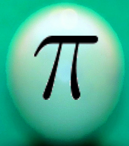
E π si muove...

Una storia di urti, pi greco e biliardi matematici

Alfonso Sorrentino

Roma, 11 Novembre 2020

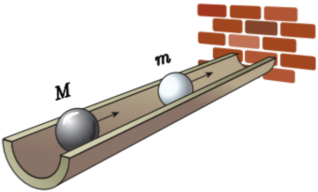
SALONE DELLO STUDENTE Lazio



Matematica Dipartimento
Università degli Studi di Roma Tor Vergata
2018 2022 DIPARTIMENTO di ECCELLENZA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA Tor Vergata

Consideriamo due biglie vincolate a muoversi su una semiretta, all'estremità della quale si trova un muro:



Assumiamo che:

- le palline siano puntiformi;
- le palline si muovano senza attrito;
- gli urti tra le palline e tra le palline ed il muro siano perfettamente elastici.

Problema: Calcolare il numero degli urti quando $M = 100^n m$, con $n \geq 0$.

Un urto si dice perfettamente elastico quando si conservano sia l'energia cinetica e la quantità di moto del sistema.

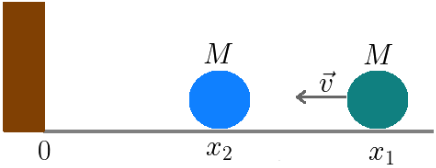
Ci sono due tipi di urti che possono accadere:

- Urto tra le palline:

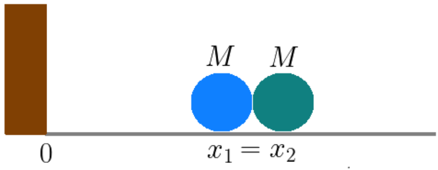
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu'^2 & \text{(energia cinetica)} \\ Mv + mu = Mv' + mu' & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

- Urto di una pallina con il muro:

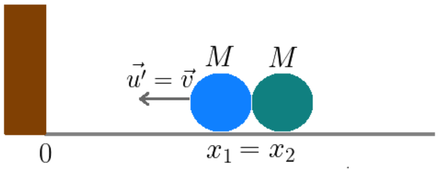
- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti:



- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 1



- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 1

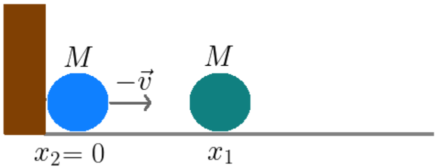


Sostituendo nelle relazioni per l'urto elastico $M = m$ e $u = 0$, troviamo le velocità u' e v' dopo l'urto:

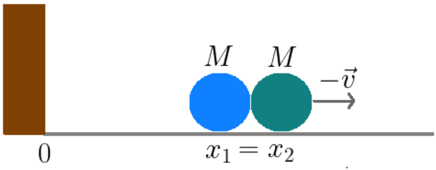
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}Mu'^2 \\ Mv + Mu = Mv' + Mu' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v^2 = v'^2 + u'^2 \\ v = v' + u' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u' = v \\ v' = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} u' = 0 \\ v' = v \end{cases} \text{(Non ammissibile)}$$

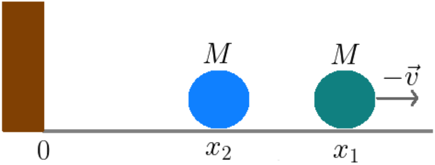
- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 2



- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3



- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3



- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3
- Caso $n = 1$ (cioè $M = 100\,m$) Numero di urti?

- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3
- Caso $n = 1$ (cioè $M = 100\, m$) Numero di urti: 31
- Caso $n = 2$ (cioè $M = 100^2\, m$)

- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3
- Caso $n = 1$ (cioè $M = 100\,m$) Numero di urti: 31
- Caso $n = 2$ (cioè $M = 100^2\,m$) Numero di urti?

- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3
- Caso $n = 1$ (cioè $M = 100\,m$) Numero di urti: 31
- Caso $n = 2$ (cioè $M = 100^2\,m$) Numero di urti: 314

In generale, qual è il numero di urti $\Pi(n)$ quando $M = 100^n m$?

- Caso $n = 0$ (cioè $M = m$) Numero di urti: 3
- Caso $n = 1$ (cioè $M = 100\, m$) Numero di urti: 31
- Caso $n = 2$ (cioè $M = 100^2\, m$) Numero di urti: 314

In generale, qual è il numero di urti $\Pi(n)$ quando $M = 100^n m$?

$$\pi = 3.14159265358979 32\ldots$$

Teorema [Gregory Galperin, 2001]

Sia $M = 100^n m$, con $n \geq 0$.

- Il numero di urti $\Pi(n)$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π:

$$\pi = \underbrace{3.141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\Pi(n)} a_{n+2} a_{n+3} \ldots .$$

- $\Pi(n)$ è proprio uguale alle prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Teorema [Gregory Galperin, 2001]

Sia $M = 100^n m$, con $n \geq 0$.

- Il numero di urti $\Pi(n)$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π:

$$\pi = \underbrace{3.141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\Pi(n)} a_{n+2} a_{n+3} \ldots .$$

- $\Pi(n)$ è proprio uguale alle prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Esempio:

$$\begin{aligned}\pi \quad = \quad & 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230\\ & 78164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446\ldots\end{aligned}$$

Teorema [Gregory Galperin, 2001]

Sia $M = 100^n m$, con $n \geq 0$.

- Il numero di urti $\Pi(n)$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π:

$$\pi = \underbrace{3.141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\Pi(n)} a_{n+2} a_{n+3} \ldots .$$

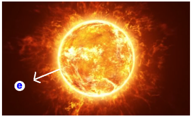
- $\Pi(n)$ è proprio uguale alle prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Esempio:

$$\begin{aligned} \pi \quad = \quad & 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307 \\ & 816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844\ldots \end{aligned}$$

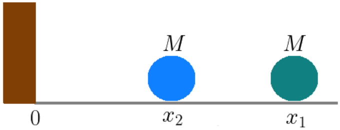
Quindi: $\Pi(30) = 314\,159\,265\,358\,979\,323\,846\,264\,338\,327$

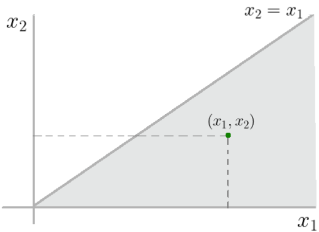
Nota: Se m è la massa di un elettrone $\simeq 10^{-30}$ Kg, allora $M = 100^{30} m \simeq 10^{30}$ Kg è dell'ordine di grandezza della massa del... Sole !



Come si dimostra questo teorema?

- Cominciamo col formalizzare il problema.
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

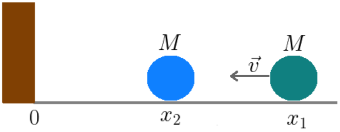


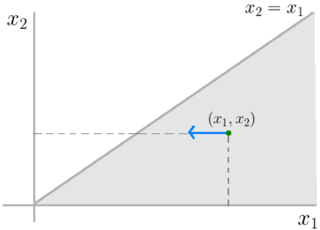


Come si dimostra questo teorema?

- Cominciamo col formalizzare il problema.

  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

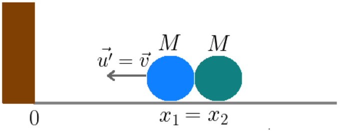


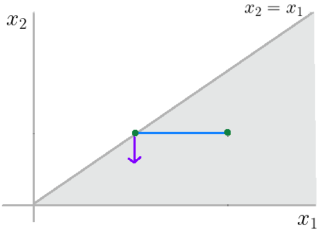


Come si dimostra questo teorema?

- Cominciamo col formalizzare il problema.

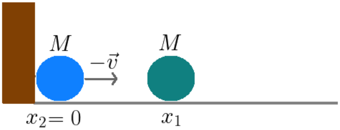
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

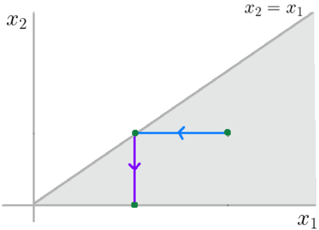




Come si dimostra questo teorema?

- Cominciamo col formalizzare il problema.
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

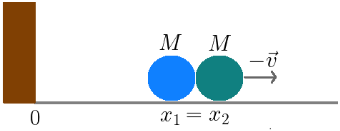


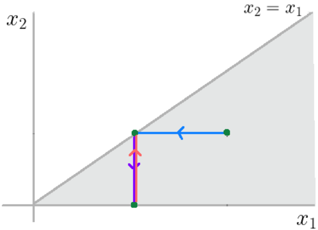


Come si dimostra questo teorema?

- Cominciamo col formalizzare il problema.

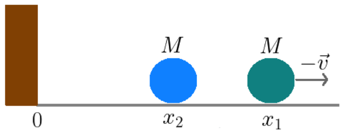
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

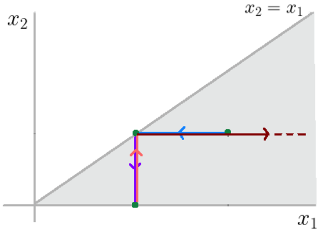




Come si dimostra questo teorema?

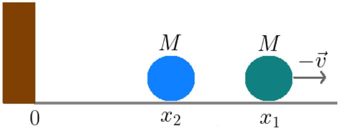
- Cominciamo col formalizzare il problema.
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

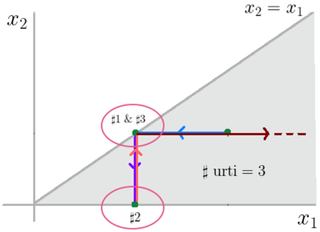




Come si dimostra questo teorema?

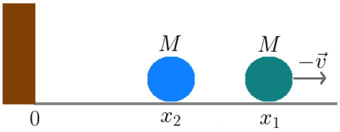
- Cominciamo col formalizzare il problema.
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

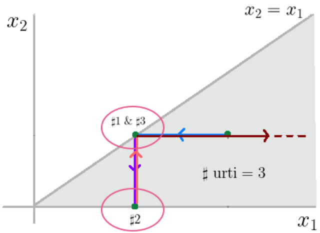




Come si dimostra questo teorema?

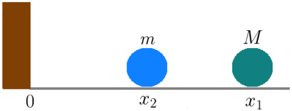
- Cominciamo col formalizzare il problema.
  Analizziamo nuovamente il caso $M = m$:

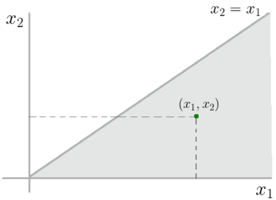




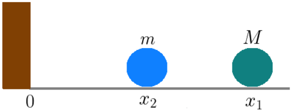
Cosa succede se $M = 100^n m$, con $n \geq 1$?

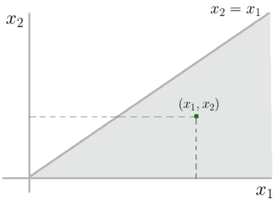
Consideriamo il caso $M = 100^n m$, con $n \geq 1$.





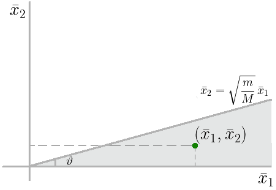
Consideriamo il caso $M = 100^n m$, con $n \geq 1$.





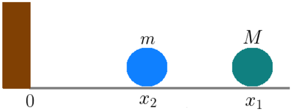
Facciamo un cambio di variabili:

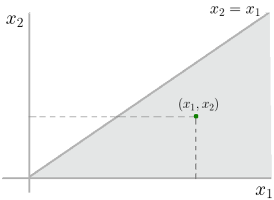
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \sqrt{M}\, x_1 \\ \bar{x}_2 = \sqrt{m}\, x_2 \end{cases} \qquad (M = 100^n m)$$



$$\vartheta = \arctan \sqrt{\frac{m}{M}} = \arctan(10^{-n})$$

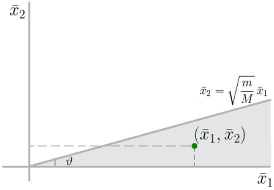
Consideriamo il caso $M = 100^n m$, con $n \geq 1$.





Facciamo un cambio di variabili:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \sqrt{M}\, x_1 \\ \bar{x}_2 = \sqrt{m}\, x_2 \end{cases} \qquad (M = 100^n m)$$



Questo riscalamento delle variabili spaziali provoca un riscalamento dello stesso tipo delle velocità:

$$\begin{cases} \bar{v} = \sqrt{M}\, v \\ \bar{u} = \sqrt{m}\, u \end{cases} \qquad (M = 100^n m)$$

$$\vartheta = \arctan \sqrt{\frac{m}{M}} = \arctan(10^{-n})$$

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}M{v'}^2 + \frac{1}{2}m{u'}^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}M{v'}^2 + \frac{1}{2}m{u'}^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

- La prima equazione implica che i vettori $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\bar{v}', \bar{u}')$ hanno la stessa lunghezza.

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

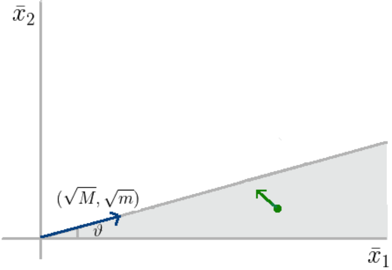
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu'^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

- La prima equazione implica che i vettori $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\bar{v}', \bar{u}')$ hanno la stessa lunghezza.

- La seconda equazione

  $$(\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}, \bar{u}) = (\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}', \bar{u}')$$

  (dove $\cdot$ denota il prodotto scalare tra vettori) implica che l'angolo tra $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ e l'angolo tra $(\bar{v}', \bar{u}')$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ sono uguali.



Nota: (prodotto scalare tra vettori)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

dove $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{b}\|$ sono le lunghezze dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mentre φ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

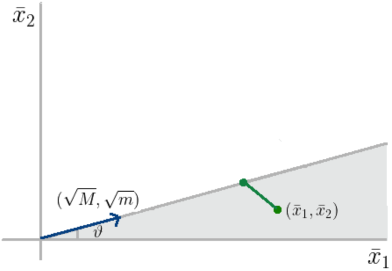
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu'^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

- La prima equazione implica che i vettori $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\bar{v}', \bar{u}')$ hanno la stessa lunghezza.

- La seconda equazione

  $$(\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}, \bar{u}) = (\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}', \bar{u}')$$

  (dove $\cdot$ denota il prodotto scalare tra vettori) implica che l'angolo tra $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ e l'angolo tra $(\bar{v}', \bar{u}')$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ sono uguali.



Nota: (prodotto scalare tra vettori)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\varphi$$

dove $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{b}\|$ sono le lunghezze dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mentre φ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

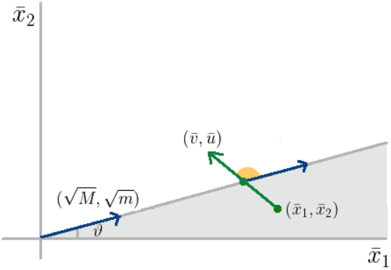
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu'^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

- La prima equazione implica che i vettori $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\bar{v}', \bar{u}')$ hanno la stessa lunghezza.

- La seconda equazione

$$(\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}, \bar{u}) = (\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}', \bar{u}')$$

(dove $\cdot$ denota il prodotto scalare tra vettori) implica che l'angolo tra $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ e l'angolo tra $(\bar{v}', \bar{u}')$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ sono uguali.



Nota: (prodotto scalare tra vettori)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

dove $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{b}\|$ sono le lunghezze dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mentre φ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

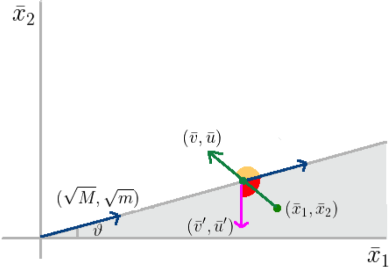
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu'^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

- La prima equazione implica che i vettori $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\bar{v}', \bar{u}')$ hanno la stessa lunghezza.

- La seconda equazione

  $$(\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}, \bar{u}) = (\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}', \bar{u}')$$

  (dove $\cdot$ denota il prodotto scalare tra vettori) implica che l'angolo tra $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ e l'angolo tra $(\bar{v}', \bar{u}')$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ sono uguali.



> Nota: (prodotto scalare tra vettori)
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$$
>
> dove $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{b}\|$ sono le lunghezze dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mentre φ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Interpretiamo gli urti nelle nuove variabili $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Urto tra le palline:

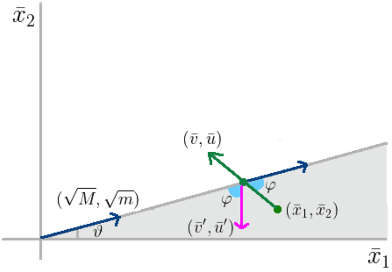
$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu'^2 \\ Mv + mu = Mv' + mu' \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 = \bar{v}'^2 + \bar{u}'^2 \\ \sqrt{M}\,\bar{v} + \sqrt{m}\,\bar{u} = \sqrt{M}\,\bar{v}' + \sqrt{m}\,\bar{u}' \end{cases}$$

- La prima equazione implica che i vettori $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\bar{v}', \bar{u}')$ hanno la stessa lunghezza.

- La seconda equazione

  $$(\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}, \bar{u}) = (\sqrt{M}, \sqrt{m}) \cdot (\bar{v}', \bar{u}')$$

  (dove $\cdot$ denota il prodotto scalare tra vettori) implica che l'angolo tra $(\bar{v}, \bar{u})$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ e l'angolo tra $(\bar{v}', \bar{u}')$ e $(\sqrt{M}, \sqrt{m})$ sono uguali.

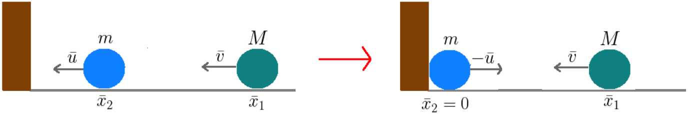


Nota: (prodotto scalare tra vettori)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

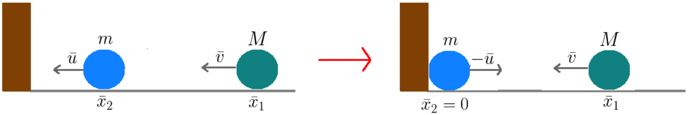
dove $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{b}\|$ sono le lunghezze dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mentre φ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Urto della pallina m con il muro:

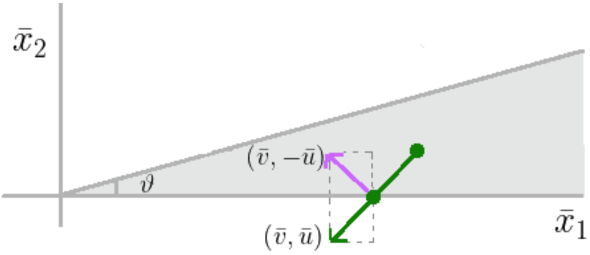


In seguito all'urto il vettore velocità sarà: $(\bar{v}', \bar{u}') = (\bar{v}, -\bar{u})$

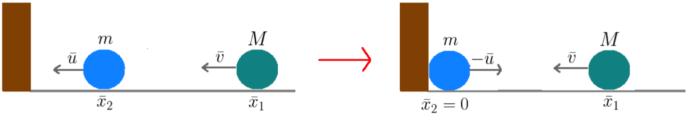
Urto della pallina m con il muro:



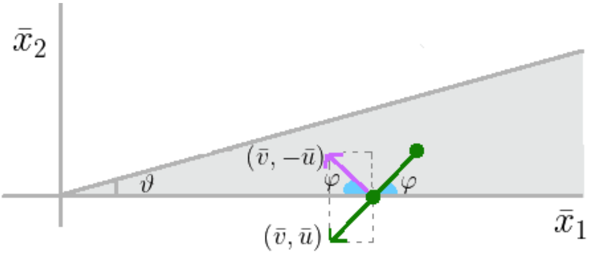
In seguito all'urto il vettore velocità sarà: $(\bar{v}', \bar{u}') = (\bar{v}, -\bar{u})$



Urto della pallina m con il muro:



In seguito all'urto il vettore velocità sarà: $(\bar{v}', \bar{u}') = (\bar{v}, -\bar{u})$



Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

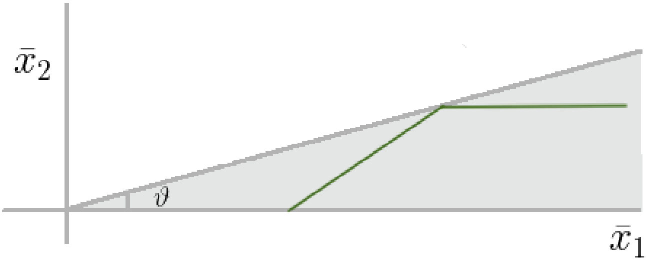
angolo di incidenza = angolo di riflessione

... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

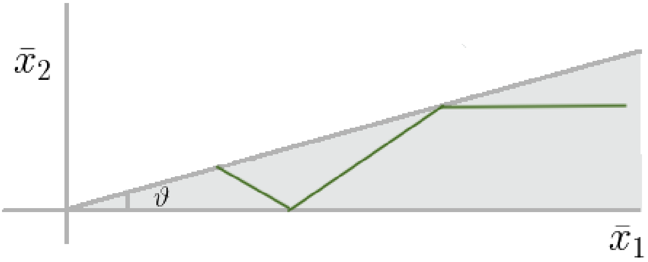


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

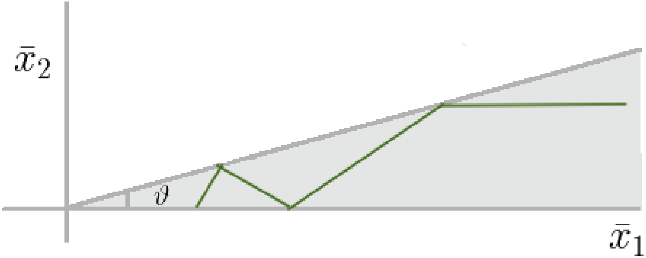


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

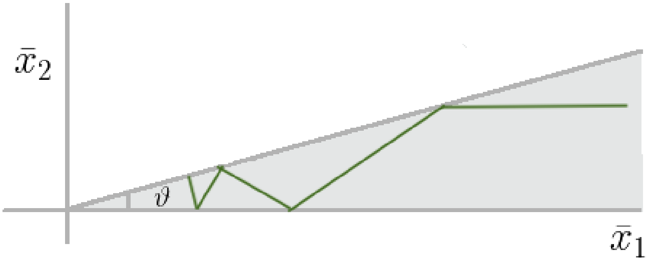


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

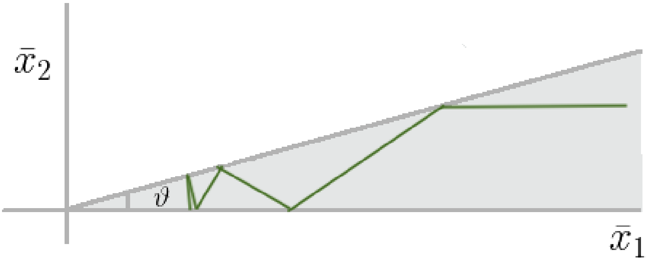


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

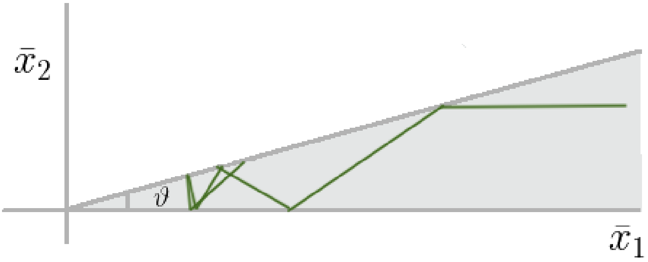


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

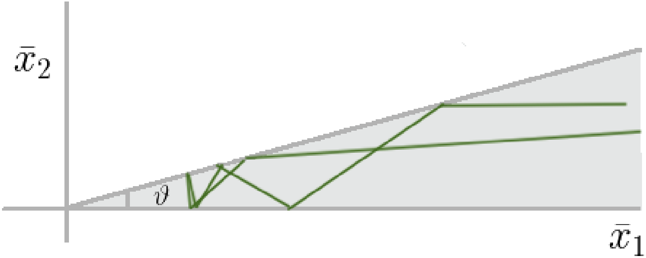


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione

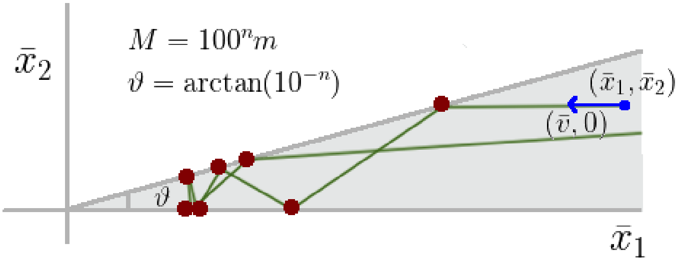


... È quello che succede in un biliardo!

Riassumendo:

Il moto all'interno della regione triangolare (illimitata) avviene in linea retta e quando giunge ai lati del triangolo (che corrispondono agli urti tra le palline e con il muro) procede seguendo la legge di riflessione:

angolo di incidenza = angolo di riflessione



... È quello che succede in un biliardo!

$\Pi(n)$ (il numero di urti tra le palline) corrisponde al numero di volte che si tocca uno dei lati del biliardo.

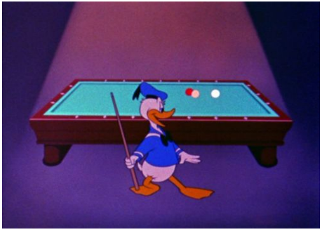
Giocare a biliardo

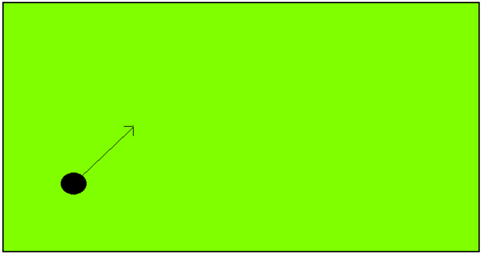
Esattamente quello che succede quando si gioca a biliardo:

La *palla* si muove in maniera rettilinea sul tavolo rettangolare e quando colpisce il bordo del tavolo, riflette la sua traiettoria secondo la legge:

$$\text{angolo di incidenza} = \text{angolo di riflessione.}$$

E continua così il suo moto... Possiamo prevederne il comportamento?





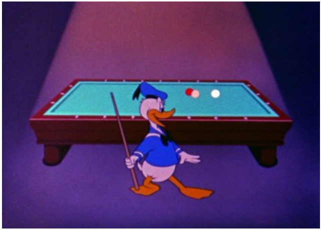
Giocare a biliardo

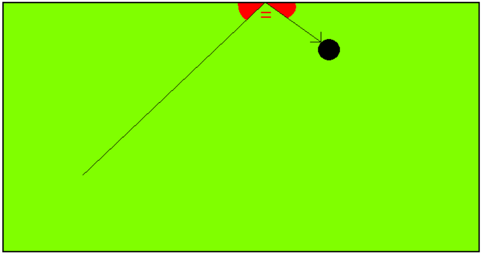
Esattamente quello che succede quando si gioca a biliardo:

La *palla* si muove in maniera rettilinea sul tavolo rettangolare e quando colpisce il bordo del tavolo, riflette la sua traiettoria secondo la legge:

angolo di incidenza = angolo di riflessione.

E continua così il suo moto... Possiamo prevederne il comportamento?





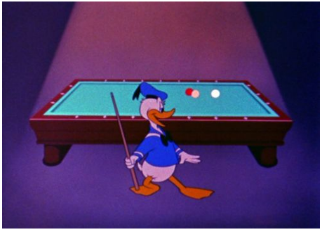
Giocare a biliardo

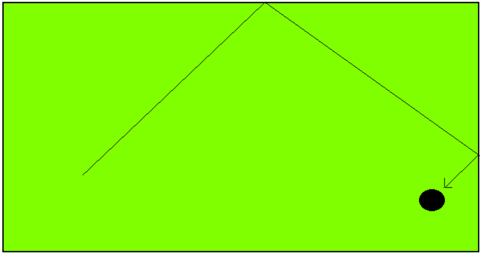
Esattamente quello che succede quando si gioca a biliardo:

La *palla* si muove in maniera rettilinea sul tavolo rettangolare e quando colpisce il bordo del tavolo, riflette la sua traiettoria secondo la legge:

angolo di incidenza = angolo di riflessione.

E continua così il suo moto... Possiamo prevederne il comportamento?





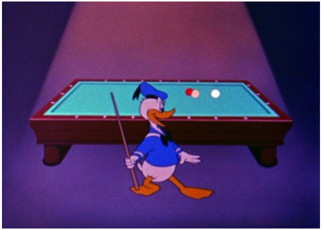
Giocare a biliardo

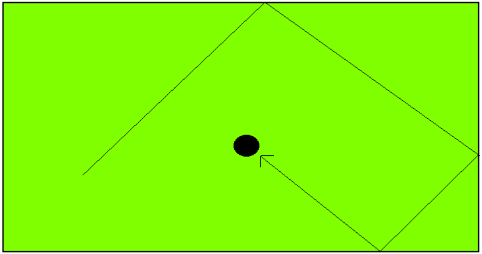
Esattamente quello che succede quando si gioca a biliardo:

La *palla* si muove in maniera rettilinea sul tavolo rettangolare e quando colpisce il bordo del tavolo, riflette la sua traiettoria secondo la legge:

angolo di incidenza = angolo di riflessione.

E continua così il suo moto... Possiamo prevederne il comportamento?





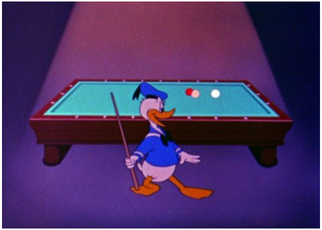
Giocare a biliardo

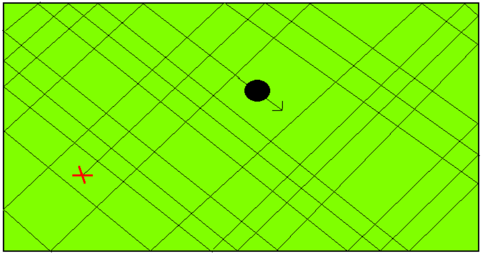
Esattamente quello che succede quando si gioca a biliardo:

La *palla* si muove in maniera rettilinea sul tavolo rettangolare e quando colpisce il bordo del tavolo, riflette la sua traiettoria secondo la legge:

angolo di incidenza = angolo di riflessione.

E continua così il suo moto... Possiamo prevederne il comportamento?

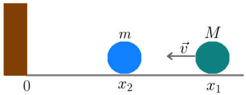


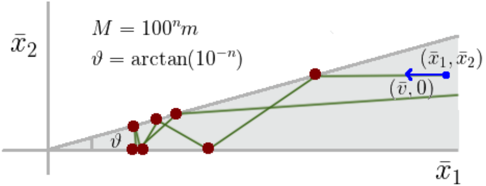


Calcolare $\Pi(n)$

Il numero di urti tra le due palline quando $M = 100^n m$ (ovvero $\Pi(n)$) corrisponde a studiare nel settore triangolare (biliardo) con angolo $\vartheta = \arctan(10^{-n})$:

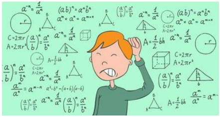
quante volte la traiettoria che parte dal punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ con velocità iniziale $(\bar{v}, 0)$, tocca i lati del biliardo.

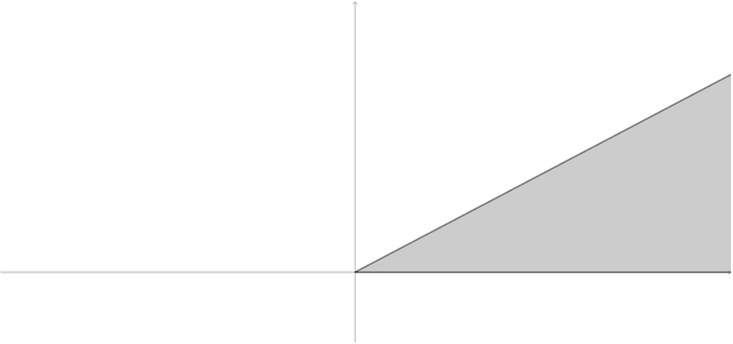




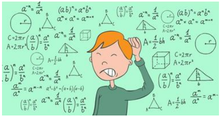
Come calcolarlo?

Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:

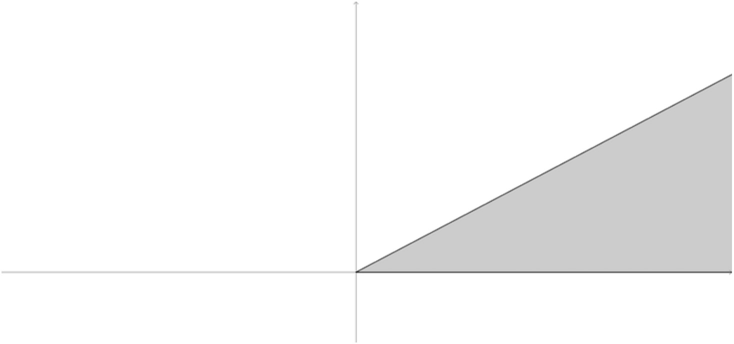




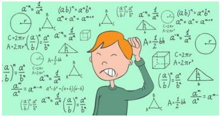
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



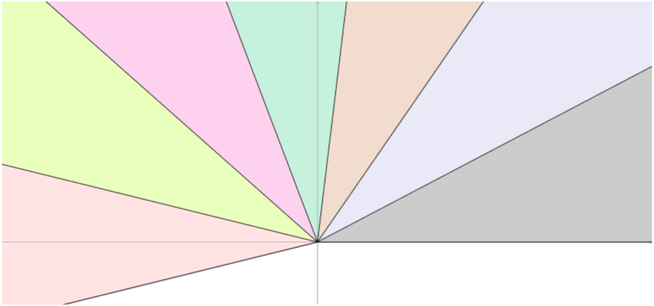
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



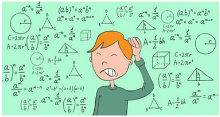
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



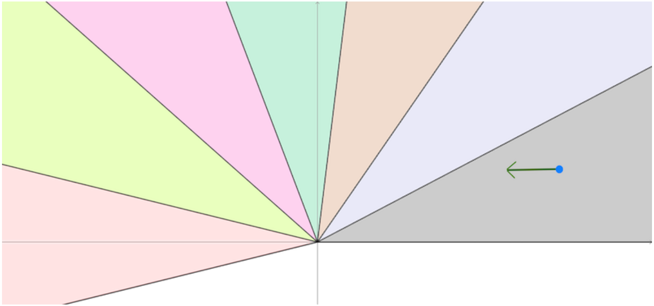
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



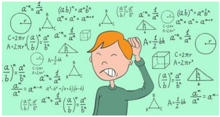
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



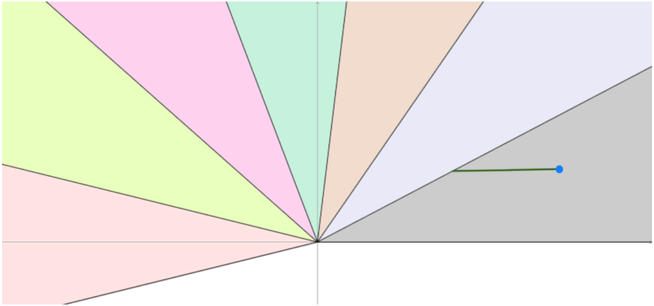
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



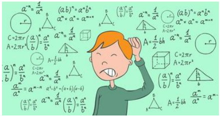
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



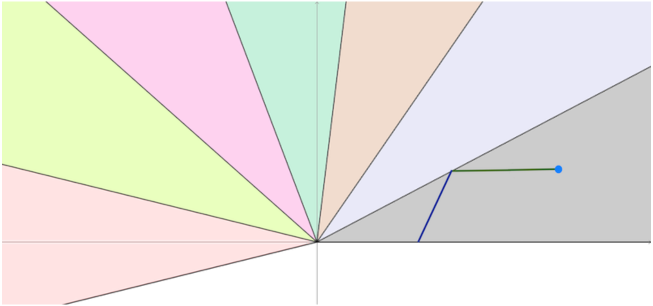
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



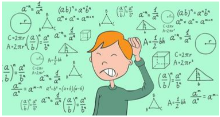
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



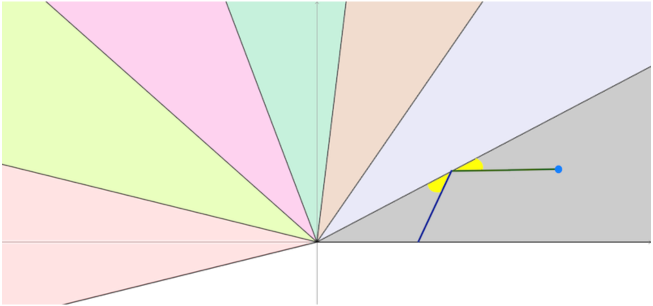
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



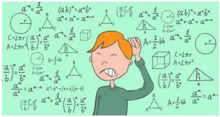
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



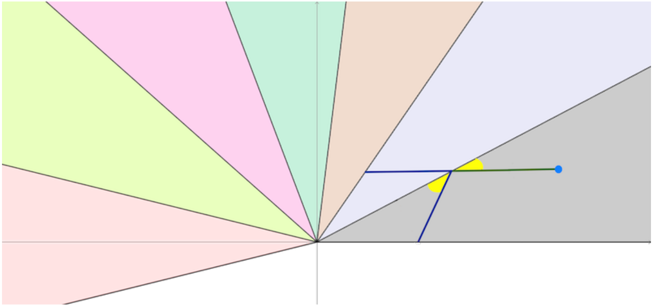
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



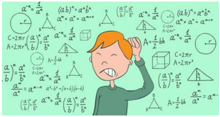
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



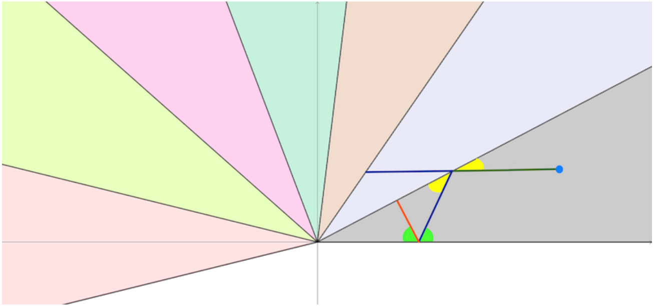
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



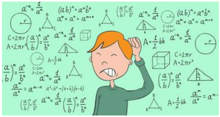
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



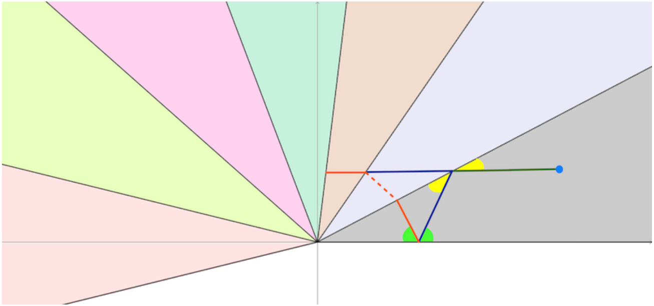
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



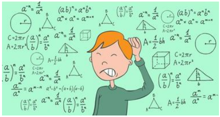
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



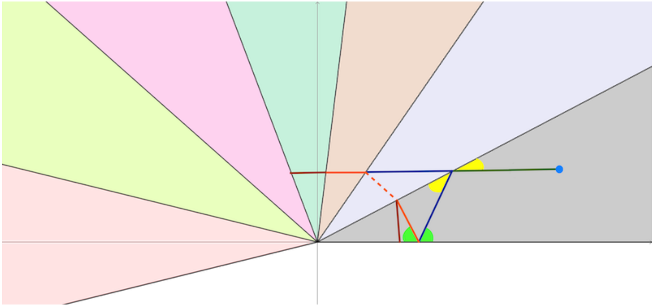
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



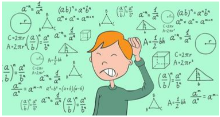
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



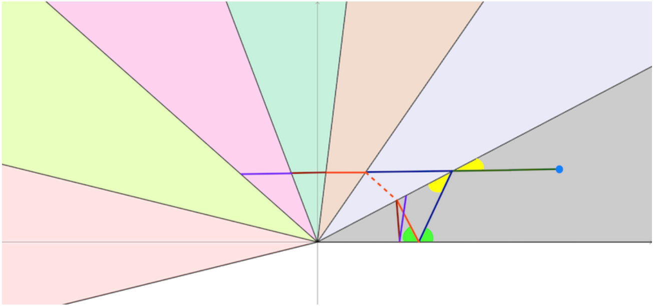
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



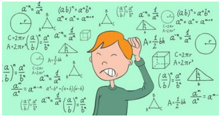
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



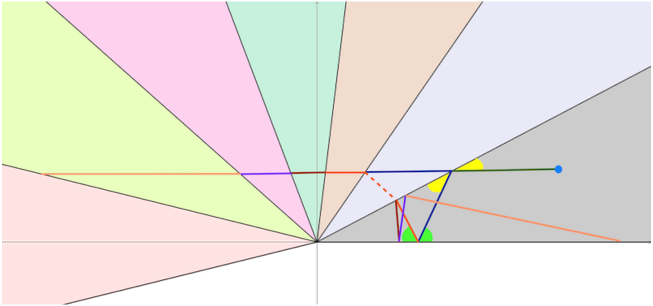
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



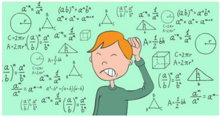
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



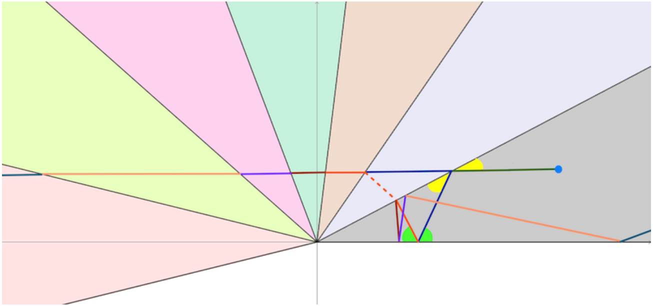
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



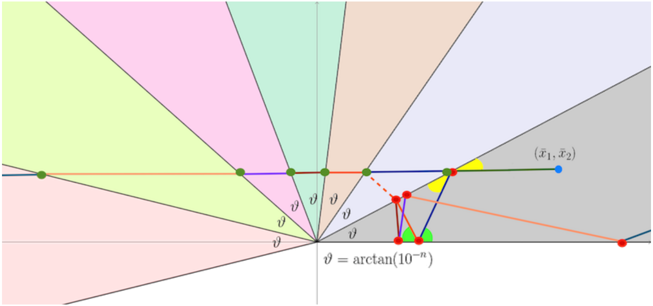
Come in ogni contesto, riflettere è sempre utile:



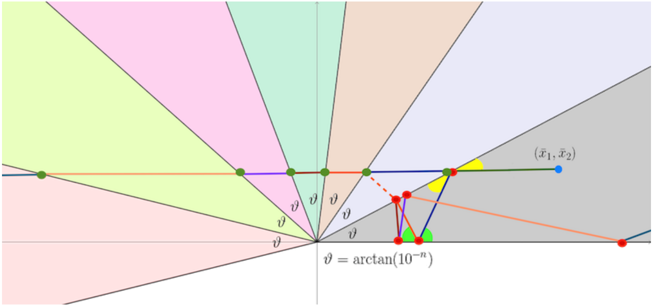
Invece di riflettere la traiettoria nel biliardo triangolare ... proviamo a riflettere il biliardo!



Il numero di urti quando $M = 100^n m$ (ovvero $\Pi(n)$) corrisponde al numero di intersezioni tra la retta orizzontale uscente dal punto $(\bar{x_1}, \bar{x_2})$ e le copie del biliardo triangolare nel semipiano superiore.



Il numero di urti quando $M = 100^n m$ (ovvero $\Pi(n)$) corrisponde al numero di intersezioni tra la retta orizzontale uscente dal punto $(\bar{x_1}, \bar{x_2})$ e le copie del biliardo triangolare nel semipiano superiore.



Quindi:

$$\Pi(n) = \left\lceil \frac{\pi}{\vartheta} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1$$

dove $\lceil x \rceil$ denota il più piccolo intero maggiore o uguale ad x (ad es. $\lceil 1.3 \rceil = 2$, $\lceil 1 \rceil = 1$).

Dimostriamo quindi che:

$\Pi(n) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π:

$$\pi = \underbrace{3.141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\Pi(n)} a_{n+2} a_{n+3} \ldots .$$

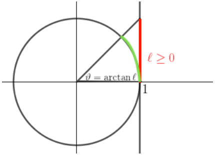
Dimostriamo quindi che:

$\Pi(n) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π:

$$\pi = \underbrace{3.141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\Pi(n)} a_{n+2} a_{n+3} \ldots .$$

Utilizziamo la seguente identità:

$$(*) \quad 0 \leq \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \qquad \forall\, x > 0$$



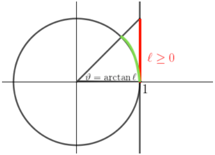
Dimostriamo quindi che:

$\Pi(n) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π:

$$\pi = \underbrace{3.141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\Pi(n)} a_{n+2} a_{n+3} \ldots .$$

Utilizziamo la seguente identità:

$$(*) \quad 0 \leq \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \qquad \forall\, x > 0$$



Usando $(*)$ con $x = 10^{-n}$:

$$0 \leq \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - \frac{\pi}{10^{-n}} < \pi 10^{-n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - \lceil 10^n \pi \rceil \leq 1$$

Quindi, ricordando che $\Pi(n) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1$, concludiamo che:

$$0 \leq \Pi(n) - (\lceil 10^n \pi \rceil - 1) \leq 1.$$

Quindi, ricordando che $\Pi(n) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1$, concludiamo che:

$$0 \leq \Pi(n) - (\lceil 10^n \pi \rceil - 1) \leq 1.$$

Per concludere la tesi, è sufficiente osservare che:

Osservazione: $\lceil 10^n \pi \rceil - 1$ è costituito dalle prime $n+1$ cifre di π:

$$\lceil 10^n \pi \rceil = \lceil \underbrace{3141592 \ldots a_n a_{n+1}}_{\text{parte intera}} . \underbrace{a_{n+2} a_{n+3} \ldots}_{\neq 0} \rceil = 3141592 \ldots a_n a_{n+1} + 1.$$

$\Longrightarrow$ $\Pi(n)$ differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n+1$ cifre decimali di π. $\square$

Dimostriamo ora che:

$\Pi(n)$ coincide con le prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Dimostriamo ora che:

$\Pi(n)$ coincide con le prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Infatti:

- Se $\Pi(n)$ non fosse uguale alle prime $n+1$ cifre di π, allora

$$\Pi(n) = \lceil 10^n \pi \rceil \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil = \lceil 10^n \pi \rceil + 1$$

Dimostriamo ora che:

$\Pi(n)$ coincide con le prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Infatti:

- Se $\Pi(n)$ non fosse uguale alle prime $n+1$ cifre di π, allora

$$\Pi(n) = \lceil 10^n \pi \rceil \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil = \lceil 10^n \pi \rceil + 1$$

- Segue dalla disuguaglianza $(*)$ con $x = 10^{-n}$ che

$$0 \leq \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - 10^n \pi < \pi 10^{-n} = 0.\underbrace{0\ldots0}_{n-1}31415\ldots$$

Dimostriamo ora che:

$\Pi(n)$ coincide con le prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Infatti:

- Se $\Pi(n)$ non fosse uguale alle prime $n+1$ cifre di π, allora

$$\Pi(n) = \lceil 10^n \pi \rceil \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil = \lceil 10^n \pi \rceil + 1$$

- Segue dalla disuguaglianza $(*)$ con $x = 10^{-n}$ che

$$0 \leq \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - 10^n \pi < \pi 10^{-n} = 0.\underbrace{0\ldots0}_{n-1}31415\ldots$$

- Quindi:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \lceil 10^n \pi \rceil - 10^n \pi = \left(\left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1 \right) - 10^n \pi \\ &\leq \quad \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - 10^n \pi < 0.\underbrace{0\ldots0}_{n-1}31415\ldots \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che:

$\Pi(n)$ coincide con le prime $n+1$ cifre di π, se le $n-1$ cifre che seguono l'n-sima cifra di π non sono tutte uguali a 9.

Infatti:

- Se $\Pi(n)$ non fosse uguale alle prime $n+1$ cifre di π, allora

$$\Pi(n) = \lceil 10^n \pi \rceil \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil = \lceil 10^n \pi \rceil + 1$$

- Segue dalla disuguaglianza $(*)$ con $x = 10^{-n}$ che

$$0 \leq \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - 10^n \pi < \pi 10^{-n} = 0.\underbrace{0\ldots0}_{n-1}31415\ldots$$

- Quindi:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \lceil 10^n \pi \rceil - 10^n \pi = \left(\left\lceil \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} \right\rceil - 1 \right) - 10^n \pi \\ &\leq \quad \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - 10^n \pi < 0.\underbrace{0\ldots0}_{n-1}31415\ldots \end{aligned}$$

Si può quindi concludere che:

$$10^n \pi = \underbrace{3141592\ldots a_n a_{n+1}}_{\text{parte intera}}.\underbrace{9\ldots9}_{n-1}\ldots \qquad \square$$

Per completezza dimostriamo la disuguaglianza $(*)$:

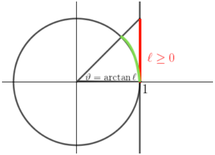
$$0 \le \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \le x \qquad \forall\, x > 0.$$

Per completezza dimostriamo la disuguaglianza $(*)$:

$$0 \leq \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \qquad \forall\, x > 0.$$

- Sia $x > 0$; poiché $0 < \arctan x \leq x$ allora

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} > 0.$$

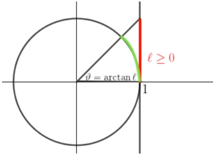


Per completezza dimostriamo la disuguaglianza $(*)$:

$$0 \leq \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \qquad \forall\, x > 0.$$

- Sia $x > 0$; poiché $0 < \arctan x \leq x$ allora

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} > 0.$$



- L'altra disuguaglianza

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - \arctan x - x^2 \arctan x}{x \arctan x} \leq 0$$

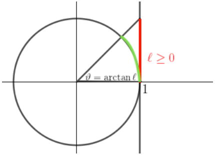
equivale a dimostrare che per $x > 0$ la funzione $h(x) = x - \arctan x - x^2 \arctan x$ è negativa.

Per completezza dimostriamo la disuguaglianza $(*)$:

$$0 \leq \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \qquad \forall\, x > 0.$$

- Sia $x > 0$; poiché $0 < \arctan x \leq x$ allora

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} > 0.$$



- L'altra disuguaglianza

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - \arctan x - x^2 \arctan x}{x \arctan x} \leq 0$$

equivale a dimostrare che per $x > 0$ la funzione $h(x) = x - \arctan x - x^2 \arctan x$ è negativa.

Questo è vero in quanto $h(0) = 0$ e h è decrescente per $x > 0$, dato che la sua derivata è:

$$h'(x) = -2x \arctan x < 0 \qquad \forall\, x > 0. \qquad \square$$

Grazie per l'attenzione!

Matematica
Dipartimento
Università degli Studi di Roma Tor Vergata

2018 2022 DIPARTIMENTO di ECCELLENZA

www.mat.uniroma2.it

Prof. Alfonso Sorrentino

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

Email: sorrentino@mat.uniroma2.it
Sito web: www.mat.uniroma2.it/~sorrenti