Sb.*, 180 (10): 1325–1346, 1439, 1989.

[67] E. Valdinoci. Tori di transizione nella teoria KAM. Master's thesis, Università degli studi Roma Tre, Febbraio 1998.

[68] E. Valdinoci. Families of whiskered tori for a-priori stable/unstable Hamiltonian systems and construction of unstable orbits. *Math. Phys. Electron. J.*, 6 : Paper 2, 31 pp. (electronic), 2000.

[69] S. Wiggins. *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[70] Z. Xia. Arnold diffusion: a variational construction. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II* (*Berlin, 1998*), number Extra Vol. II, pages 867–877 (electronic), 1998.

[71] E. Zehnder. Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. I-II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 : 91–140, 1975; 29(1): 49-111, 1976.