

I matematici giocano ... a biliardo!

ALFONSO SORRENTINO

Università di Roma "Tor Vergata"

Email: sorrentino@mat.uniroma2.it

Sommario: *Quest'articolo si propone di offrire una panoramica sullo studio dei biliardi matematici.*

Ci concentreremo su una particolare classe, i cosiddetti Biliardi di Birkhoff, in cui il tavolo è costituito da una regione del piano limitata, strettamente convessa e con bordo regolare. Le proprietà dinamiche di questi modelli matematici sono strettamente legate alla forma del tavolo che si considera: comprendere fino a che punto la conoscenza di certi aspetti dinamici permetta di ricostruire la forma del biliardo, è alla base di importanti congetture al centro di intense attività di ricerca.

In quest'articolo discuteremo alcune di queste problematiche e descriveremo recenti contributi verso la loro soluzione.

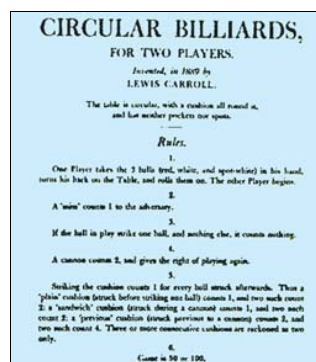
Abstract: *This article aims to offer a panorama of the study of mathematical billiards. We shall focus on a particular class, the so-called Birkhoff billiards, in which the table consists of a planar, bounded, strictly convex region, with smooth boundary. The dynamical properties of these mathematical models are tightly intertwined with the shape of the billiard table that one considers: understanding to which extent dynamical information allows one to reconstruct the shape of the billiard, is at the ground of interesting conjectures, at the center of intense research activities.*

In this article we shall discuss some of these problems and describe recent contributions towards their solution.

Nel 1890 il matematico britannico **Charles Lutwidge Dodgson** (forse meglio noto con lo pseudonimo di Lewis Carroll, autore di "Alice nel Paese delle Meraviglie") illustrò, in un documento di due pagine, un nuovo gioco di sua creazione: un biliardo di forma circolare! (Figura 1)



Fig. 1 – C.L. Dodgson/
Lewis Carroll (1832-1898).



Dodgson aveva una particolare predilezione per gli aspetti più ricreativi della matematica, spesso utilizzati come pretesto per esplorarne e comprenderne l'intrinseca armonia e complessità. A conclusione di questo "regolamento", Dodgson annota:

"The circular table will be found to yield an interesting variety of Billiard-playing, as the rebounds from the cushions are totally different from those of the ordinary game".

Forse nemmeno la sua fervida immaginazione avrebbe potuto prevedere che ciò che stava descrivendo, forse per gioco, sarebbe diventato un argomento di fondamentale importanza nella ricerca matematica moderna: i cosiddetti **biliardi matematici**!

Il lettore non matematico a questo punto (e forse anche alcuni matematici...) si starà certamente domandando: quale diavoleria sono mai questi "biliardi matematici"? E soprattutto: al di là dell'aspetto ludico, cosa può giustificare un interesse scientifico nei loro confronti?

Accettato: il 11 febbraio 2019.

In quest'articolo, cercherò di rispondere alla prima domanda e fornire alcune motivazioni (spero convincenti) in merito alla seconda. Trattandosi di un argomento tutt'altro che circoscritto e con mille sfaccettature – che beneficia delle interazioni con moltissime aree della ricerca in matematica – è abbastanza difficile fornire una panoramica completa degli interessi che guidano i molti e diversi ricercatori coinvolti. Mi limiterò, quindi, alla descrizione di una particolare classe di biliardi matematici, che rappresentano una naturale generalizzazione dei biliardi circolari considerati da Dodgson e che sono legati ad una celebre congettura (la **Congettura di Birkhoff**), che ha recentemente visto importanti passi avanti.

I lettori interessati ad approfondire questi argomenti ed i loro aspetti più tecnici possono consultare le eccellenti monografie [Tab1] e [Tab2]. Ma procediamo con ordine.

Cos'è un biliardo matematico?

Ciascuno dei lettori avrà giocato almeno una volta nella vita a biliardo (o visto qualcuno giocarci). Partiamo dal “classico” tavolo da biliardo rettangolare: uno dei giocatori colpisce una biglia con una stecca e questa comincia a muoversi lungo la direzione impressa dal colpo: arrivata al bordo del tavolo (la “sponda”), come conseguenza dell'urto la biglia cambierà la direzione del proprio moto e continuerà a muoversi seguendo questa nuova direzione, fino all'urto successivo. E così via...

I più curiosi si staranno già chiedendo: è possibile prevedere la direzione della biglia successivamente all'urto? La risposta è affermativa.

Cominciamo col capire cosa succede nel momento dell'urto. In figura 2 abbiamo rappresentato la velocità della biglia attraverso una freccia (un vettore)

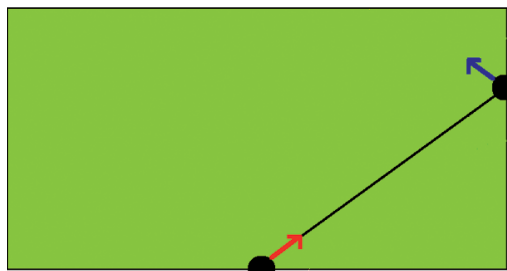


Fig. 2

che ha la direzione ed il verso del moto della biglia: poco prima dell'urto (freccia rossa), questo vettore “punta” verso il punto del bordo del tavolo contro cui sta per urtare; in seguito all'urto, la nuova velocità (freccia blu) punterà in un'altra direzione.

Cosa succede alla velocità nel momento dell'urto?

Consideriamo il caso in cui la biglia non finisce “in buca” (uno degli angoli), altrimenti il suo moto si fermerebbe lì. Per capire cosa succede urtando il bordo, scomponiamo il vettore-velocità al momento dell'urto come somma di due vettori $\mathbf{V} = \mathbf{N} + \mathbf{T}$ (fig. 3): uno, $\mathbf{T}$, tangente al bordo tavolo (freccia rosa) e l'altro, $\mathbf{N}$, perpendicolare (freccia viola).

(Si ricordi che si può visualizzare la somma di due vettori come diagonale del parallelogramma che ha questi due vettori come lati.)

Mentre l'urto non ha alcun effetto sulla componente *tangenziale* $\mathbf{T}$, lo ha sulla componente *normale* $\mathbf{N}$: in seguito all'urto, questa cambierà verso (diventando $-\mathbf{N}$, la freccia viola tratteggiata) e la nuova direzione del moto sarà quindi data da $\mathbf{V}' = \mathbf{T} - \mathbf{N}$ (freccia gialla).

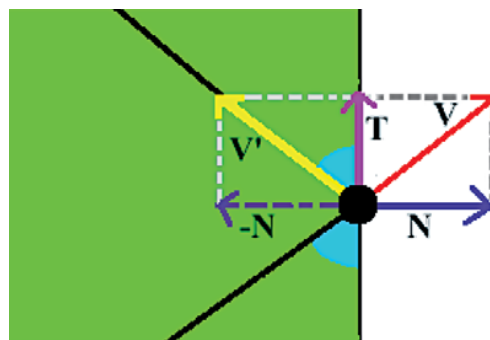


Fig. 3

Si noti che stiamo assumendo che durante l'urto non ci sia alcun trasferimento di energia dalla biglia al bordo, un esempio di cosiddetto *urto elastico*.

La regola per il “rimbalzo” può essere espressa in una maniera più geometrica. La biglia si comporta esattamente come si comporterebbe un raggio di luce (la traiettoria della biglia) che riflette su uno specchio (il bordo del tavolo): la riflessione avviene in modo che l'angolo tra il bordo del tavolo e la traiettoria della biglia al momento dell'urto (*angolo di incidenza*), sia uguale all'angolo che la nuova direzione forma col bordo del tavolo (*angolo di riflessione*).

Il gioco su un biliardo reale è complicato dalla presenza di altre biglie sul tavolo (anzi, lo scopo nel gioco è proprio quello di colpirle), dall'attrito della biglia col panno che riveste la superficie del tavolo (che determinerà la riduzione della velocità della biglia e, col tempo, la cessazione del suo moto), nonché dalla presenza delle buche ai quattro angoli del tavolo.

Le domande che si possono porre a questo punto sono molte e varie: ciascuna condurrà ad un suo specifico percorso di studio, con diversi “compagni di viaggio” ed ostacoli da superare. La **modellizzazione matematica** consiste proprio nell'introdurre un modello astratto, *esemplificativo* del problema che si vuole analizzare (che non vuol dire necessariamente semplice), che metta in risalto gli aspetti essenziali su cui si vuole focalizzare l'attenzione e l'analisi, eliminando, almeno in prima istanza, gli altri fattori secondari.

Nel nostro caso, la domanda che vorremmo studiare è la seguente: *È possibile prevedere, nel momento in cui la stecca colpisce la biglia, quale sarà la traiettoria che questa descriverà sul tavolo?* (In altre parole, dove avverranno i rimbalzi successivi?)

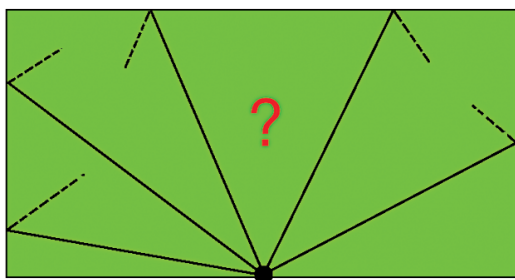


Fig. 4

Intuitivamente (e matematicamente), l'evoluzione della biglia sarà determinata univocamente dalla posizione iniziale e dalla direzione iniziale inferta dal colpo di stecca (cioè dall'angolo iniziale) (Figura 5).

Vogliamo quindi focalizzare la nostra attenzione sulla biglia, sulla direzione in cui si muove e su come questa cambia in seguito ai vari urti. Per far questo, possiamo tralasciare alcuni aspetti “secondari” per la nostra analisi: supporremo che non ci siano altre biglie sul tavolo e che non ci sia attrito tra la pallina ed il tavolo (quindi, che la pallina non

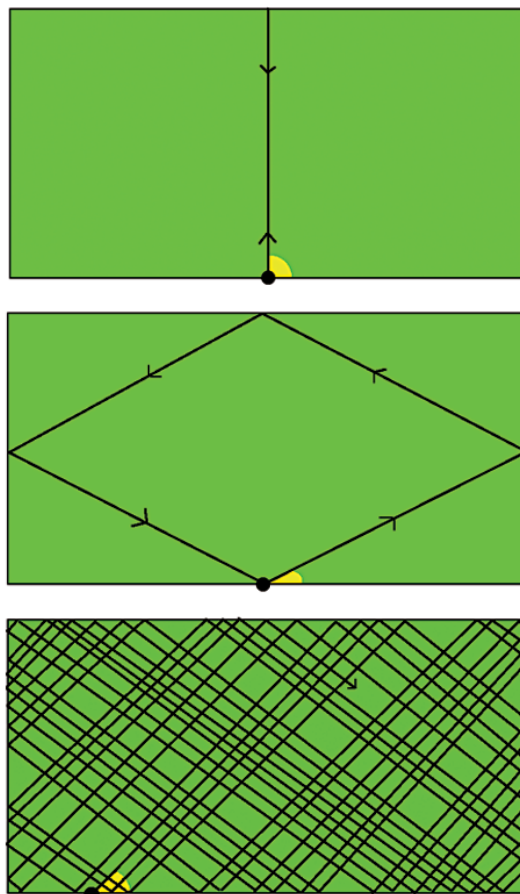


Fig. 5. – Alcuni esempi di orbite nel caso di biliardi rettangolari. Le prime due figure rappresentano traiettorie periodiche (i.e., la pallina ripete la stessa traiettoria dopo, rispettivamente, due e quattro rimbalzi). La terza figura rappresenta un'orbita non periodica: la pallina non tornerà mai nello stesso punto (anzi, arriverà arbitrariamente vicino ad ogni punto del bordo del tavolo).

rallenti col tempo). Inoltre, in seguito andremo anche ad escludere la presenza di “angoli con buche”, ma per il momento non preoccupiamoci di quest'aspetto.

Questo è un esempio di un cosiddetto **Sistema Dinamico**, cioè un sistema che evolve il suo *stato* nel *tempo*, secondo una determinata *legge*. Lo studio dei sistemi dinamici è un'attivissima area di ricerca nel panorama matematico moderno, tra le più interdisciplinari ed in evoluzione, ed annovera al suo interno ricercatori con interessi e formazioni tra le più diverse.

Lo studio dei biliardi occupa, in questo contesto, un ruolo centrale: al di là dell'apparente aspetto

“ricreativo”, l’analisi di questi sistemi è matematicamente interessante e tutt’altro che semplice: ha contribuito nel tempo allo sviluppo di tecniche e teorie che hanno trovato applicazione nello studio di sistemi ben più complessi.

A questo punto, la deformazione professionale del matematico (o perversione?) impone una domanda: perché limitarsi a considerare tavoli di forma rettangolare? In effetti, si potrebbe rendere il gioco ancora più interessante assumendo che il tavolo abbia una forma diversa.

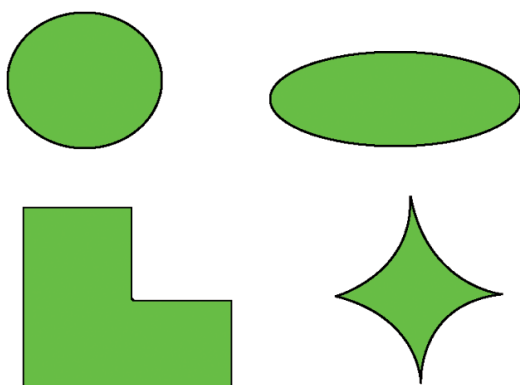


Fig. 6. – Alcuni possibili tavoli da biliardo

Un dubbio che potrebbe sorgere (a parte sulla ragionevolezza di fare tutto ciò...) è: come cambia la direzione della pallina nel momento dell’urto? Qual è la regola di riflessione in questi casi?

La risposta è semplice: esattamente come nel caso del tavolo rettangolare. Basta considerare gli angoli che la direzione della pallina forma con la retta tangente al tavolo (nel punto dell’urto) e richiedere che l’angolo di incidenza sia uguale l’angolo di riflessione... Et voilà! (Figura 7)

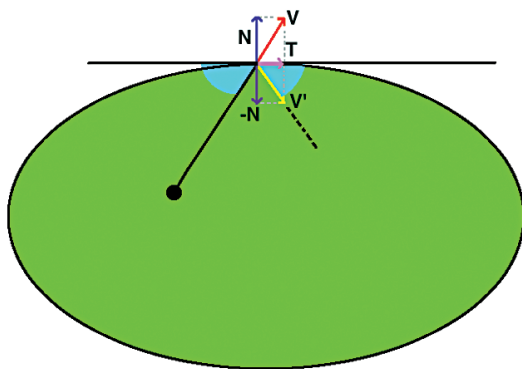


Fig. 7

Matematici ancora più intraprendenti (o spregiudicati) potrebbero sbizzarrirsi nell’assumere che il tavolo non sia piano, che il moto della pallina non segua linee rette, che l’urto al bordo non sia elastico, che la biglia sia elettricamente carica e che sia soggetta all’azione di un campo magnetico, ecc... Chi più ne ha, più ne metta!

In quest’articolo ci limiteremo a considerare tavoli da biliardo piani, su cui la pallina si muove lungo linee rette, rimbalzando al bordo in maniera elastica, come descritto sopra.

È abbastanza evidente il profondo legame esistente tra la forma del tavolo (**geometria**) e l’evoluzione del moto della biglia (**dinamica**): la forma del tavolo determina univocamente le proprietà dinamiche della biglia. In particolare, forme diverse genereranno comportamenti diversi, la cui analisi richiederà tecniche e strumenti diversi.

Ad esempio: se il bordo biliardo contiene dei tratti **concavi** (i.e., curvano verso l’interno del tavolo), biglie che partono in posizioni vicine, con direzioni abbastanza simili, potrebbero avere evoluzioni sostanzialmente diverse (Figura 8): siamo in presenza di un sistema dinamico *caotico*. L’interesse si concentra sulle *proprietà statistiche* del moto della biglia e la cosiddetta *teoria ergodica* entra in scena (si veda ad esempio [Sin]).

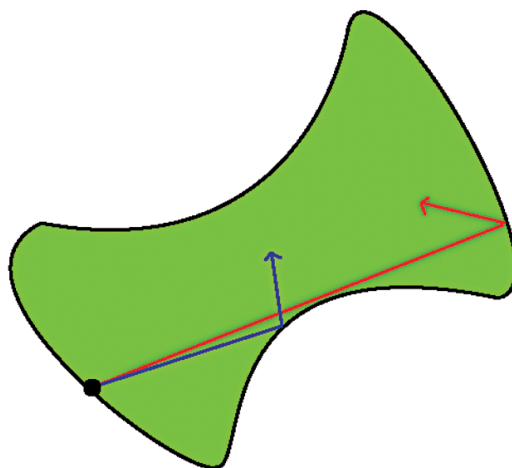


Fig. 8

Se il biliardo ha una forma **poligonale**, con angoli della forma $\frac{p}{q}\pi$ (con p,q numeri interi), allora lo studio del moto della biglia si può ricondurre allo

studio del moto di un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie (detta *superficie di traslazione*), ottenuta “incollando” in maniera opportuna i lati del poligono (un esempio in figura 9). Questi biliardi sono detti *biliardi poligonali razionali* (il rettangolo, il quadrato, il triangolo equilatero e tutti i poligoni regolari rientrano in questa categoria) e il loro studio ha beneficiato di tecniche geometriche, in particolare legate alla cosiddetta *dinamica di Teichmüller* (si veda ad esempio [MT]).

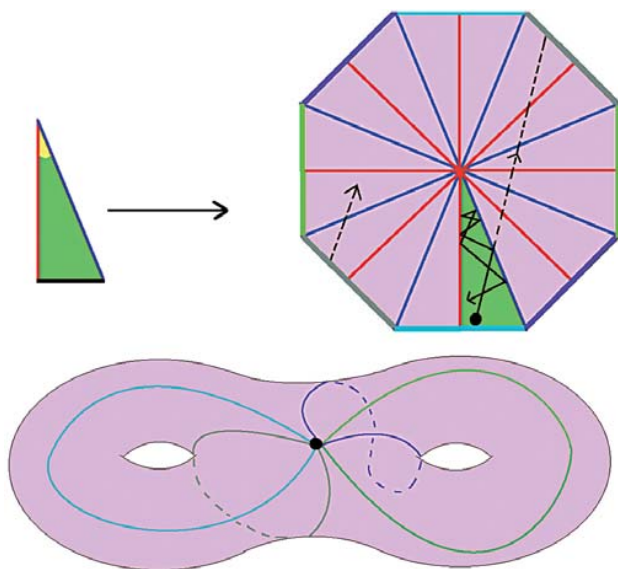


Fig. 9

Queste tematiche sono al centro di un'intensissima attività di ricerca, la cui trattazione meriterebbe ben più che un frettoloso accenno. In questo articolo abbiamo deciso però di concentrarsi su un'altra classe di biliardi, diversi da quelli appena descritti: biliardi in regioni senza angoli e senza parti concave: quelli che chiameremo **biliardi convessi** (o **biliardi di Birkhoff**).

Biliardi di Birkhoff.

Introduciamo ora la classe di biliardi che andremo a considerare nel resto di questo articolo. Il nostro tavolo consisterà in una regione limitata del piano, che indicheremo con Ω , con le seguenti proprietà:

- i) Ω è una regione **convessa**: dati due punti del bordo, il segmento che li unisce giace com-

pletamente in Ω . In altre parole, da un qualsiasi punto del bordo si può raggiungere qualsiasi altro punto con un solo colpo di stecca.

- ii) Il bordo del tavolo, che indicheremo con $\partial\Omega$, è una curva **regolare**: in maniera intuitiva, non ci sono angoli ed in ogni punto possiamo determinare un'unica retta tangente, la cui inclinazione varia con continuità lungo il bordo. Da un punto di vista matematico, stiamo in realtà chiedendo un po' di più: la curva che rappresenta $\partial\Omega$ è almeno C^3 (questa richiesta ha una spiegazione piuttosto tecnica, che tralascerei per non complicare l'esposizione; per i curiosi, si veda [Hal]).
- iii) In ogni punto del bordo, la **curvatura** è strettamente positiva. Un modo intuitivo (con un certo grado di imprecisione...) per illustrare quest'ipotesi senza introdurre formule è il seguente. Supponiamo di andare in bicicletta lungo $\partial\Omega$ in verso anti-orario (in altre parole, per vedere Ω bisogna guardare a sinistra...): richiedere che la curvatura sia strettamente positiva equivale a dire che, per rimanere con le ruote lungo il bordo, bisogna costantemente sterzare un minimo verso sinistra.

Un biliardo che soddisfa le proprietà i)-iii) viene chiamato un *biliardo di Birkhoff*.

George David Birkhoff (1884-1944) fu un influente matematico statunitense, noto, tra le altre cose, per i suoi fondamentali contributi alla teoria dei sistemi dinamici e in quella che oggi è chiamata teoria ergodica. Fu lui uno dei primi a considerare questo tipo di biliardi come esempio paradigmatico di *sistema Hamiltoniano* in un lavoro del 1927, [Bir]. Trattandosi di un modello intuitivo e semplice da descrivere, questi biliardi possono essere utilizzati come laboratorio per testare nuove tecniche e idee da applicare allo studio di sistemi Hamiltoniani ben più complessi (per esempio, in meccanica celeste).



Fig. 10. – George David Birkhoff (1884-1944)

Dinamica versus Geometria

Abbiamo detto sopra che la forma del tavolo determina l'evoluzione del moto della biglia, cioè gli aspetti dinamici del biliardo. Quello che è meno evidente – e più sottile anche da spiegare – è fino a che punto la conoscenza di certi aspetti dinamici permetta di ricostruire la forma del biliardo.

Facciamo il seguente “esperimento mentale” (*Gedankenexperiment*). Supponiamo di trovarci in una stanza buia e che la pallina sia fosforescente, in modo da poterne visualizzare l'evoluzione. Domanda: pur non riuscendo a vedere il tavolo, è possibile risalire alla forma del tavolo valutando la dinamica della biglia? Quali aspetti della dinamica valutare è parte fondamentale della domanda stessa e ne determina la difficoltà.

Questa domanda, in un certo senso ingenua, è alla base di moltissimi problemi aperti e congetture importanti nello studio dei biliardi, come quella che vedremo a breve.

Dinamica in un biliardo di Birkhoff

Come possiamo descrivere la dinamica del biliardo? Quando abbiamo introdotto la nozione di sistema dinamico abbiamo detto che si tratta di un sistema che evolve il suo *stato* nel *tempo*, secondo una determinata *legge*. Quindi dobbiamo chiarire:

- Come descrivere lo stato del sistema. Siamo interessati alla posizione della pallina e alla direzione del suo moto: questi parametri determinano univocamente lo stato del sistema.
- Qual è la legge che descrive l'evoluzione. All'interno del biliardo la pallina si muove seguendo una linea retta e, arrivata al bordo, la regola di riflessione è quella che abbiamo descritto prima, cioè l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione (gli angoli sono misurati rispetto alla retta tangente al bordo del tavolo, nel punto in cui avviene l'urto).
- Cosa intendiamo per tempo. Tra due urti successivi non succede nulla di particolarmente interessante (la pallina continua a muoversi in maniera rettilinea lungo la stessa direzione), quindi basta tenere traccia di cosa succede nei momenti in cui avvengono gli urti col bordo.

Indicheremo con M l'insieme dei possibili stati del sistema; M è costituito dalle coppie (x, v) , dove x è un punto del bordo del tavolo $\partial\Omega$, mentre v è un vettore con origine in x e che punta verso l'interno di Ω .

La mappa che descrive l'evoluzione del sistema è una mappa $B_\Omega : M \rightarrow M$ che ad un elemento $(x, v) \in M$ associa (x', v') , dove x' rappresenta il punto del bordo dove la biglia, partita da x con direzione v , colpisce $\partial\Omega$, mentre v' è la nuova direzione dopo l'urto (in accordo con la regola di riflessione che abbiamo descritto prima, si veda figura 11).

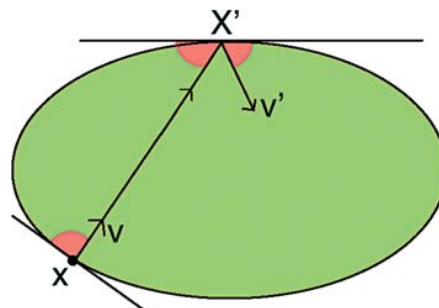


Fig. 11

Chiaramente, iterando la mappa otteniamo i punti dei successivi rimbalzi e le rispettive nuove direzioni (quella che viene chiamata l'*orbita* della biglia). Quindi, l'orbita della biglia che parte da (x, v) sarà data da $\{B_\Omega^n(x, v)\}_{n \geq 0}$, dove B_Ω^n vuol dire che la mappa B_Ω viene applicata n volte.

A questo punto è necessario fare un esempio.

Il biliardo circolare

Consideriamo un tavolo da biliardo costituito da un disco D_R di raggio R (come nel gioco ideato da Dodgson).

In questo caso, la dinamica è molto semplice da descrivere. Infatti, si può facilmente notare che l'angolo che la direzione iniziale v forma con la tangente nel punto di partenza x è lo stesso che la direzione di incidenza v' forma con la tangente nel punto di urto x' : in altre parole, l'angolo con la tangente rimane costante ad ogni rimbalzo (Figura 12).

In formule, un punto sulla circonferenza si può identificare con la sua lunghezza d'arco $0 \leq s < 2\pi R$ da un punto fissato; indichiamo con $0 < \vartheta < \pi$ l'angolo con la tangente (solo per questi valori di ϑ il

vettore velocità punta verso l'interno del disco). La mappa B_{D_R} in questo caso ha un'espressione molto semplice:

$$B_{D_R}(s, \vartheta) = (s + 2R\vartheta, \vartheta),$$

dove la prima componente va intesa mod. $2\pi R$, nel senso che, a meno di sottrarre un multiplo intero di $2\pi R$ (che corrisponde a fare dei giri completi della circonferenza), possiamo considerare il suo valore nell'intervallo $[0, 2\pi R)$.

In particolare, ϑ rimane costante lungo l'orbita: questa quantità viene chiamata in meccanica classica una *costante del moto* (o *integrale primo del moto*).

Un biliardo con una costante del moto si dice **integrabile**.

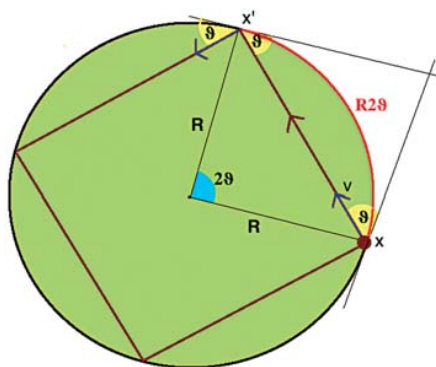


Fig. 12

[Spoiler alert] Nel seguito saremo particolarmente interessati ai biliardi integrabili.

Le proprietà qualitative delle orbite in un biliardo circolare possono essere caratterizzate in termini del valore corrispondente di ϑ :

- a) Se $\vartheta = \frac{p}{q}\pi$, con $\frac{p}{q} \in (0, 1)$ ridotto ai minimi termini, si vede facilmente che, dopo q iterazioni,

la pallina tornerà nella stessa posizione di partenza iniziale (e con la stessa direzione, visto che ϑ è costante). La traiettoria quindi “si chiude”: è una cosiddetta orbita periodica di periodo q . Il

rapporto $\frac{p}{q}$ (ridotto ai minimi termini) si dice *numero di rotazione*. (In figura 13 alcuni esempi di traiettorie periodiche corrispondenti $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$).

Scegliendo diversi valori di ϑ in questa forma, otteniamo diverse orbite periodiche: abbiamo appena dimostrato che il biliardo circolare ha infinite orbite periodiche!

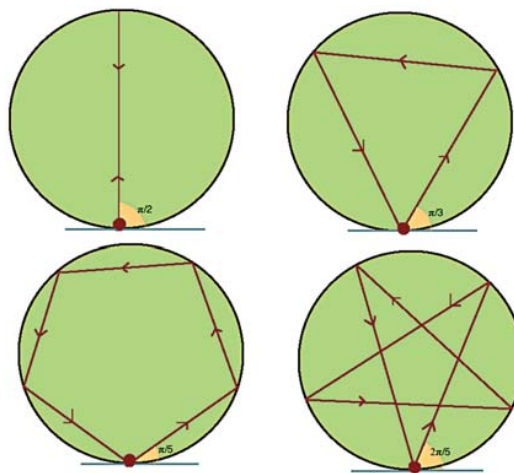


Fig. 13

- b) Se invece ϑ non è nella forma di cui al punto a), allora l'orbita non è periodica (Figura 14) e si può dimostrare che la pallina urterà il bordo arbitrariamente vicino ad ogni punto (per i matematici: in un *insieme denso* di punti).

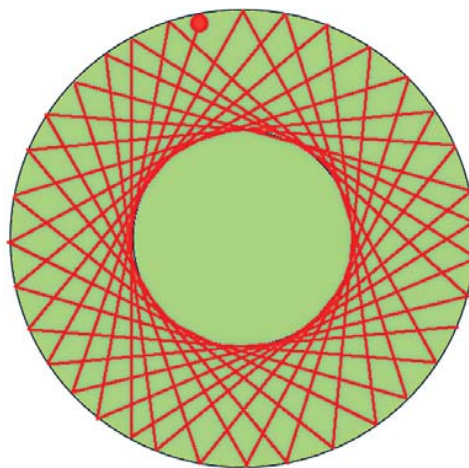


Fig. 14

I biliardi circolari ammettono un altro fenomeno molto interessante, che si può, ad esempio, intravedere dalla figura relativa al punto b). Partendo da ogni punto con direzione data da ϑ , la traiettoria tra due rimbalzi successivi sarà tangente alla cir-

conferenza concentrica di raggio $R \cos \vartheta$ e ad ogni rimbalzo resterà tangente a tale circonferenza (Figura 15).

Questo è un esempio di una cosiddetta **caustica**. In particolare, ogni circonferenza concentrica è una caustica per il biliardo circolare: il tavolo da biliardo circolare è completamente ricoperto da caustiche! Un biliardo con queste proprietà è integrabile (c'è, infatti, un legame tra questo fenomeno e l'esistenza di una costante del moto.)

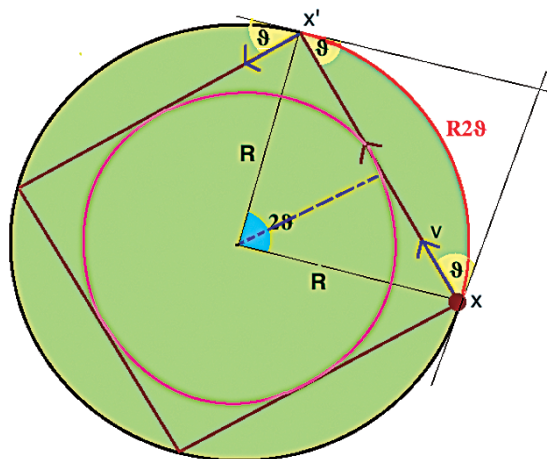


Fig. 15

Cosa succede in un biliardo qualsiasi?

È naturale domandarsi quante delle proprietà del biliardo circolare rimangono valide nel caso di un biliardo di Birkhoff in regione Ω arbitraria.

Orbite periodiche

Per quanto riguarda l'esistenza di orbite periodiche, G.D. Birkhoff dimostrò nel suo lavoro del 1927 che ne esistono infinite distinte: in particolare almeno due per ogni *numero di rotazione* $\frac{p}{q} \in (0, 1)$; questo numero descrive come la traiettoria della biglia si "avvolge" intorno al tavolo. In particolare, nel caso in cui $\frac{p}{q} \in (0, 1/2]$, p rappresenta il numero di giri che la pallina fa intorno al tavolo (in verso anti-orario), prima di chiudere la sua traiettoria. Nel caso $\frac{p}{q} \in [1/2, 1)$, il numero di giri è rappresentato da $q-p$ (e la traiettoria è percorsa in senso orario).

Molte domande importanti relative alle orbite periodiche rimangono ancora aperte e sono il tema di importanti congetture.

L'interesse in questi oggetti, al di là dell'aspetto dinamico, deriva dal fatto che le lunghezze di queste orbite sono legate (in maniera tutt'altro che evidente) agli autovalori del Laplaciano nella regione Ω (con condizioni di Dirichlet al bordo): quello che viene spesso chiamato *Spettro del Laplaciano in Ω* . Ai non-matematici questo problema di *analisi spettrale* non dirà molto; ai matematici, invece, porterà alla mente la famosa domanda di Marc Kac: "*Can you hear the shape of a drum?*" (titolo di un suo articolo del 1966 su *American Mathematical Monthly*, [Kac]).

Le frequenze di vibrazione della membrana di un tamburo, infatti, dipendono dalla sua forma: è possibile che due forme diverse conducano allo stesso insieme di frequenze? (Le frequenze corrispondono agli autovalori del Laplaciano).

Nonostante la domanda di Kac abbia risposta negativa in generale (nel 1992 Carolyn Gordon, David Webb e Scott Wolpert costruirono due distinte regioni poligonali concave con gli stessi autovalori, [GWW]), questo rimane un problema aperto e molto interessante se si pongono restrizioni sulla forma del dominio (ad esempio, quelle che abbiamo imposto ai nostri tavoli da biliardo).

Nel caso dei biliardi, quindi, uno potrebbe domandarsi: *Can you hear the shape of a billiard?*, nel senso: è possibile che due biliardi di Birkhoff distinti abbiano lo stesso *spettro delle lunghezze* (cioè, l'insieme delle lunghezze di tutte le sue orbite periodiche)?

In un'altra direzione, uno potrebbe domandarsi "quanto infinite" sono le orbite periodiche. Ad esempio, i numeri razionali ed i numeri irrazionali sono entrambi infiniti, ma c'è un modo per quantificarne la "misura": i numeri razionali hanno misura nulla (in maniera intuitiva, la probabilità di selezionare un numero razionale scegliendo a caso un numero reale in un intervallo (a, b) è uguale a 0, mentre quella di selezionare un numero irrazionale è 1).

Una famosa congettura del matematico Victor Ivrii afferma che i dati iniziali (x, v) che danno origine ad orbite periodiche hanno misura nulla. Questa congettura è ancora aperta ed è anch'essa legata allo spettro del Laplaciano, in particolare alla congettura di Weyl sull'asintotica con cui crescono gli autovalori del Laplaciano (si veda [Ivr]).

Caustiche ed integrabilità

Vogliamo ora concentrarci sullo studio delle caustiche e sull'esistenza di altri biliardi integrabili. Questo è un problema particolarmente interessante, alla base di una famosa congettura nel settore nota come *Congettura di Birkhoff* (o di *Birkhoff-Poritsky*), da molti considerata il "Sacro Graal" nello studio dei biliardi.

Ma andiamo con ordine: cosa è esattamente una caustica e quanto sono frequenti/rare in un biliardo?

Una **caustica** per un biliardo in Ω non è altri che una curva Γ per cui vale la seguente proprietà: se un segmento di traiettoria tra due rimbalzi successivi è tangente a Γ (cioè, la tocca in un solo punto), allora ciascun altro segmento di traiettoria rimarrà tangente ad essa, sia per rimbalzi futuri, che per rimbalzi passati (Figura 16).

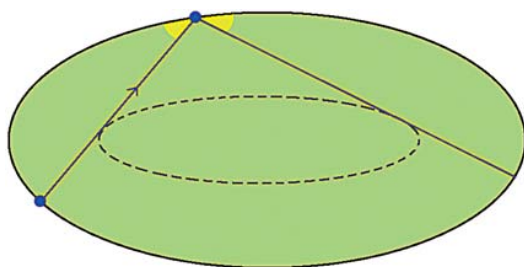


Fig. 16

Nell'esempio del biliardo circolare, tutte le circonferenze concentriche sono caustiche (Figura 17).

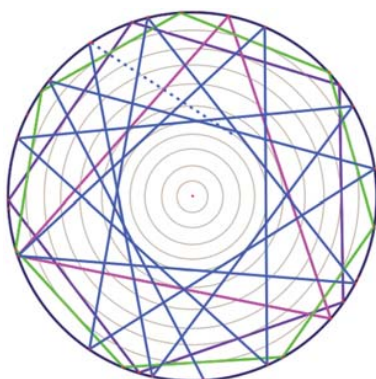


Fig. 17

Osserviamo che non è necessario assumere né che la caustica sia regolare (i.e., senza angoli), né che si tratti di una curva chiusa. Nel seguito, concentreremo

la nostra attenzione sulle caustiche regolari, chiuse e tali che la regione che racchiudono sia convessa: ci riferiremo a queste col termine di *caustiche convesse*. L'interesse in questo tipo di caustiche – oltre alla somiglianza con quanto succede nel caso del biliardo circolare – nasce dal fatto che sono legate all'esistenza di *curve invarianti* non banali per la mappa del biliardo: sono quindi l'oggetto naturale a cui guardare per studiare il problema dell'integrabilità.

Una piccola curiosità: a volte le caustiche nei biliardi vengono utilizzate per spiegare un curioso fenomeno che molti dei lettori avranno certamente sperimentato: le cosiddette *camere a sussurro* (*whispering galleries*). Si tratta di regioni, di solito al di sotto di una cupola o di una volta, nella quale i "sussurri" di una persona che si trova vicino alla parete possono essere chiaramente percepiti da altri ascoltatori posti vicini alla parete, anche se distanti.

Una spiegazione di questo fenomeno fu fornita da Lord J. W. S. Rayleigh nel 1910 in un suo trattato sulla teoria del suono [Ray] (con riferimento alla camera a sussurro sotto la volta della cupola di St. Paul Cathedral a Londra) (Figura 18).



Fig. 18

La riflessione di un'onda acustica sulle pareti di una camera, infatti, può essere pensata (ovviamente è una spiegazione semplicistica, che non tiene conto di molti altri fattori) come un esempio di biliardo matematico in tre dimensioni: la presenza di caustiche vicino al bordo, costringe l'onda a rimanere "vicino" alla parete e a muoversi all'interno una

“galleria” in cui il suono è percepibile, mentre il resto del biliardo diventa una specie di “zona grigia” in cui l’onda non entrerà mai (tenendo il “segreto sussurrato” al riparo da orecchie indiscrete!) (Figura 19)



Fig. 19

A questo punto una domanda è inevitabile: *esistono altri esempi di biliardi con caustiche?*

Cominciamo con l’osservare che una condizione necessaria per l’esistenza di caustiche è la condizione iii) nella definizione di biliardo di Birkhoff, cioè che la curvatura sia strettamente positiva dappertutto. Infatti, un celebre risultato di John Mather [Mat] implica che se la curvatura si annulla anche solo in un punto del bordo, allora non possono esistere caustiche.

Costruire un biliardo con almeno **una caustica** è un’impresa abbastanza facile. Si parte dalla curva Γ ; che si vuole avere come caustica e si determina il bordo del biliardo nel seguente modo: supponiamo di avere un laccio non elastico (in rosso, nella figura 20) di lunghezza superiore alla lunghezza di Γ , di avvolgerlo intorno a Γ , di inserire una matita al suo interno e di tirare la matita verso l’esterno fino al massimo dell’estensione del laccio. Muovendo ora la matita, tenendo il laccio teso, si disegnerà una curva (in blu, nella figura): il biliardo nella regione delimitata da questa curva avrà Γ come caustica.

Per divertirvi, provate a fare questo esperimento partendo da un cerchio: quale sarà la curva risultante? E se partiste da un punto? Da un’ellisse? Da un segmento?

(Soluzione: nei primi due casi si ottiene una circonferenza, negli altri due un’ellisse.)

Trovata la risposta ad una domanda, non ci si accontenta... *Esistono altri biliardi con infinite caustiche?*

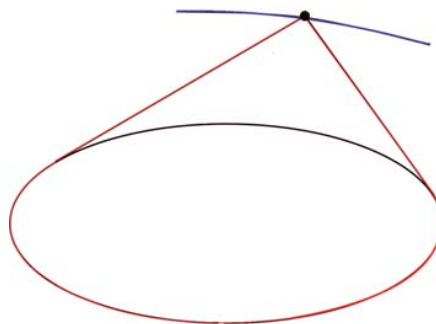


Fig. 20

Questo è un problema ben più difficile.

La risposta in un certo senso è sorprendente: tutti i biliardi di Birkhoff (con bordo sufficientemente regolare) hanno **infinite** caustiche convesse! Questo risultato fu dimostrato per la prima volta nel 1973 dal matematico russo Vladimir F. Lazutkin [Laz]: la dimostrazione si basa sul fatto che attraverso un cambio di coordinate opportuno (invece delle (x, v) che è naturale considerare), la mappa che descrive il biliardo diventa una perturbazione di una mappa molto più semplice (che ricorda quella del biliardo circolare). Un celebre risultato dovuto a Andrej Kolmogorov, Vladimir Arnold e Jürgen Moser (noto come *teorema KAM*, dalle loro tre iniziali) garantisce che per piccole perturbazioni di un sistema integrabile, moltissime (ma non tutte) delle curve invarianti della mappa (nel nostro caso, corrispondono a caustiche convesse) vengono preservate. In particolare queste caustiche si “accumulano” sul bordo del biliardo, nel senso che se ne possono trovare a distanza arbitrariamente piccola dal bordo.

Attenzione: questo risultato non implica che il biliardo sia integrabile. Nel caso del biliardo circolare, infatti, non solo c’erano infinite caustiche convesse, ma queste coprivano completamente il tavolo da biliardo. Nel caso che abbiamo appena discusso, quello che si riesce a dire è che sono infinite, ma in generale non coprono completamente nessuna regione del biliardo (sono una specie di *insieme di Cantor*).

La domanda successiva, quindi, è la seguente: *esistono altri biliardi in cui le caustiche coprono tutto o “gran parte” del biliardo?*

Un altro esempio è noto: il biliardo in un’ellisse.

Il biliardo ellittico

Consideriamo un biliardo all’interno di un’ellisse $\mathcal{E}$, con fuochi F_1 ed F_2 . A differenza del biliardo circolare,

in questo caso non è elementare scrivere esplicitamente la mappa del biliardo (espressioni esplicite sono possibili, ma richiederebbero l'introduzione di integrali ellittici – nomen est omen –, funzioni ellittiche di Jacobi, ecc...). Ciononostante, è possibile fornire una descrizione qualitativa della dinamica, attraverso considerazioni di geometria euclidea ben note fin dall'antichità (in particolare per le loro applicazioni in ottica alla costruzione dei cosiddetti specchi ustori).

Le possibili evoluzioni della biglia sul tavolo $\mathcal{E}$ possono essere classificate a seconda di come si comporta la traiettoria della biglia tra il lancio ed il primo urto:

- i) Se passa per uno dei fuochi, allora dopo il rimbalzo la biglia passerà per l'altro fuoco, e così via passando alternativamente tra due fuochi. Si noti che la traiettoria, dopo ogni rimbalzo, tende sempre di più ad allinearsi al semi-asse maggiore, che corrisponde ad un'orbita periodica di periodo 2: un esempio di *orbita iperbolica* (Figura 21).

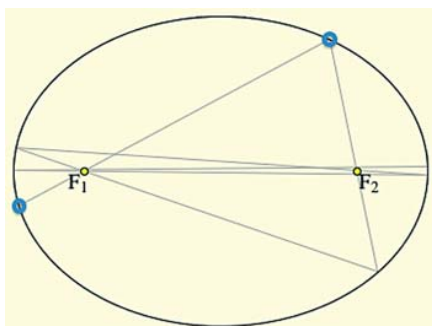


Fig. 21

- ii) Se la traiettoria della biglia interseca il segmento tra i due fuochi, allora la biglia dopo ogni rimbalzo continuerà ad intersecarlo. In particolare la traiettoria rimarrà tangente ai due rami di un'*iperbole cofocale* all'ellisse (Figura 22).

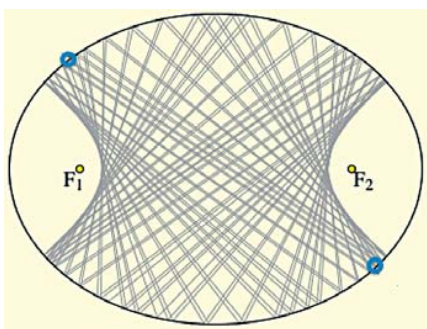


Fig. 22

- iii) Infine, se la biglia non interseca il segmento tra i due fuochi (estremi inclusi) allora non lo intersecherà mai dopo ogni rimbalzo. In particolare, la traiettoria sarà sempre tangente ad un'*ellisse cofocale*: un esempio di caustica convessa (Figura 23).

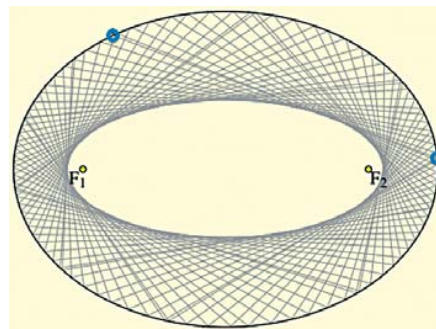


Fig. 23

L'insieme delle caustiche convesse (le ellissi cofocali) coprono la totalità del tavolo ellittico, con l'eccezione del segmento tra i due fuochi. Anche l'ellisse quindi è un esempio di biliardo integrabile.

Una curiosità: il New York Times (il 1 Luglio 1964) pubblicò una pagina con un annuncio pubblicitario per *Elliptipool*, da giocare su un tavolo ellittico con un'unica buca, posizionata in uno dei fuochi. L'annuncio aggiungeva che il giorno seguente si sarebbe tenuta una dimostrazione dal vivo presso il grande magazzino Stern's a cura di Paul Newman e sua moglie Joanne Woodward.



Fig. 24

Congettura di Birkhoff

Abbiamo finora visto due esempi di biliardi di Birkhoff integrabili, nel senso che il tavolo è completamente (o quasi) coperto da caustiche convesse.

Domanda: *ne esistono altri?*

In un crescendo di difficoltà, questa domanda raggiunge vette inconfondibili con le precedenti:

questa curiosità apparentemente ingenua risulta alla base di uno tra i problemi più famosi e impentrabili nello studio dei sistemi dinamici: la cosiddetta *congettura di Birkhoff*.

Questa famosa congettura, attribuita a George David Birkhoff (1884-1944), afferma che non esistono altri esempi:

Congettura (Birkhoff). *I biliardi circolari ed ellittici sono gli unici esempi di biliardi integrabili.*

A volte questa congettura è nota come *congettura di Birkhoff-Poritsky*. Infatti, la sua prima apparizione sembra essere in un articolo di Hillel Poritsky nel 1950, [Por], riguardante le sue ricerche durante la sua permanenza all'Università di Harvard nel 1927-29 come National Research Fellow, presumibilmente sotto la supervisione di Birkhoff. Nonostante l'autore non l'attribuisca esplicitamente a Birkhoff questa congettura, fa riferimento a diversi lavori di Birkhoff sui biliardi che hanno lasciato intravedere la sua influenza a riguardo.

È vera o non è vera?

Cosa si conosce riguardo alla veridicità di questa congettura?

Nonostante l'apparente semplicità della sua formulazione e la grande attenzione che ha ricevuto negli anni da parte di matematici di ogni calibro, questa congettura resta, ad oggi, nell'Olimpo delle congetture inespugnabili, che resistono fieramente ai vari tentativi di dimostrazione o confutazione.

Nel 1993 il matematico Israeliano Misha Bialy ha dimostrato che se il tavolo da biliardo è completamente ricoperto da caustiche convesse, allora si tratta necessariamente di un biliardo circolare (si veda [Bia]). Ricordiamo che nel caso di biliardi ellittici, la regione del tavolo ricoperta da caustiche convesse non include il segmento tra i due fuochi. Il risultato di Bialy, quindi, è la dimostrazione della congettura nel caso speciale dei biliardi **completamente integrabili**.

Per molti anni questo è rimasto essenzialmente l'unico passo avanti verso la dimostrazione di questa congettura.

Uno dei principali ostacoli nell'intaccare questa congettura consiste nel fatto che, per quanto la legge che determina l'evoluzione **locale** della pallina (i.e., il

rimbalzo sulla sponda) sia semplice da descrivere, l'analisi dell'evoluzione **globale** della biglia è un'impresa molto complessa e dipende non solo dalla forma del biliardo nel punto di partenza della biglia, ma anche dalla sua forma globale. Pensiamo al caso del biliardo circolare: se modifichiamo di poco il bordo circolare in un piccolo arco, ogni volta che la pallina tocca quella parte di bordo, l'angolo di riflessione verrà leggermente modificato e non resterà più costante: dopo molti rimbalzi, la variazione potrebbe essere tutt'altro che trascurabile e produrre effetti visibili sulla dinamica.

Inoltre, ad eccezione dei biliardi circolari ed ellittici, non ci sono altri esempi in cui si è in grado di descrivere *completamente* la dinamica.

Dato che questa congettura sembra un problema inattaccabile (almeno al momento), forse ci si può porre un obiettivo più modesto e, magari, più abordabile: *cosa si può dire sull'integrabilità dei biliardi su tavoli che sono delle deformazioni, sufficientemente piccole, di ellissi o di cerchi?* (Figura 25)

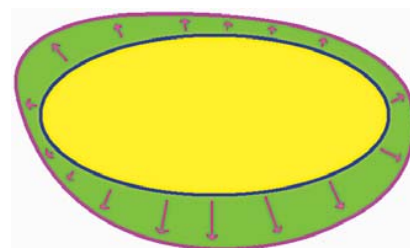


Fig. 25

Congettura di Birkhoff (versione deformativa). *Si consideri un biliardo di Birkhoff ottenuto attraverso una deformazione (sufficientemente regolare e piccola) di un tavolo da biliardo ellittico o circolare. Questo biliardo è integrabile se e solo se la deformazione è banale, i.e., lo lascia ancora di forma ellittica o circolare.*

È possibile dimostrare questa versione della congettura?

Recentemente c'è stato un notevole passo avanti in questa direzione: questa congettura è vera! La dimostrazione di questo risultato è apparsa in un mio articolo in collaborazione con Vadim Kaloshin (University of Maryland, Stati Uniti d'America), pubblicato sulla rivista *Annals of mathematics* [KS], una tra le più prestigiose e importanti riviste di

matematica al mondo (nel numero 141 del 1995 è stata pubblicata la dimostrazione dell'Ultimo teorema di Fermat, ad opera di Andrew Wiles!).

Un primo risultato parziale, relativo a deformazioni di biliardi circolari, era già stato dimostrato nel 2016 da Artur Avila (medaglia Fields nel 2014), Jacopo De Simoi e Vadim Kaloshin, [ADK].

Come si dimostra?

La dimostrazione è tutt'altro che banale e richiederebbe l'introduzione di strumenti matematici molto avanzati. Quindi, anche il lettore dalla curiosità più vorace (che può eventualmente soddisfare leggendo [KS]) dovrà mettersi l'animo in pace e accontentarsi di una descrizione molto vaga...

L'idea intuitiva della dimostrazione consiste nello studiare una particolare famiglia di caustiche. Consideriamo una caustica tale che ogni orbita tangente ad essa è periodica con un certo periodo q (si chiude dopo q rimbalzi) e prima di chiudersi compie solamente un giro del tavolo: un simile oggetto viene chiamato *caustica integrabile con numero di rotazione $1/q$* .

Siamo partiti col comprendere sotto quali condizioni una caustica di questo tipo persiste sotto l'effetto di una perturbazione. Infatti, se un biliardo è integrabile queste caustiche devono esistere per ogni $q \geq 3$ (ma non necessariamente per $q = 2$: si pensi al caso dell'ellisse in cui ci sono solo due orbite periodiche di periodo 2, che corrispondono agli assi maggiore e minore dell'ellisse).

Queste caustiche sono in un certo senso degli oggetti molto "fragili" e difficili da salvaguardare (non sono quelle per cui vale il teorema KAM, menzionato sopra): la loro conservazione, quindi, deve implicare qualche informazione aggiuntiva sulla struttura della deformazione.

Per i lettori con qualche nozione di matematica avanzata, queste informazioni aggiuntive possono essere spiegate approssimativamente nel seguente modo: la sopravvivenza di una caustica integrabile con numero di rotazione $1/q$ implica delle condizioni – che indicheremo con $\mathcal{E}_q$ – sui coefficienti di ordine q dell'espansione in serie di Fourier della deformazione, rispetto ad un'opportuna famiglia di funzioni elementari; questa famiglia è costituita da funzioni ottenute attraverso la combinazione di opportuni

integrali ellittici e funzioni ellittiche di Jacobi (che sono legate alla dinamica nel biliardo ellittico/circolare prima della deformazione).

Se assumiamo quindi che il biliardo deformato sia integrabile, allora avrà caustiche di questo tipo per ogni $q \geq 3$; a questo punto abbiamo cercato di dimostrare che questa famiglia infinita di condizioni $\{\mathcal{E}_q\}_{q \geq 3}$, implica che la deformazione che stiamo considerando deve avere proprietà molto particolari. Nello specifico, la deformazione può essere soltanto: una *traslazione*, un'*omotetia* (dilatazione/contrazione), una *rotazione* o una trasformazione che dilata in una certa direzione e contrae in quella perpendicolare. In tutti questi casi, per effetto di questa deformazione un'ellisse o una circonferenza saranno necessariamente trasformati in un'ellisse o in una circonferenza (Attenzione: l'ultimo tipo di trasformazione trasforma le circonferenze in ellissi e può trasformare ellissi in circonferenze!).

Tra il dire e il fare, c'è di mezzo... una bella dose di dettagli tecnici, che vi risparmio! Rimboccandosi le maniche, siamo alla fine arrivati a scrivere l'agognato *QED*.

Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento a Gabriele Benedetti e Lorenzo Di Biagio per l'attenzione con cui hanno letto una prima versione di quest'articolo e per i loro preziosissimi suggerimenti.

Quest'articolo è stato scritto durante il mio soggiorno, nell'autunno 2018, presso il Mathematical Sciences Research Institute di Berkeley, California (US), che ringrazio per l'ospitalità ed il supporto finanziario (National Science Foundation, grant n. DMS-1440140).

Infine, questo lavoro ha beneficiato del finanziamento MIUR "Dipartimenti di Eccellenza" assegnato al Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma "Tor Vergata", CUP E83C18000100006.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[ADK] ARTUR AVILA, JACOPO DE SIMOI, VADIM KALOSHIN. *An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse*. Ann. Math., vol. 184, pp. 527-558, 2016.

- [Bia] MISHA BIALY. *Convex billiards and a theorem by E. Hopf*. Math. Z., vol. **124**, pp. 147-154, 1993.
- [Bir] GEORGE D. BIRKHOFF. *On the periodic motions of dynamical systems*. Acta Math. vol. **50**, pp. 359-379, 1927.
- [FM] GIOVANNI FORNI, CARLOS MATHEUS. *Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards*. J. Mod. Dyn., vol. **8**, pp. 271-436, 2014.
- [GWW] CAROLYN GORDON, DAVID L. WEBB, SCOTT WOLPERT. *One Cannot Hear the Shape of a Drum*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. **27**, no. 1, pp. 134-138, 1992.
- [Hal] BENJAMIN HALPERN. *Strange billiard tables*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. **232**, pp. 297-305, 1977.
- [Ivr] VICTOR YA. IVRII. *The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. vol. **14**, no. 2, pp. 25-34, 1980.
- [Kac] MARK KAC. *Can One Hear the Shape of a Drum?*. The American Mathematical Monthly, vol. **73**, no. 4, pp. 1-23, 1966.
- [KS] VADIM KALOSHIN, ALFONSO SORRENTINO. *On the local Birkhoff conjecture for convex billiards*. Ann. Math., vol. **188**, pp. 315-380, 2018.
- [Laz] VLADIMIR F. LAZUTKIN. *Existence of caustics for the billiard problem in a convex domain*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol. **37**, pp. 186-216, 1973 (in russo).
- [MT] HOWARD MASUR, Sergei Tabachnikov. *Rational billiards and flat structures*. Handbook of Dynamical Systems, vol. **1A**, North-Holland, 1015-1089, 2002.
- [Mat] JOHN N. MATHER. *Glancing billiards*. Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (3-4): 397-403, 1982.
- [Por] HILLEL PORITSKY. *The billiard ball problem on a table with a convex boundary—an illustrative dynamical problem*. Ann. Math., vol. **51**, pp. 446-470, 1950.
- [Ray] JOHN W.S. RAYLEIGH. *The Problem of the Whispering Gallery*. Phil. Mag., vol. **20**, pp. 1001-1004, 1910.
- [Sin] YAKOV G. SINAI. *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*. Russ. Math. Surveys, vol. **25**, pp. 137-189, 1970.
- [Tab1] SERGEI TABACHNIKOV. *Billiards*. Panor. Synth., pp. vi+142, 1995.
- [Tab2] SERGEI TABACHNIKOV. *Geometry and billiards*. Student mathematical library, vol. **30**, pp. xii+176, Providence, RI, American Mathematical Society, 2005.



Alfonso Sorrentino

Alfonso Sorrentino è professore associato di analisi matematica presso il dipartimento di matematica dell'università di Roma "Tor Vergata" (dal 2014). Ha conseguito il Ph.D. in matematica presso l'università di Princeton (2008) ed ha in seguito lavorato presso la Fondation des Sciences Mathématiques di Parigi (2008-2009), l'Università di Cambridge (2009-2012) e l'Università Roma Tre (2012-2014). I suoi interessi di ricerca spaziano nell'ambito dei sistemi dinamici Hamiltoniani e della geometria симплектика. Nel 2018 è stato vincitore del Premio Guido Fubini.