Proprietà simplettiche e variazionali di sistemi Hamiltoniani convessi

Alfonso Sorrentino

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

A.Sorrentino@dpmms.cam.ac.uk

16 Settembre 2011

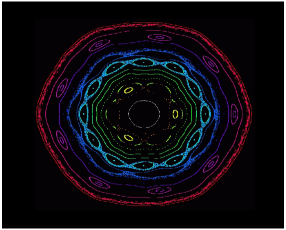
XIX CONGRESSO UMI BOLOGNA 2011

Introduzione

Studio della dinamica dei sistemi Hamiltoniani

Ordine (stabilità) *versus* Caos (instabilità)

- Metodi della Meccanica Classica
- Metodi perturbativi (Teoria KAM,...)



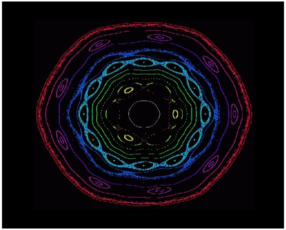
(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

Introduzione

Studio della dinamica dei sistemi Hamiltoniani

Ordine (stabilità) *versus* Caos (instabilità)

- Metodi della Meccanica Classica
- Metodi perturbativi (Teoria KAM,...)



(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

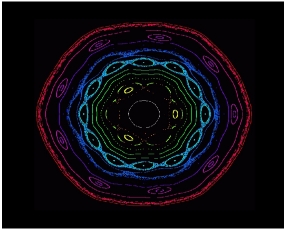
- Metodi geometrici (Geom. Simplettica, Omologia di Floer,...)
- Metodi variazionali (Teoria di Mather, teoria KAM debole,...)

Introduzione

Studio della dinamica dei sistemi Hamiltoniani

Ordine (stabilità) *versus* Caos (instabilità)

- Metodi della Meccanica Classica
- Metodi perturbativi (Teoria KAM,...)



(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

- Metodi geometrici (Geom. Simplettica, Omologia di Floer,...)
- Metodi variazionali (Teoria di Mather, teoria KAM debole,...)

Introduzione

Teoria di Aubry - Mather

Metodo variazionale basati sul *Principio di minima azione Lagrangiana*

- Serge Aubry & John Mather (anni '80): per mappe di tipo *twist* del cilindro;
- John Mather (anni '90): per sistemi Hamiltoniani di tipo *Tonelli*.

Introduzione

Teoria di Aubry - Mather

Metodo variazionale basati sul *Principio di minima azione Lagrangiana*

- Serge Aubry & John Mather (anni '80): per mappe di tipo *twist* del cilindro;
- John Mather (anni '90): per sistemi Hamiltoniani di tipo *Tonelli*.

Hamiltoniane di Tonelli

Sia M una varietà Riemanniana finito dimensionale, compatta e connessa. $H \in C^2(T^*M, \mathbb{R})$ è detta di *Tonelli* se:

- H è strettamente convessa in ciascuna fibra: $\partial^2_{pp} H(x,p) > 0$;
- H cresce più che linearmente in ciascuna fibra:

$$\lim_{\|p\| \to +\infty} \frac{H(x,p)}{\|p\|} = +\infty \quad \text{uniform. in } x.$$

Esempi di Hamiltoniane di Tonelli

- Flussi geodetici
  Sia g una metrica Riemanniana su M. L'Hamiltoniana (o energia cinetica)
  $$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 := \frac{1}{2}g_x(p,p)$$
  corrisponde al flusso geodetico.
- Hamiltoniane della meccanica classica (Energia cinetica + Energia potenziale):
  $$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 + U(x)$$
  dove $U : M \to \mathbb{R}$ rappresenta l'energia potenziale.

Esempi di Hamiltoniane di Tonelli

- Flussi geodetici
  Sia g una metrica Riemanniana su M. L'Hamiltoniana (o energia cinetica)
  $$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 := \frac{1}{2}g_x(p,p)$$
  corrisponde al flusso geodetico.
- Hamiltoniane della meccanica classica (Energia cinetica + Energia potenziale):
  $$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 + U(x)$$
  dove $U : M \to \mathbb{R}$ rappresenta l'energia potenziale.

La dinamica di ogni campo vettoriale X su M si può *includere* nel flusso di un'Hamiltoniana di Tonelli:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 + p \cdot X(x)\,.$$

Proprietà variazionali

Sia $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana di Tonelli e $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ la Lagrangiana associata:

$$\boxed{L(x,v) := \sup_{p \in T_x^* M} \left(p \cdot v - H(x,p) \right)}$$

Proprietà variazionali

Sia $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana di Tonelli e $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ la Lagrangiana associata:

$$\boxed{L(x,v) := \sup_{p \in T_x^* M} \left(p \cdot v - H(x,p) \right)}$$

Proposizione

Se Λ è un grafico Lagrangiano invariante in $(T^*M, \omega_{\text{stand.}})$ con classe di coomologia c, allora le orbite di Λ (risp. le misure invarianti di probabilità supportate in Λ), minimizzano l'azione di $L - \eta_c(x) \cdot v$, dove η_c è una qualsiasi 1-forma chiusa su M, con classe di coomologia c.

Osservazione: η_c chiusa $\Longrightarrow$ L ed $L - \eta_c$ hanno lo stesso flusso di Eulero-Lagrange.

Hamiltoniane di Tonelli e Teoria di Aubry-Mather

Idea:

Studiare orbite e misure di probabilità invarianti che minimizzano l'azione Lagrangiana di $L(x, v) - \eta_c(x) \cdot v$, per ogni $c \in H^1(M; \mathbb{R})$.

Hamiltoniane di Tonelli e Teoria di Aubry-Mather

Idea:

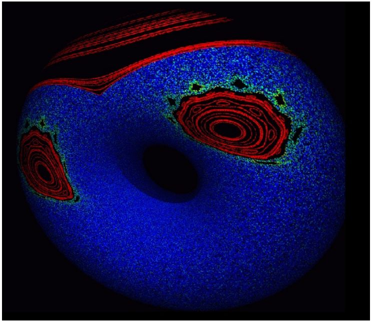
Studiare orbite e misure di probabilità invarianti che minimizzano l'azione Lagrangiana di $L(x,v) - \eta_c(x) \cdot v$, per ogni $c \in H^1(M;\mathbb{R})$.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Sistemi Hamiltoniani di Tonelli}} \arrow[d, "\text{(Metodi variazionali)}"] & \\
\boxed{\text{Teoria di Aubry - Mather}} \arrow[d, "\text{(Insiemi invarianti)}"] & \text{Minimizz. dell'azione Lagrangiana} \arrow[l, squiggly] \\
\boxed{\{\mathcal{A}_c\}_{c \in H^1(M;\mathbb{R})}} & \text{Insiemi di Aubry-Mather} \arrow[l, squiggly]
\end{tikzcd}
$$

Proprietà degli insiemi di Aubry-Mather

Gli insiemi di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$:

- sono non vuoti e compatti;
- sono invarianti per l'azione del flusso Hamiltoniano;
- sono *supportati* su grafici Lipschitz (Teorema del grafico di Mather);

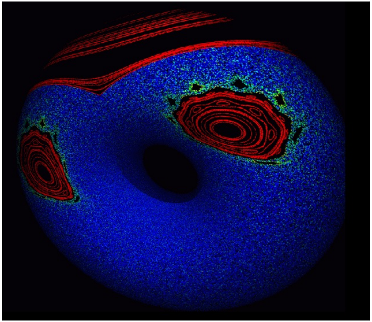


(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

Proprietà degli insiemi di Aubry-Mather

Gli insiemi di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$:

- sono non vuoti e compatti;
- sono invarianti per l'azione del flusso Hamiltoniano;
- sono *supportati* su grafici Lipschitz (Teorema del grafico di Mather);



(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

In particolare:

- Invarianza simplettica $\longleftrightarrow$ Invarianza per l'azione di simplettomorfismi che preservano l'essere di tipo Tonelli.
- Struttura Lagrangiana $\longleftrightarrow$ sono supportati su grafici Lagrangiani Lipschitz, la cui classe di coomologia e' c.

Insiemi di Aubry-Mather

Insiemi di Aubry - Mather

- Giocano un ruolo fondamentale nel determinare la dinamica globale.
  - Diffusione *à la* Arnol'd.
- Generalizzano i *grafici Lagrangiani invarianti*.
  - Non sono in generale né regolari, né varietà!
- La proprietà di minimizzazione dell'azione si traduce in un'*intrinseca struttura simplettica e Lagrangiana*.
- Sono legati alla regolarità delle (sotto-)soluzioni di viscosità dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata.

Applicazioni allo studio della dinamica?

Alcune recenti applicazioni

- Teorema di Liouville-Arnol'd (non commutativo)
  - A. S., *On the integrability of Tonelli Hamiltonians*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 10.
  - Leo Butler, A. S., *A weak Liouville-Arnol'd theorem*, Preprint.

- Caratterizzazione variazionale dell'integrabilità in termini della *regolarità della minima azione lagrangiana*.
  - Daniel Massart, A. S., *Differentiability of Mather's average action and integrability on closed surfaces.*, Nonlinearity 24 (2011), no. 6.

- Significato geometrico della minima azione lagrangiana in termini della distanza asintotica dall'identità nel gruppo dei diffeomorfismi Hamiltoniani.
  - A. S., Claude Viterbo *Action minimizing properties and distances on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, Geom. Topol. 14 (2010), no. 4.

Alcune recenti applicazioni

- Teorema di Liouville-Arnol'd (non commutativo)
  - A. S., *On the integrability of Tonelli Hamiltonians*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 10.
  - Leo Butler, A. S., *A weak Liouville-Arnol'd theorem*, Preprint.

- Caratterizzazione variazionale dell'integrabilità in termini della *regolarità della minima azione lagrangiana*.
  - Daniel Massart, A. S., *Differentiability of Mather's average action and integrability on closed surfaces.*, Nonlinearity 24 (2011), no. 6.

- Significato geometrico della minima azione lagrangiana in termini della distanza asintotica dall'identità nel gruppo dei diffeomorfismi Hamiltoniani.
  - A. S., Claude Viterbo *Action minimizing properties and distances on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, Geom. Topol. 14 (2010), no. 4.

Integrabilità

Non esiste una definizione universalmente condivisa di integrabilità.
Alcune caratteristiche distintive:

- La possibilita' di determinare *soluzioni esplicite*;
- Esistenza di un numero sufficienti di *integrali primi* (cioè simmetrie del sistema);
- La possibilità di una descrizione puramente geometro-algebrica.

Integrabilità

Non esiste una definizione universalmente condivisa di integrabilità.
Alcune caratteristiche distintive:

- La possibilita' di determinare *soluzioni esplicite*;
- Esistenza di un numero sufficienti di *integrali primi* (cioè simmetrie del sistema);
- La possibilità di una descrizione puramente geometro-algebrica.

Integrabilità nel senso di Liouville

Esiste una foliazione dello spazio costituita da *tori Lagrangiani invarianti*, su cui il moto è coniugato ad una *rotazione*.

Integrabilità

Non esiste una definizione universalmente condivisa di integrabilità.
Alcune caratteristiche distintive:

- La possibilita' di determinare *soluzioni esplicite*;
- Esistenza di un numero sufficienti di *integrali del moto* (cioè simmetrie del sistema); [Teorema di Liouville-Arnol'd]
- La possibilità di una descrizione puramente geometro-algebrica.

Integrabilità nel senso di Liouville

Esiste una foliazione dello spazio costituita da *tori Lagrangiani invarianti*, su cui il moto è coniugato ad una *rotazione*.

QUALI CONDIZIONI IMPLICANO L'ESISTENZA DI UNA SIMILE FOLIAZIONE?

Teorema di Liouville - Arnol'd

Sia (V, ω) una varietà *simplettica* di dimensione $2n$
$H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana.

Integrale del moto (o integrale primo)

Una quantità costante lungo le curve del moto.

Remark: $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è un integrale del moto se e solo se le *parentesi di Poisson* $\{F, H\} := \omega(X_F, X_H) = 0$.

Teorema di Liouville - Arnol'd

Sia (V, ω) una varietà *simplettica* di dimensione $2n$
$H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana.

Integrale del moto (o integrale primo)

Una quantità costante lungo le curve del moto.

Remark: $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è un integrale del moto se e solo se le *parentesi di Poisson* $\{F, H\} := \omega(X_F, X_H) = 0$.

- Le orbite del sistema giacciono nelle varietà di livello $\{F = \text{costante}\}$
- Piu' integrali primi *funzionalmente indipendenti* esistono, minore è la *libertà* delle orbite.

Teorema di Liouville - Arnol'd

Supponiamo che esistano $n = \frac{1}{2}\mathrm{dim}(X)$ integrali primi $F_1, \ldots, F_n$. Dato $c \in \mathbb{R}^n$, valore *regolare* della mappa $F = (F_1, \ldots, F_n)$ (*i.e.* gli integrali primi sono *indipendenti*), la varietà di livello

$$M_c = \{x \in X : \ (F_1, \ldots, F_n) = c\}$$

se non vuota, è una varietà invariante per il flusso Hamiltoniano.

Possiamo dedurre altro?

Teorema di Liouville - Arnol'd

Supponiamo che esistano $n = \frac{1}{2}\dim(X)$ integrali primi $F_1, \ldots, F_n$. Dato $c \in \mathbb{R}^n$, valore *regolare* della mappa $F = (F_1, \ldots, F_n)$ (*i.e.* gli integrali primi sono *indipendenti*), la varietà di livello

$$M_c = \{x \in X : \ (F_1, \ldots, F_n) = c\}$$

se non vuota, è una varietà invariante per il flusso Hamiltoniano.

POSSIAMO DEDURRE ALTRO?

Sì, se gli integrali del moto sono in *involuzione* tra loro:

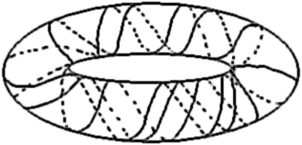
$$\{F_i, F_j\} = 0 \qquad \forall\, i, j.$$

Gli integrali primi generano una sottoalgebra abeliana dell'algebra di Lie $(C^\infty, \{\cdot, \cdot\})$.

Teorema di Liouville - Arnol'd

L'ipotesi di *involuzione* ha conseguenze fondamentali:

- La varietà M_c è Lagrangiana;
- Se M_c è compatta e connessa, allora e' un toro n-dimensionale ed il moto è *coniugato* ad una rotazione.



La condizione di *Lagrangianeità* delle varietà di livello è essenzialmente equivalente all'ipotesi di *involuzione* degli integrali del moto!

Teorema di Liouville - Arnol'd

Riassumendo

- Esistenza degli integrali $\Longrightarrow$ Esistenza di un insieme invariante
- Indipendenza degli integrali $\Longrightarrow$ Struttura di varietà
- Involuzione degli integrali $\Longrightarrow$ Lagrangianeità e proprietà dinamiche

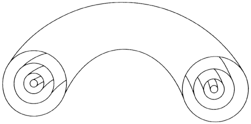
Teorema di Liouville - Arnol'd

Riassumendo

- Esistenza degli integrali $\Longrightarrow$ Esistenza di un insieme invariante
- Indipendenza degli integrali $\Longrightarrow$ Struttura di varietà
- Involuzione degli integrali $\Longrightarrow$ Lagrangianeità e proprietà dinamiche

Teorema di Liouville - Arnol'd

Se un sistema Hamiltoniano su una varietà simplettica X di dimensione $2n$ ammette n integrali del moto, indipendenti ed in involuzione in un insieme aperto, e le varietà di livello degli integrali sono compatte e connesse, allora un aperto dello spazio delle fasi è foliato in tori Lagrangiani invarianti di dimensione n.



Conseguenze

Esistono (almeno localmente) particolari coordinate simplettiche $(I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$, dette coordinate di azione-angolo, rispetto alle quali l'Hamiltonian diventa $K = K(I_1, \dots, I_n)$ e le equazioni del moto assumono la forma:

$$\begin{cases} \dot{I}_k = 0 \\ \dot{\theta}_k = \frac{\partial K}{\partial I_k} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} I_k(t) = I_k(0) \\ \theta_k(t) = \theta_k(0) + t\frac{\partial K}{\partial I_k} \end{cases}$$

- I_k sono integrali del moto
- $\rho = \frac{\partial K}{\partial I}$ è il vettore di rotazione

Teorema di Liouville - Arnol'd

Riassumendo

- Esistenza degli integrali $\Longrightarrow$ Esistenza di un insieme invariante
- Indipendenza degli integrali $\Longrightarrow$ Struttura di varietà
- Involuzione degli integrali $\Longrightarrow$ Lagrangianeità e proprietà dinamiche

Cosa succede se si elimina l'ipotesi di involuzione?
È possibile ottenere risultati non triviali?

Integrabilità in senso debole

Integrabilità in senso debole (*Weak Integrability*)

Sia (V, ω) una varietà simplettica $2n$-dimensionale. $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile in senso debole se ammette n integrali del moto indipendenti.

Integrabilità in senso debole

Integrabilità in senso debole (*Weak Integrability*)

Sia (V, ω) una varietà simplettica $2n$-dimensionale. $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile in senso debole se ammette n integrali del moto indipendenti.

Integrabilità *à la* Liouville $\Longrightarrow$ Integrabilità in senso debole

Integrabilità in senso debole

Integrabilità in senso debole (*Weak Integrability*)

Sia (V, ω) una varietà simplettica $2n$-dimensionale. $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile in senso debole se ammette n integrali del moto indipendenti.

$$\text{Integrabilità } \textit{à la} \text{ Liouville} \Longrightarrow \text{Integrabilità in senso debole}$$
$$\overset{?}{\Longleftarrow}$$

(Contro)Esempio

Sia G è un gruppo di Lie compatto e semi-semplice di rango almeno 2. In ogni intorno della metrica bi-invariante, esistono metriche *invarianti a sinistra* che hanno entropia topologica positiva e non sono integrabili nel senso di Liouville. [Butler & Paternain 2003]

Queste metriche sono integrabili in senso debole

Questa nozione ha delle implicazioni dinamiche ?

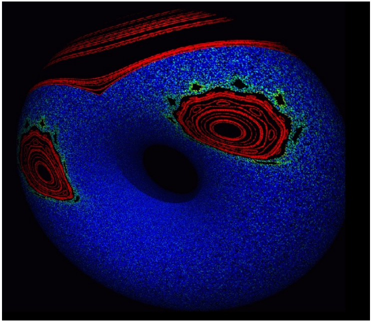
Questa nozione ha delle implicazioni dinamiche ?

Sì, nel caso di Hamiltoniane di Tonelli

Proprietà degli insiemi di Aubry-Mather

Gli insiemi di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$:

- sono non vuoti e compatti;
- sono invarianti per l'azione del flusso Hamiltoniano;
- sono *supportati* su grafici Lipschitz (Teorema del grafico di Mather);



(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

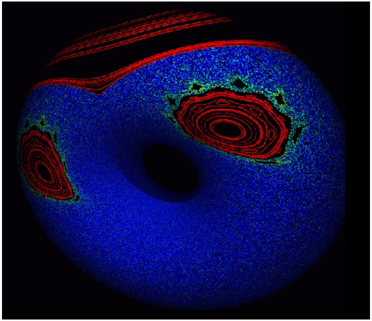
In particolare:

- Invarianza simplettica $\longleftrightarrow$ Invarianza per l'azione di simplettomorfismi che preservano l'essere di tipo Tonelli.
- Struttura Lagrangiana $\longleftrightarrow$ sono supportati su grafici Lagrangiani Lipschitz, la cui classe di coomologia e' c.

Proprietà degli insiemi di Aubry-Mather

Gli insiemi di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$:

- sono non vuoti e compatti;
- sono invarianti per l'azione del flusso Hamiltoniano;
- sono *supportati* su grafici Lipschitz (Teorema del grafico di Mather);



(Credits to Dr. Oliver Knill, Harvard)

In particolare:

- Invarianza simplettica $\longleftrightarrow$ Invarianza per il flusso degli integrali del moto (I campi Hamiltoniani associati sono *tangenti*).
- Struttura Lagrangiana $\longleftrightarrow$ Involuzione (locale) degli integrali del moto Sono "costretti" a commutare (localmente).

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Teorema I [Sorrentino '10, Butler-Sorrentino'11]

Sia $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana di Tonelli, integrabile in senso debole. Se un insieme di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$, per un qualche $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, interseca una varietà di livello regolare degli integrali del moto, allora:

- $\mathcal{A}_c$ è un grafico Lagrangiano invariante, con classe di coomologia c;

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Teorema I [Sorrentino '10, Butler-Sorrentino'11]

Sia $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana di Tonelli, integrabile in senso debole. Se un insieme di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$, per un qualche $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, interseca una varietà di livello regolare degli integrali del moto, allora:

- $\mathcal{A}_c$ è un grafico Lagrangiano invariante, con classe di coomologia c;
- $\mathcal{A}_c$ ammette una struttura di $\mathbb{T}^d$-fibrato principale su una base parallelizzabile $B^{\dim M-d}$, con $H^1(B;\mathbb{R}) = 0$, per qualche $d > 0$;

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Teorema I [Sorrentino '10, Butler-Sorrentino'11]

Sia $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana di Tonelli, integrabile in senso debole. Se un insieme di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$, per un qualche $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, interseca una varietà di livello regolare degli integrali del moto, allora:

- $\mathcal{A}_c$ è un grafico Lagrangiano invariante, con classe di coomologia c;
- $\mathcal{A}_c$ ammette una struttura di $\mathbb{T}^d$-fibrato principale su una base parallelizzabile $B^{\dim M-d}$, con $H^1(B;\mathbb{R}) = 0$, per qualche $d > 0$;
- Il moto su $\mathcal{A}_c$ è ricorrente e le orbite sono coniugate tra loro attraverso un diffeomorfismo isotopo all'identità. In particolare, tutte le misure di probabilità invarianti supportate su $\mathcal{A}_c$ hanno lo stesso vettore di rotazione ($\mathcal{A}_c$ è *strettamente ergodico nel senso di Schwartzman*);

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Teorema I [Sorrentino '10, Butler-Sorrentino'11]

Sia $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana di Tonelli, integrabile in senso debole. Se un insieme di Aubry-Mather $\mathcal{A}_c$, per un qualche $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, interseca una varietà di livello regolare degli integrali del moto, allora:

- $\mathcal{A}_c$ è un grafico Lagrangiano invariante, con classe di coomologia c;
- $\mathcal{A}_c$ ammette una struttura di $\mathbb{T}^d$-fibrato principale su una base parallelizzabile $B^{\dim M - d}$, con $H^1(B;\mathbb{R}) = 0$, per qualche $d > 0$;
- Il moto su $\mathcal{A}_c$ è ricorrente e le orbite sono coniugate tra loro attraverso un diffeomorfismo isotopo all'identità. In particolare, tutte le misure di probabilità invarianti supportate su $\mathcal{A}_c$ hanno lo stesso vettore di rotazione ($\mathcal{A}_c$ è *strettamente ergodico nel senso di Schwartzman*);
- Lo stesso e' vero per tutte le classi di coomologia c' in un intorno di c.

Alcune conseguenze:

- Otteniamo una famiglia di grafici Lagrangiani invarianti $\{\Lambda_c\}_{c\in\mathcal{O}}$, per $\mathcal{O} \subset H^1(M;\mathbb{R})$.
- La minima azione Lagrangiana, come funzione della classe di coomologia, è differenziabile in un intorno di c.

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Alcune conseguenze:

- Otteniamo una famiglia di grafici Lagrangiani invarianti $\{\Lambda_c\}_{c\in\mathcal{O}}$, per $\mathcal{O} \subset H^1(M;\mathbb{R})$.
- La minima azione Lagrangiana, come funzione della classe di coomologia, è differenziabile in un intorno di c.

Domande

- Quando questa famiglia di grafici $\{\Lambda_c\}_{c\in\mathcal{O}}$ folia un aperto dello spazio delle fasi?
- Quali restrizioni topologiche ci sono per la sottostante varietà M?

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Teorema II

(Stesse ipotesi del Teorema I)

- Se $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$, allora H è integrabile nel senso di Liouville in un intorno di $\mathcal{A}_c$. In particolare M è diffeomorfa a $\mathbb{T}^n$, $n = \dim M$.
- Se $\dim M \leq 3$, allora M è diffeomorfa ad un toro.

Teorema di Liouville-Arnold (in senso debole)

Teorema II

(Stesse ipotesi del Teorema I)

- Se $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$, allora H è integrabile nel senso di Liouville in un intorno di $\mathcal{A}_c$. In particolare M è diffeomorfa a $\mathbb{T}^n$, $n = \dim M$.
- Se $\dim M \leq 3$, allora M è diffeomorfa ad un toro.

Sorpresa:

Se $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$ (o $\dim M \leq 3$) ed H è un'Hamiltoniana di Tonelli, allora

Integrabilità in senso debole $\Longleftrightarrow$ Integrabilità *à la* Liouville

Grazie per l'attenzione!

Riferimenti bibliografici:

Alfonso Sorrentino
On the integrability of Tonelli Hamiltonians
Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 10.

Leo Butler & Alfonso Sorrentino
A weak Liouville-Arnol'd theorem
Preprint, 2011.