Biliardi Matematici

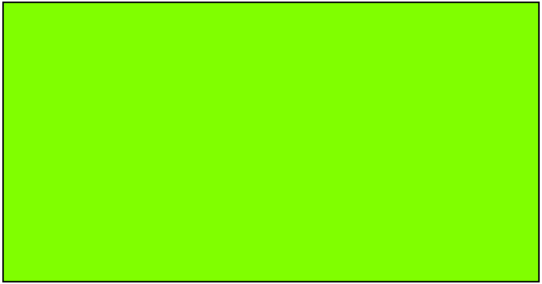
Alfonso Sorrentino

Roma, 2 Marzo 2015

A che gioco stiamo giocando?

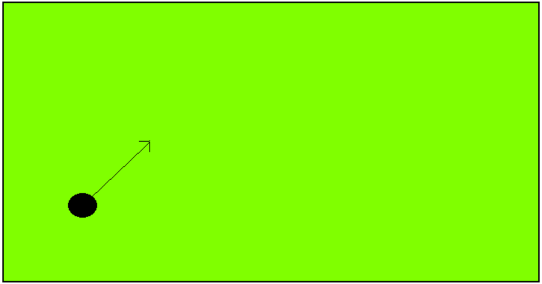
A che gioco stiamo giocando?

Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*)



A che gioco stiamo giocando?

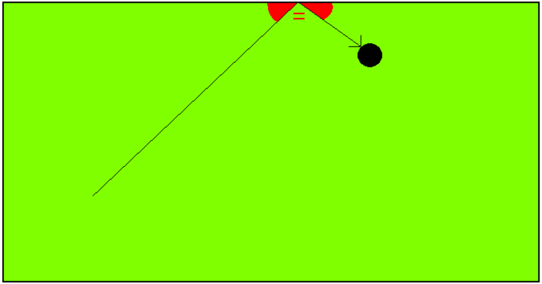
Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*) ed un punto al suo interno (la *palla*) che si muove in linea retta e con velocità costante.



A che gioco stiamo giocando?

Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*) ed un punto al suo interno (la *palla*) che si muove in linea retta e con velocità costante. Quando la palla colpisce il bordo, riflette la sua traiettoria in maniera *elastica*:

angolo di incidenza = angolo di riflessione.

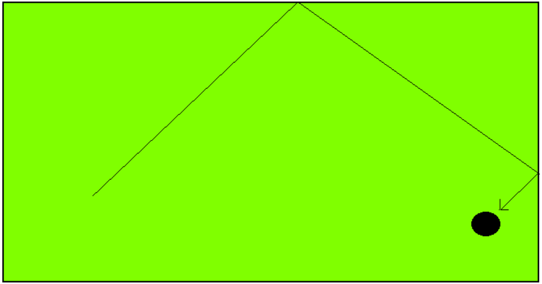


A che gioco stiamo giocando?

Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*) ed un punto al suo interno (la *palla*) che si muove in linea retta e con velocità costante. Quando la palla colpisce il bordo, riflette la sua traiettoria in maniera *elastica*:

$$\text{angolo di incidenza} = \text{angolo di riflessione.}$$

E continua così il suo moto...

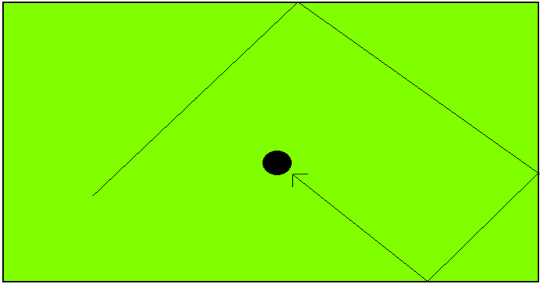


A che gioco stiamo giocando?

Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*) ed un punto al suo interno (la *palla*) che si muove in linea retta e con velocità costante. Quando la palla colpisce il bordo, riflette la sua traiettoria in maniera *elastica*:

$$\text{angolo di incidenza} = \text{angolo di riflessione.}$$

E continua così il suo moto...

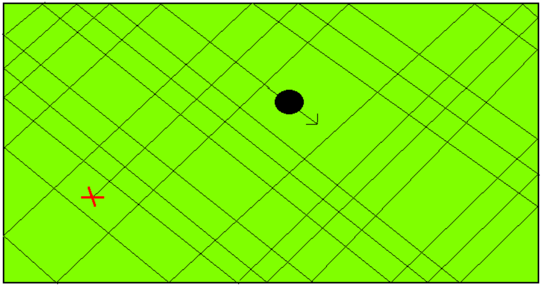


A che gioco stiamo giocando?

Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*) ed un punto al suo interno (la *palla*) che si muove in linea retta e con velocità costante. Quando la palla colpisce il bordo, riflette la sua traiettoria in maniera *elastica*:

$$\text{angolo di incidenza} = \text{angolo di riflessione.}$$

E continua così il suo moto...

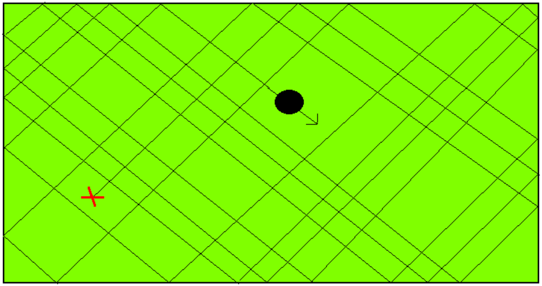


A che gioco stiamo giocando?

Un biliardo matematico consiste in una regione chiusa del piano (il *tavolo*) ed un punto al suo interno (la *palla*) che si muove in linea retta e con velocità costante. Quando la palla colpisce il bordo, riflette la sua traiettoria in maniera *elastica*:

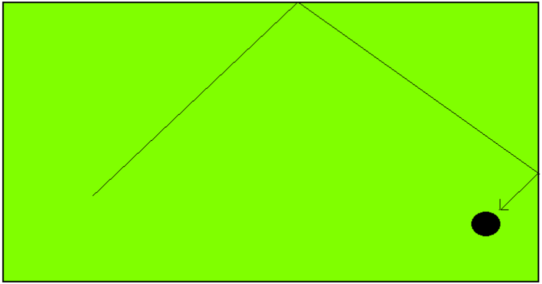
angolo di incidenza = angolo di riflessione.

E continua così il suo moto... Possiamo prevederne il comportamento?



Cosa vogliamo studiare?

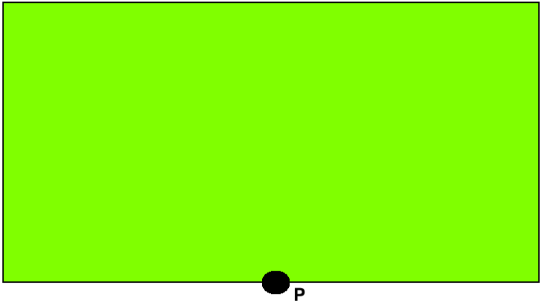
Osservazione: Il tragitto della pallina tra due urti consecutivi è un segmento e viene percorso con velocità costante.
È sufficiente conoscere i punti di urto con il bordo per ricostruire tutta la traiettoria percorsa!



Cosa vogliamo studiare?

Osservazione: Il tragitto della pallina tra due urti consecutivi è un segmento e viene percorso con velocità costante.
È sufficiente conoscere i punti di urto con il bordo per ricostruire tutta la traiettoria percorsa!

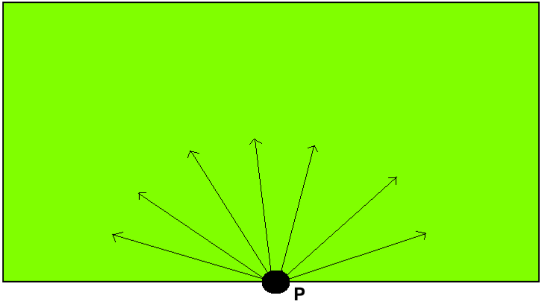
Supponiamo di partire da un punto P sul bordo. Dove finirà la palla?



Cosa vogliamo studiare?

Osservazione: Il tragitto della pallina tra due urti consecutivi è un segmento e viene percorso con velocità costante.
È sufficiente conoscere i punti di urto con il bordo per ricostruire tutta la traiettoria percorsa!

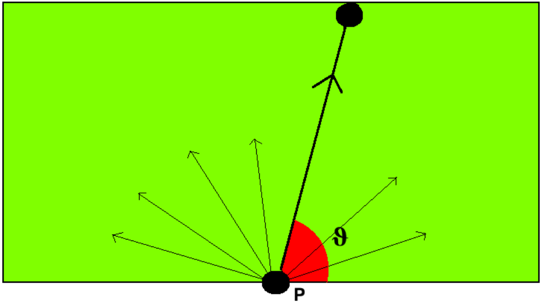
Supponiamo di partire da un punto P sul bordo. Dove finirà la palla?



Cosa vogliamo studiare?

Osservazione: Il tragitto della pallina tra due urti consecutivi è un segmento e viene percorso con velocità costante.
È sufficiente conoscere i punti di urto con il bordo per ricostruire tutta la traiettoria percorsa!

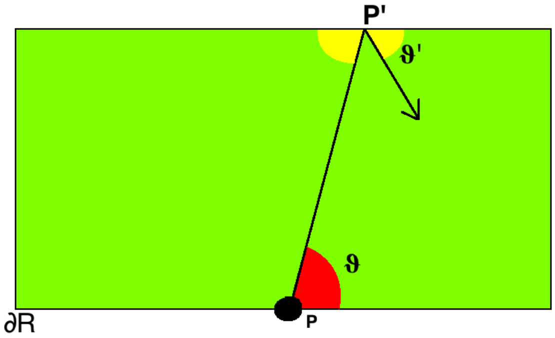
Supponiamo di partire da un punto P sul bordo. Dove finirà la palla?
Dipenderà dall'angolo $\vartheta \in (0, \pi)$ del lancio!



La Mappa Biliardo

La mappa biliardo è una mappa che ad ogni coppia iniziale (P, ϑ) associa il punto di urto successivo e l'angolo di inclinazione corrispondente:

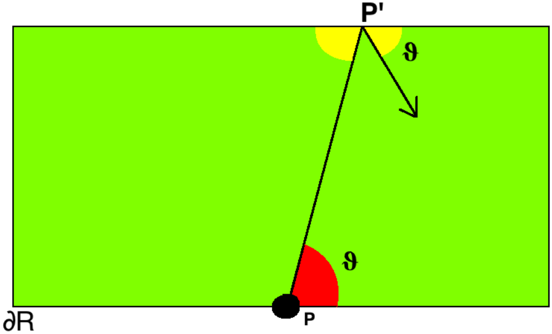
$$\begin{aligned} B : \partial R \times (0,\pi) &\longrightarrow \partial R \times (0,\pi) \\ (P,\vartheta) &\longrightarrow (P',\vartheta') \end{aligned}$$



La Mappa Biliardo

La mappa biliardo è una mappa che ad ogni coppia iniziale (P, ϑ) associa il punto di urto successivo e l'angolo di inclinazione corrispondente:

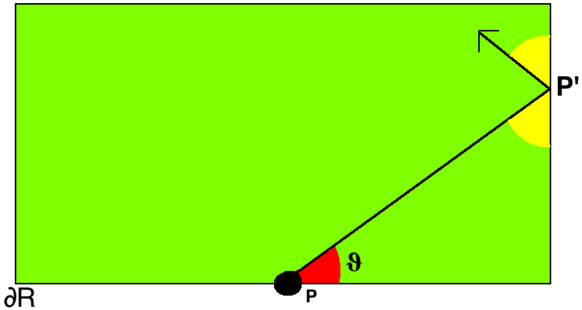
$$\begin{aligned} B : \partial R \times (0, \pi) &\longrightarrow \partial R \times (0, \pi) \\ (P, \vartheta) &\longrightarrow (P', \vartheta') \end{aligned}$$



La Mappa Biliardo

La mappa biliardo è una mappa che ad ogni coppia iniziale (P, ϑ) associa il punto di urto successivo e l'angolo di inclinazione corrispondente:

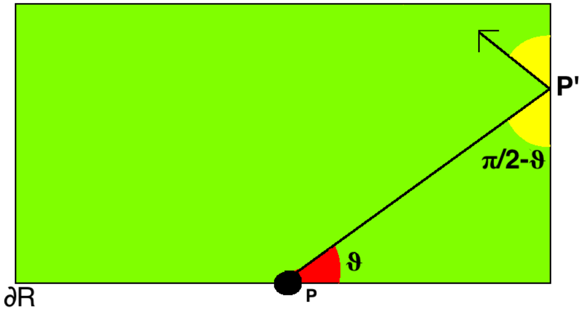
$$\begin{aligned} B : \partial R \times (0, \pi) &\longrightarrow \partial R \times (0, \pi) \\ (P, \vartheta) &\longrightarrow (P', \vartheta') \end{aligned}$$



La Mappa Biliardo

La mappa biliardo è una mappa che ad ogni coppia iniziale (P, ϑ) associa il punto di urto successivo e l'angolo di inclinazione corrispondente:

$$\begin{aligned} B : \partial R \times (0, \pi) &\longrightarrow \partial R \times (0, \pi) \\ (P, \vartheta) &\longrightarrow (P', \vartheta') \end{aligned}$$



Digressione: Il Biliardo è un Sistema Dinamico

Cos'è un Sistema Dinamico?

È un sistema il cui stato evolve nel tempo.
Obiettivo: studiarne l'evoluzione nel tempo.

Digressione: Il Biliardo è un Sistema Dinamico

Cos'è un Sistema Dinamico?

È un sistema il cui stato evolve nel tempo.
Obiettivo: studiarne l'evoluzione nel tempo.

- Stato: "caratteristiche" del sistema che ne identificano la condizione in maniera univoca (ad esempio, per il biliardo, lo stato della palla è identificato dalla coppia (P, ϑ)).
  - La sequenza degli stati assunti si dice orbita.
  - L'Insieme dei possibili stati $\longrightarrow$ spazio delle fasi
    (per il biliardo è $\partial R \times (0, \pi)$).

Digressione: Il Biliardo è un Sistema Dinamico

Cos'è un Sistema Dinamico?

È un sistema il cui stato evolve nel tempo.
Obiettivo: studiarne l'evoluzione nel tempo.

- Stato: "caratteristiche" del sistema che ne identificano la condizione in maniera univoca (ad esempio, per il biliardo, lo stato della palla è identificato dalla coppia (P, ϑ)).
  - La sequenza degli stati assunti si dice orbita.
  - L'Insieme dei possibili stati $\longrightarrow$ spazio delle fasi (per il biliardo è $\partial R \times (0, \pi)$).
- Evoluzione: legge/mappa che permette di ricavare l'evoluzione da uno stato a quello "successivo" (ad esempio, per il biliardo, l'evoluzione è data dalla mappa B).

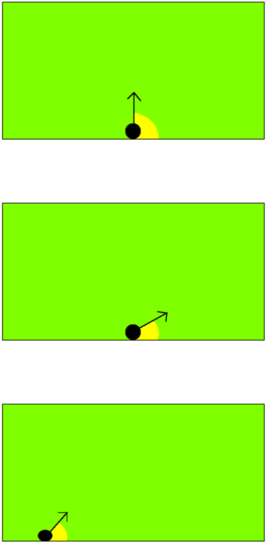
Digressione: Il Biliardo è un Sistema Dinamico

Cos'è un Sistema Dinamico?

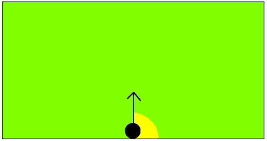
È un sistema il cui stato evolve nel tempo.
Obiettivo: studiarne l'evoluzione nel tempo.

- Stato: "caratteristiche" del sistema che ne identificano la condizione in maniera univoca (ad esempio, per il biliardo, lo stato della palla è identificato dalla coppia (P, ϑ)).
  - La sequenza degli stati assunti si dice orbita.
  - L'Insieme dei possibili stati $\longrightarrow$ spazio delle fasi (per il biliardo è $\partial R \times (0, \pi)$).
- Evoluzione: legge/mappa che permette di ricavare l'evoluzione da uno stato a quello "successivo" (ad esempio, per il biliardo, l'evoluzione è data dalla mappa B).
- Tempo: può essere **continuo** (ad ogni istante vogliamo conoscerne lo stato) o **discreto** (solo in certi istanti: ad esempio, nel caso del biliardo, nei momenti di urto con il bordo)

Esempi di Orbite per il Biliardo Rettangolare

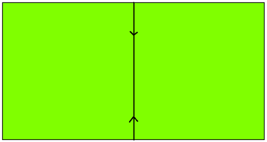


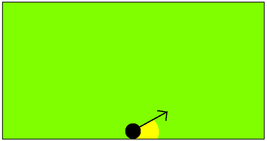
Esempi di Orbite per il Biliardo Rettangolare

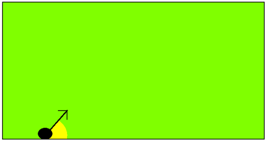


Orbita periodica

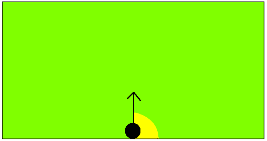
N^o impatti (Periodo) $= 2$





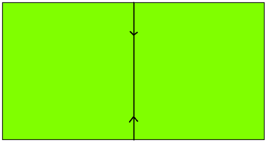


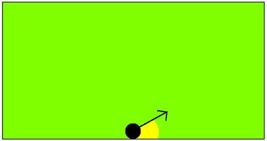
Esempi di Orbite per il Biliardo Rettangolare



Orbita periodica

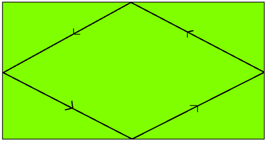
N^o impatti (Periodo) $= 2$

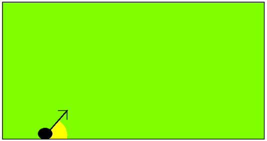




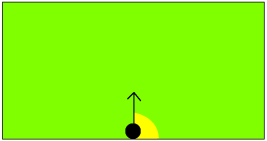
Orbita periodica

N^o impatti (Periodo) $= 4$



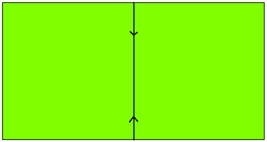


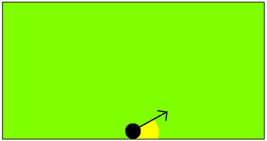
Esempi di Orbite per il Biliardo Rettangolare



Orbita periodica

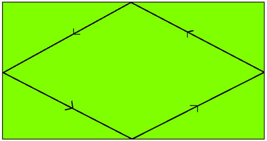
N^o impatti (Periodo) $= 2$

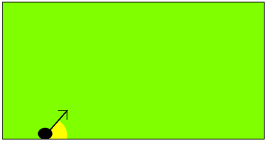




Orbita periodica

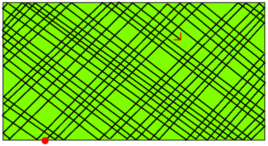
N^o impatti (Periodo) $= 4$





Orbita non-periodica
(Forse)

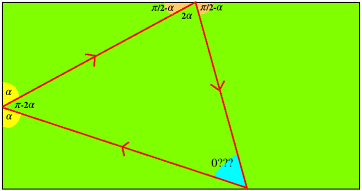
Altre proprietà?



Domande in cerca di risposta

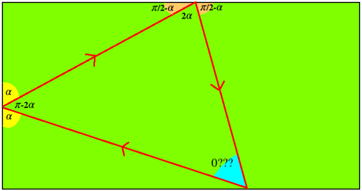
I. Esistono orbite periodiche con un qualsiasi numero N di impatti?

I. Esistono orbite periodiche con un qualsiasi numero N di impatti?
NO! (Ad esempio, non esistono orbite di periodo 3)



(In generale non esistono orbite con numero di impatti dispari)

I. Esistono orbite periodiche con un qualsiasi numero N di impatti?
NO! (Ad esempio, non esistono orbite di periodo 3)

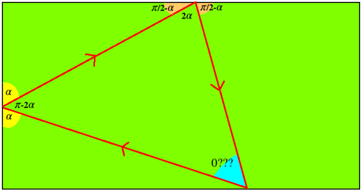


(In generale non esistono orbite con numero di impatti dispari)

II. Esistono infinite orbite periodiche?

Domande in cerca di risposta

I. Esistono orbite periodiche con un qualsiasi numero N di impatti?
NO! (Ad esempio, non esistono orbite di periodo 3)



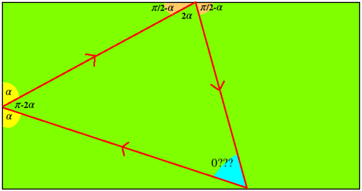
(In generale non esistono orbite con numero di impatti dispari)

II. Esistono infinite orbite periodiche?

III. Come riconoscere se un'orbita è periodica?

Domande in cerca di risposta

I. Esistono orbite periodiche con un qualsiasi numero N di impatti?
NO! (Ad esempio, non esistono orbite di periodo 3)



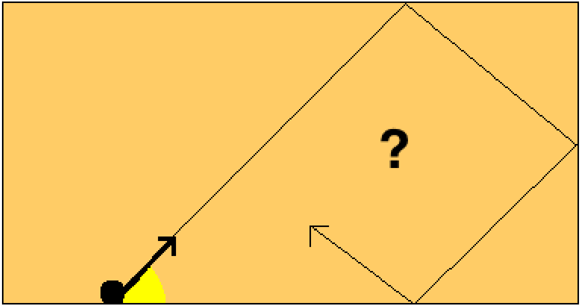
(In generale non esistono orbite con numero di impatti dispari)

II. Esistono infinite orbite periodiche?

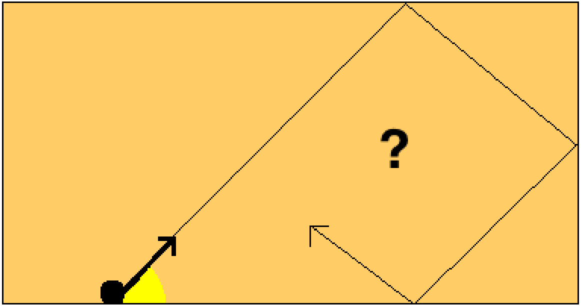
III. Come riconoscere se un'orbita è periodica?

IV. Come si comportano le orbite non periodiche?

Essere o non essere (periodica), questo è il problema...



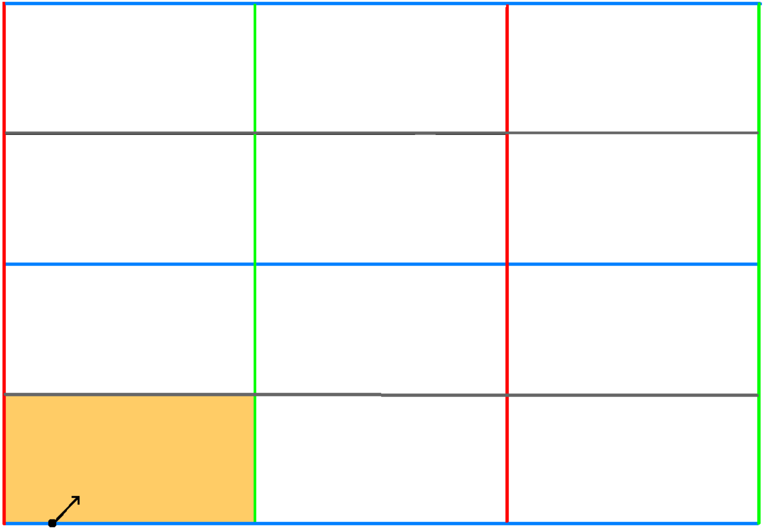
Essere o non essere (periodica), questo è il problema...



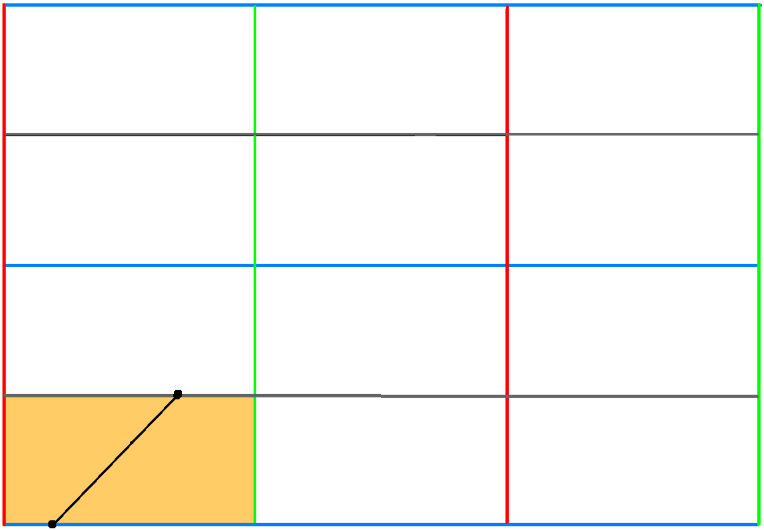
IDEA: Invece di riflettere la palla... Riflettiamo il tavolo!!!

"Though this be madness, yet there is method in 't" (Hamlet, Atto II, Scena II)

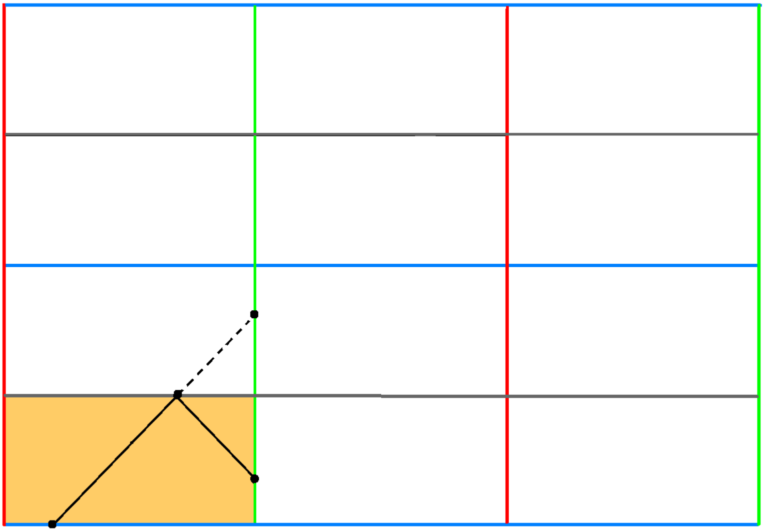
Riflettere (quasi sempre) aiuta



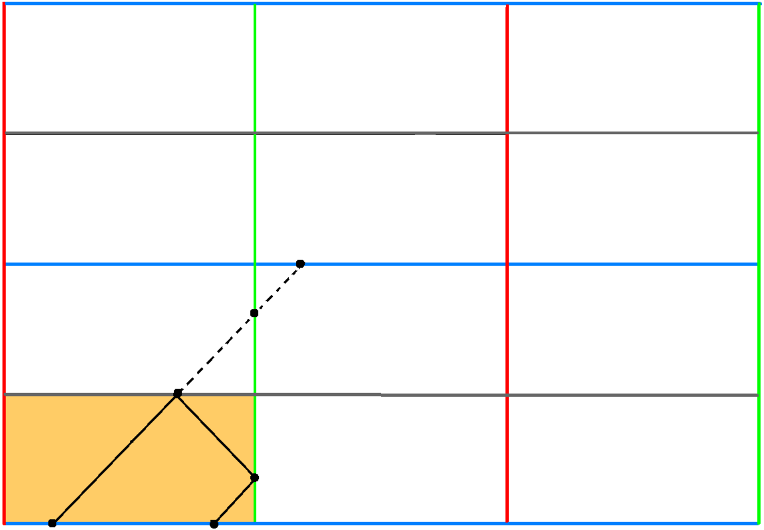
Riflettere (quasi sempre) aiuta



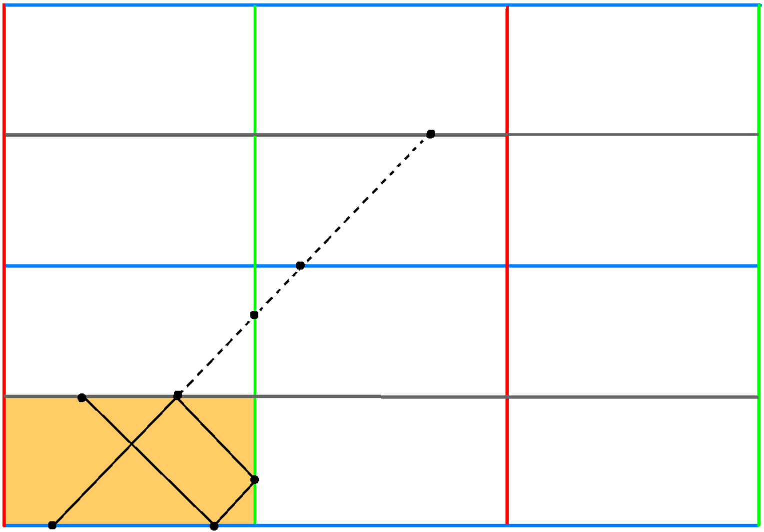
Riflettere (quasi sempre) aiuta



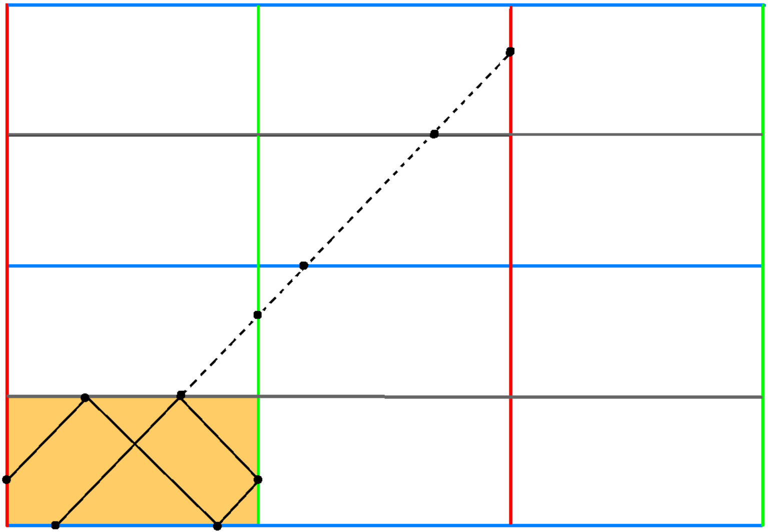
Riflettere (quasi sempre) aiuta



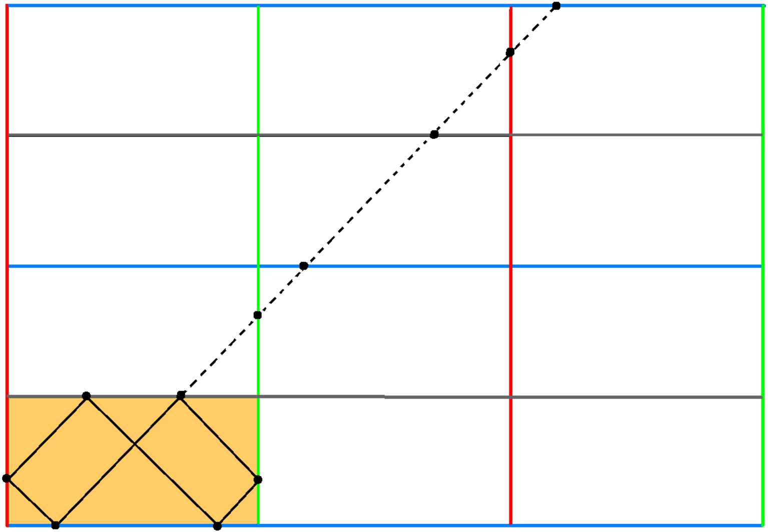
Riflettere (quasi sempre) aiuta



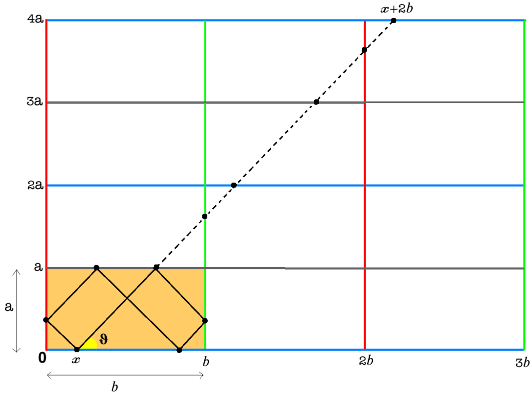
Riflettere (quasi sempre) aiuta



Riflettere (quasi sempre) aiuta

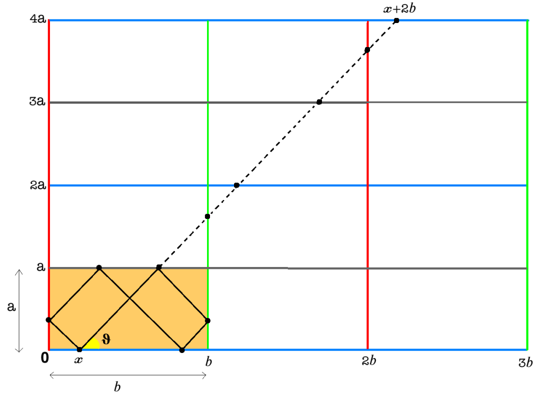


Riflettere (quasi sempre) aiuta



L'orbita è periodica $\Longrightarrow$ $\tan\vartheta = \frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b}$, con $p, q \in \mathbb{N}$.

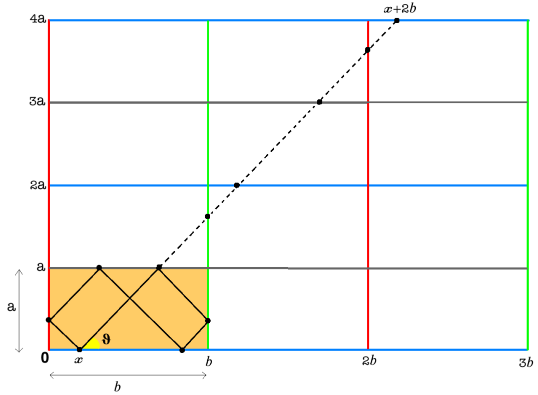
Riflettere (quasi sempre) aiuta



L'orbita è periodica $\Longrightarrow$ $\tan\vartheta = \frac{p}{q}\cdot\frac{a}{b}$, con $p, q \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$ (a meno che non finisca in un angolo)

Riflettere (quasi sempre) aiuta

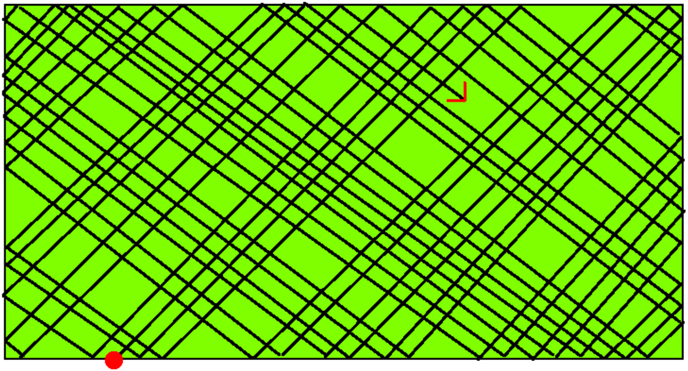


L'orbita è periodica $\Longrightarrow$ $\tan\vartheta = \frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b}$, con $p, q \in \mathbb{N}$.

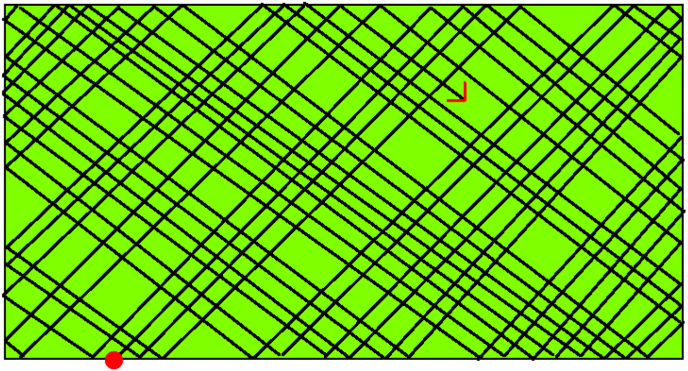
$\Longleftarrow$ (a meno che non finisca in un angolo)

Esistono infinite orbite periodiche distinte e con numero di impatti arbitrariamente grande.

E se l'orbita non è periodica (e non va in buca)?

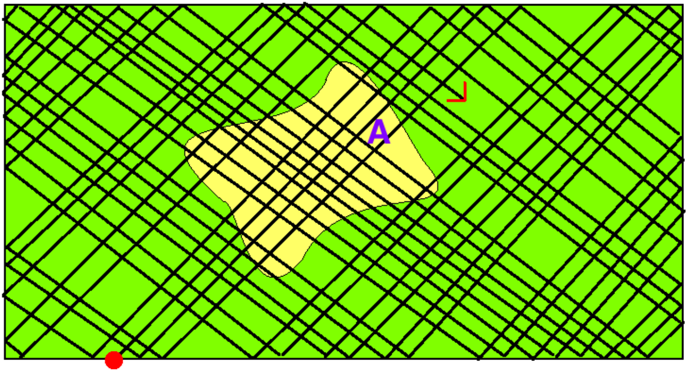


E se l'orbita non è periodica (e non va in buca)?



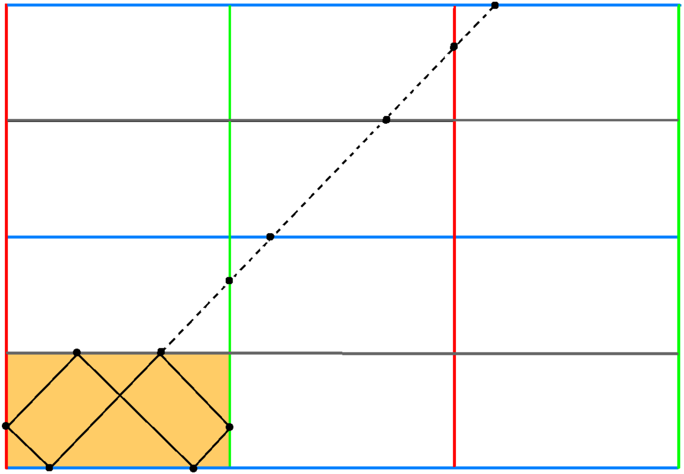
- L'orbita non si chiuderà mai ed andrà arbitrariamente vicina ad ogni punto del bordo (orbita densa)

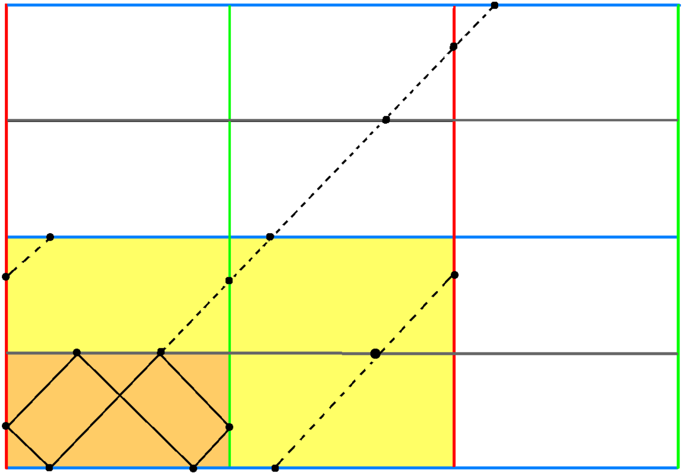
E se l'orbita non è periodica (e non va in buca)?

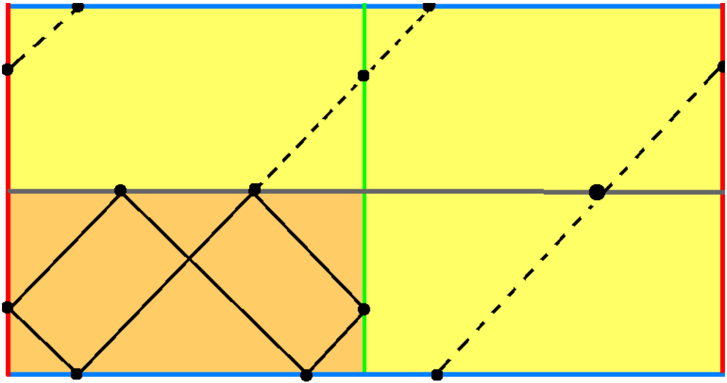


- L'orbita non si chiuderà mai ed andrà arbitrariamente vicina ad ogni punto del bordo (orbita densa)
- L'orbita si distribuisce equamente (equidistribuisce) nel tavolo: la porzione di tempo t spesa in una regione A sarà proporzionale (per $t \to +\infty$) all'area di A.

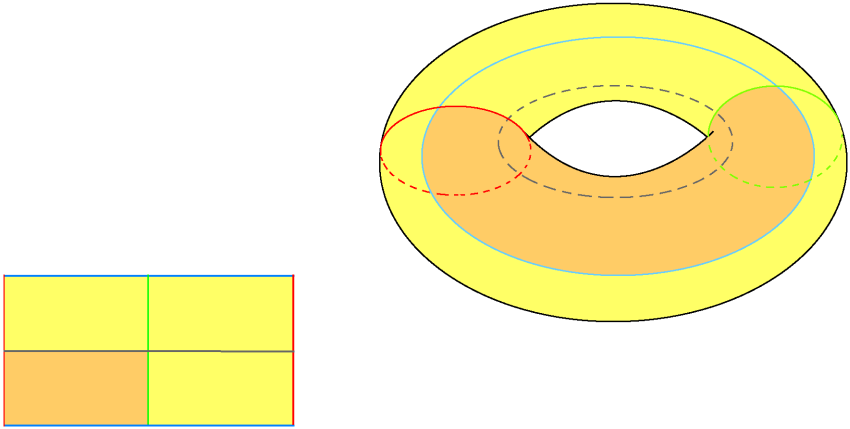
Dal Biliardo alla... Ciambella



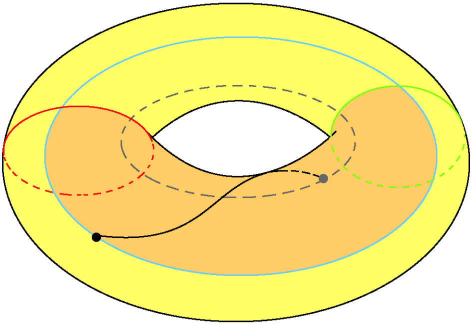


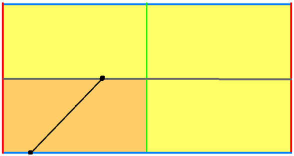


Dal Biliardo alla... Ciambella (o Toro)

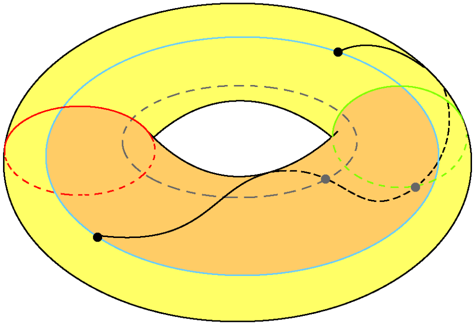


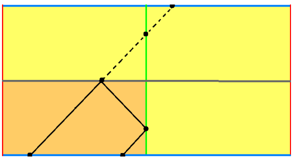
Dal Biliardo alla... Ciambella (o Toro)



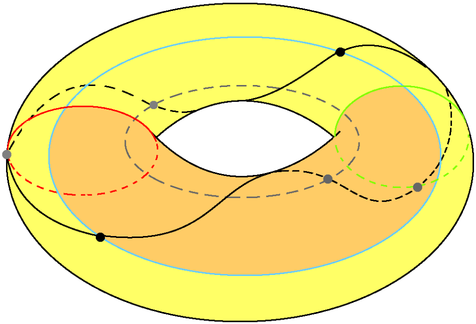


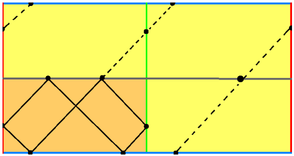
Dal Biliardo alla... Ciambella (o Toro)



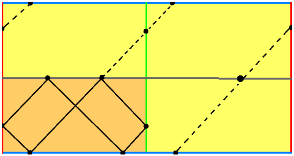


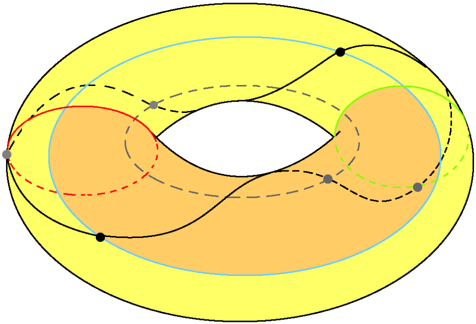
Dal Biliardo alla... Ciambella (o Toro)





Dal Biliardo alla... Ciambella (o Toro)





Biliardo nel rettangolo $\longrightarrow$ Flusso lineare sul Toro

Orbite periodiche $\longrightarrow$ Geodetiche chiuse

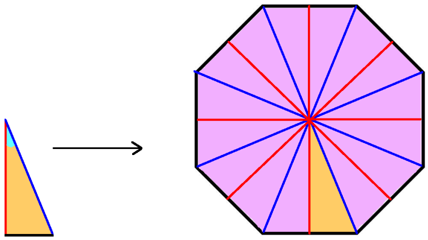
Ad Maiora

Questo stesso ragionamento si può estendere a biliardi in poligoni con tutti gli angoli della forma $\frac{p_i}{q_i}\pi$, $p_i, q_i \in \mathbb{N}$, detti Biliardi Razionali (idea di Katok e Zemlyakov).

Ad Maiora

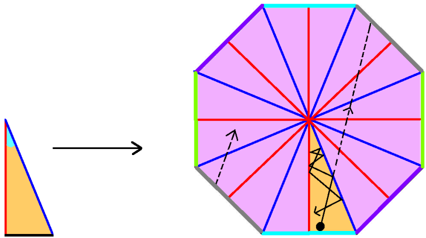
Questo stesso ragionamento si può estendere a biliardi in poligoni con tutti gli angoli della forma $\frac{p_i}{q_i}\pi$, $p_i, q_i \in \mathbb{N}$, detti Biliardi Razionali (idea di Katok e Zemlyakov).

Esempio (Triangolo rettangolo con un angolo uguale a $\frac{\pi}{8}$):



Questo stesso ragionamento si può estendere a biliardi in poligoni con tutti gli angoli della forma $\frac{p_i}{q_i}\pi$, $p_i, q_i \in \mathbb{N}$, detti Biliardi Razionali (idea di Katok e Zemlyakov).

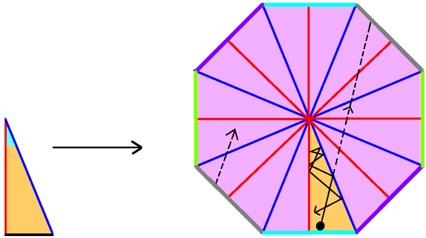
Esempio (Triangolo rettangolo con un angolo uguale a $\frac{\pi}{8}$):

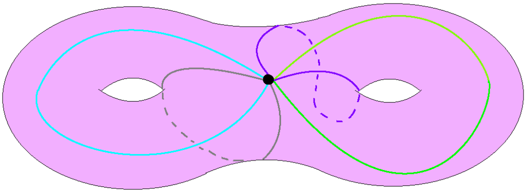


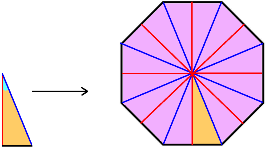
Ad Maiora

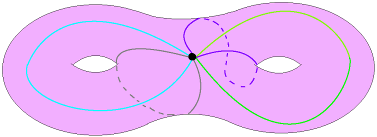
Questo stesso ragionamento si può estendere a biliardi in poligoni con tutti gli angoli della forma $\frac{p_i}{q_i}\pi$, $p_i, q_i \in \mathbb{N}$, detti Biliardi Razionali (idea di Katok e Zemlyakov).

Esempio (Triangolo rettangolo con un angolo uguale a $\frac{\pi}{8}$):





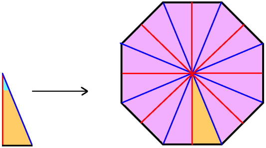


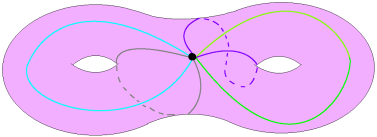


La superficie associata al biliardo si chiama superficie di traslazione ed il moto della palla sul tavolo si traduce in un moto lineare su questa superficie (a meno di alcuni punti singolari).

$\longrightarrow$ Dinamica di Teichmuller

Ad Maiora





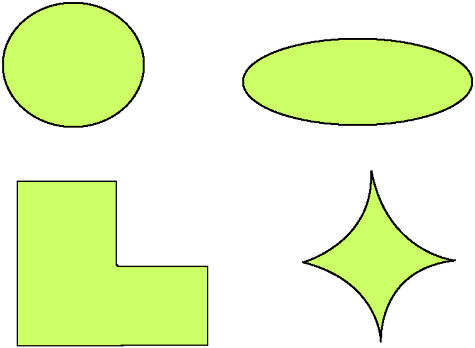
La superficie associata al biliardo si chiama superficie di traslazione ed il moto della palla sul tavolo si traduce in un moto lineare su questa superficie (a meno di alcuni punti singolari).

$\longrightarrow$ Dinamica di Teichmuller

Tra i molti meriti di una delle recenti medaglie Fields (ICM 2014, Seoul) - Maryam Mirzakhani - ci sono importantissimi risultati in questi ambiti di ricerca.

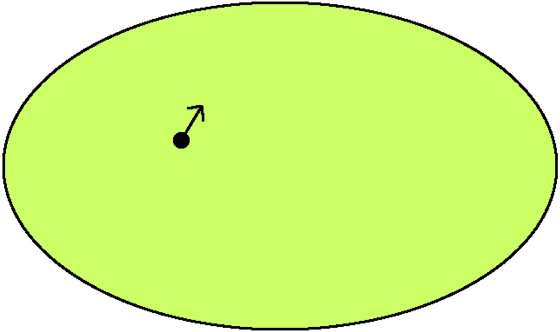
Perché restringersi a tavoli poligonali?

Potremmo considerare tavoli da biliardo con forme diverse.

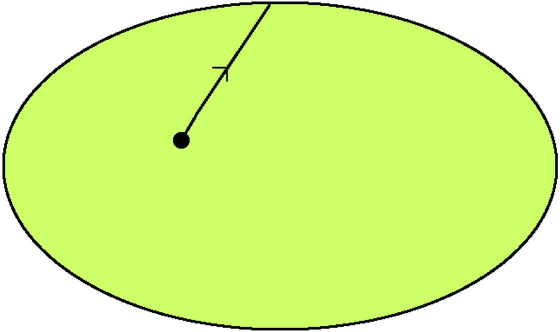


Problema: Come definire la regola di riflessione visto che il bordo del tavolo è curvo?

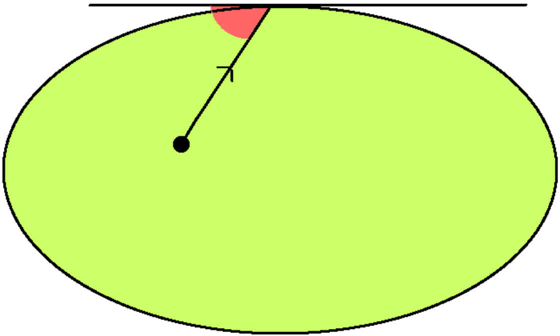
Perché restringersi a tavoli poligonali?



Perché restringersi a tavoli poligonali?

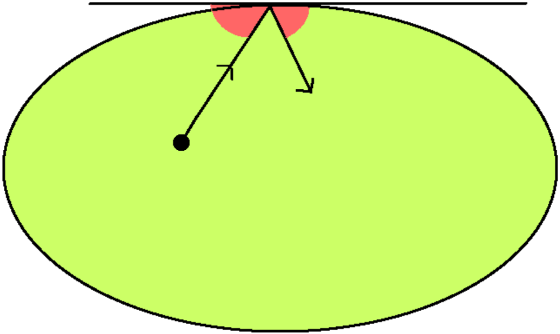


Perché restringersi a tavoli poligonali?



Regola di riflessione: Si considera l'angolo formato con la retta tangente!

Perché restringersi a tavoli poligonali?

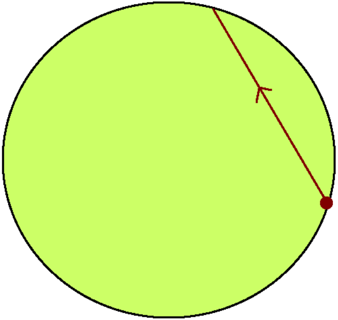


Regola di riflessione: Si considera l'angolo formato con la retta tangente!

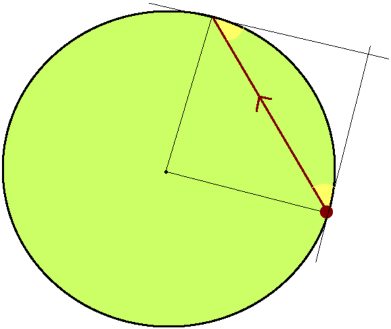
angolo di incidenza = angolo di riflessione

Biliardo Circolare

Biliardo Circolare

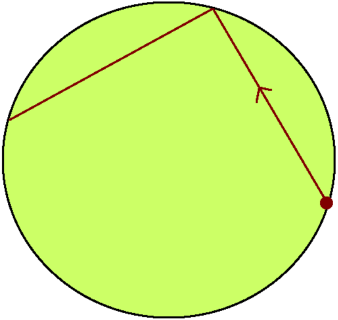


Biliardo Circolare



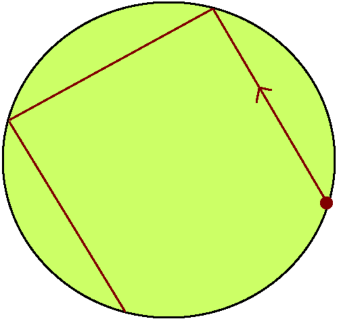
L'angolo rimane costante ad ogni riflessione (è un Integrale del moto)

Biliardo Circolare



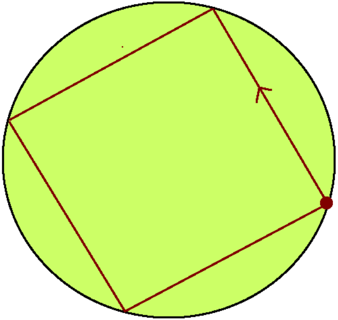
L'angolo rimane costante ad ogni riflessione (è un Integrale del moto)

Biliardo Circolare



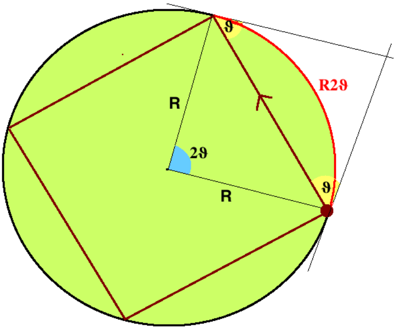
L'angolo rimane costante ad ogni riflessione (è un Integrale del moto)

Biliardo Circolare



L'angolo rimane costante ad ogni riflessione (è un Integrale del moto)

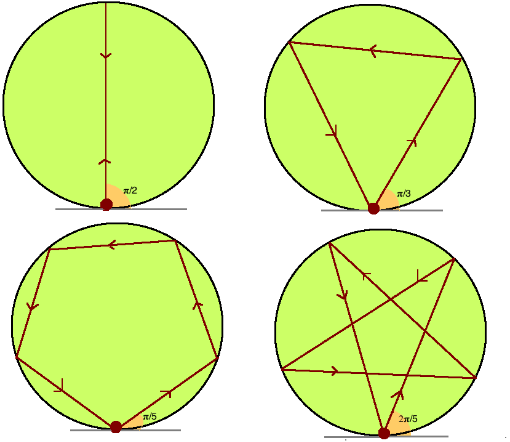
Biliardo Circolare



L'angolo rimane costante ad ogni riflessione (è un Integrale del moto)

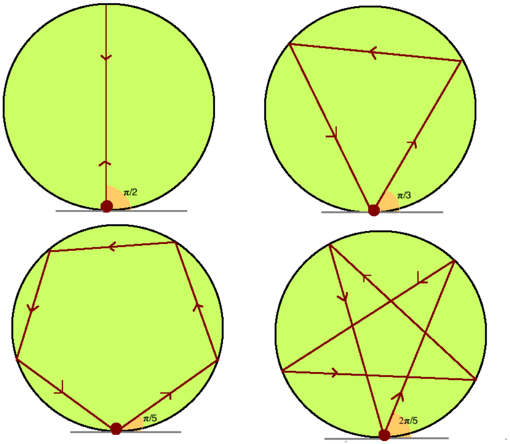
Come distinguere se un'orbita è periodica?

Se ϑ è un multiplo razionale di π, allora l'orbita è periodica:



Biliardo Circolare

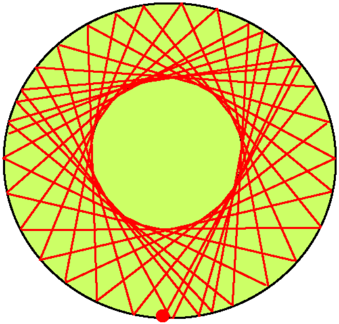
Se ϑ è un multiplo razionale di π, allora l'orbita è periodica:



Per ogni razionale $\frac{p}{q} \in (0, \frac{1}{2}]$ esistono infinite orbite periodiche che compiono q impatti (periodo) e p giri "intorno" al tavolo (il cerchio).

Biliardo Circolare

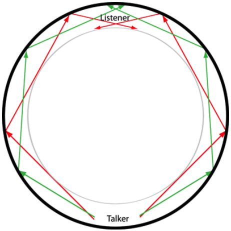
Altrimenti, se ϑ NON è un multiplo razionale di π, allora l'orbita si avvicia arbitrariamente ad ogni punto del bordo (è densa):



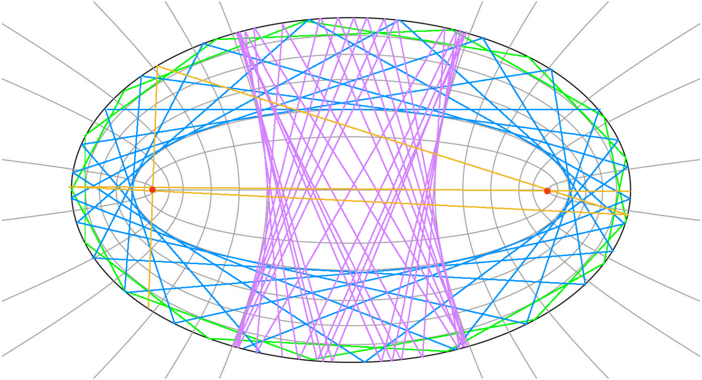
Attenzione: NON si distribuisce equamente sul tavolo: c'è una regione (un cerchio) che non attraversa mai! La circonferenza che si viene a formare si chiama caustica.

Curiosità: Caustiche e Camere a sussurro

Whispering Gallery nella Cattedrale di St. Paul a Londra (Lord Rayleigh, 1878 circa)



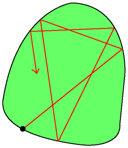
Ed in un'ellisse?



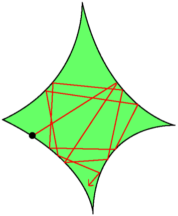
- Se l'orbita passa per uno dei fuochi, dopo il rimbalzo passerà per l'altro (e così via, appiattendosi sempre di più verso il semi-asse maggiore).
- Altrimenti, l'orbita sarà tangente (e lo rimarrà ad ogni rimbalzo) ad un'elllisse o ad un'iperbole omofocale (dette caustiche).

Ed in generale?

Lo studio dei biliardi è tutt'oggi un'attivissima area di ricerca. La dinamica dipende sensibilmente dalla forma del tavolo:



Biliardi (strettamente) convessi:
- Infinite orbite periodiche: almeno due per ogni numero di impatti (in realtà, per ogni numero di rotazione) (G. Birkhoff, 1927).
- Infinite caustiche vicino al bordo (V. Lazutkin, 1973).
- Dinamica non troppo caotica.



Biliardi concavi (o dispersivi):
- A causa della concavità, orbite vicine tendono ad allontanarsi ad ogni rimbalzo (divergenza esponenziale).
- Iperbolicità e comportamento caotico (Y. Sinai, 1970).
- Studio delle proprietà statistiche delle orbite.

Grazie per l'attenzione!