UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 18.X.2019

1. (a) Il punto P_1 non appartiene a Γ. Il punto P_2 appartiene, ma non è regolare. Il punto P_3 appartiene, si può applicare il teor. di Dini e la retta tangente ha equazione $x + y = 1$.

   (b) Solo P_3 appartiene a Γ; è regolare e la retta tangente ha equazione $-x+4y = 6$.

   (c) I punti P_1, P_2 appartengono a Γ. P_1 non è regolare, mentre P_2 lo è e la retta tangente ha equazione $y = 0$.

   (d) I punti P_2 e P_3 appartengono alla curva e sono entrambi regolari; le rette tangenti sono rispettivamente $11x + 6y = 23$ e $11x - 6y = 23$.

2. (a) Posto $F(x, y) = x^4 - y^2$, si ha che $\nabla F(x, y) = (0, 0)$ solo per $(x, y) = (0, 0)$, che non appartiene a Γ. Quindi γ è regolare.

   (b) F è la stessa di (a), ma stavolta $(0, 0)$ appartiene a Γ. Quindi nel punto $(0, 0)$ non è assicurata l'esistenza della tangente e la curva non è regolare.

   (c) Posto $F(x, y) = x^2 - 4x + 4y^2$, si ha che ∇F si annulla solo per $(x, y) = (2, 0)$. Poiché tale punto non appartiene alla curva, la curva è regolare.

   (d) Posto $F(x, y) = y^4 + x^2 + 4x$, si ha che ∇F si annulla solo per $(x, y) = (-2, 0)$. Poiché tale punto non appartiene alla curva, la curva è regolare.

3. (a) $\max f = 1$, $\min f = -\frac{5}{4}$;

   (b) $\max f = \sqrt[4]{2}$, $\min f = -\sqrt[4]{2}$;

   (c) $\max f = 3$, $\min f = -3$;

   (d) $\max f = 29$, $\min f = -11$;

   (e) $\max f = 58$, $\min f = -6$.

4. Se $0 \leq a \leq 1/2$ allora $\max f = 1$, $\min f = -1$.

   Se $a > 1/2$, allora $\max f = \dfrac{4a^2 + 1}{4a}$, $\min f = -1$.

5. (a) $\max f = 4$, $\min f = 0$;

   (b) $\max f = 4$, $\min f = -4$;

   (c) $\max f = \sqrt{2}$, $\min f = -\sqrt{2}$;

   (d) $\max f = \frac{1}{4}$, $\min f = -12$;

   (e) $\max f = 1$, $\min f = 0$ (NB f è costante sul bordo del cerchio, quindi tutti i punti del bordo sono punti critici vincolati).

6. (a) Il punto $(0, 0)$ è di minimo locale per f;

   (b) $\max_C f = 113$, $\min_C f = -15$.

7. Se $R \leq 5/2$, allora $\max f = -R^2 + 5R$, $\min f = -R^2 - 5R$. Se $R \geq 5/2$, allora $\max f = 25/4$, $\min f = -R^2 - 5R$.

8. (a) $\max_{\Gamma} f = 10$, $\min_{\Gamma} f = -10$
   (b) $\max_{K} f = 10$, $\min_{K} f = -10$
   (c) $\max_{C} f = 3 + 4\sqrt{3}$, $\min_{C} f = -10$.

9. (a) $\max_{\Gamma} f = 1/2$, $\min_{\Gamma} f = -4$
   (b) $\max_{K} f = 1/2$, $\min_{K} f = -4$
   (c) $\max_{C} f = 0$, $\min_{C} f = -4$.

10. (a) $\max f = -1/2$, $\min f = -4$
   (b) $\max f = 6$, $\min f = 3/4$
   (c) $\max f = 1$, $\min f = -1$
   (d) $\max f = 3$, $\min f = 18 - 12\sqrt{2}$
   (e) $\max f = 2$, $\min f = -\sqrt{2}$;
   (f) $\max f = 2\sqrt{5}$, $\min f = -2\sqrt{5}$;
   (g) $\max f = 0$, $\min f = -4$;
   (h) $\max f = 14 + \sqrt{3}$, $\min f = 4\sqrt{3}$.

11. Poiché per ipotesi C non è limitato, esistono punti di C con distanza arbitrariamente grande dall'origine; essendo $f(x, y)$ il quadrato della distanza dall'origine, deduciamo che $\sup f = +\infty$. Per mostrare che esiste il minimo di f, ci riconduciamo al caso di un insieme compatto col procedimento seguente. Fissato $R > 0$, poniamo $C_R = C \cap \overline{B_R}$, dove $\overline{B_R}$ è la sfera chiusa di centro l'origine e raggio R. Se R è scelto abbastanza grande, C_R è non vuoto; inoltre C_R è limitato ed è chiuso, in quanto intersezione di due insiemi chiusi. Quindi f possiede minimo su C_R per il teorema di Weierstrass. Poiché si ha $f \leq R^2$ su C_R, mentre $f(x, y) > R^2$ se $(x, y) \in C \setminus C_R$, deduciamo che il minimo di f su C_R è un minimo anche rispetto a tutto l'insieme C.

12. Ponendo ad esempio $(x_n, y_n) = (n, n^2 - n - 1)$, si ha che $(x_n, y_n) \in \Gamma$ e che $f(x_n, y_n) \to \infty$ per $n \to \infty$, quindi $\sup_{\Gamma} f = +\infty$. L'esistenza del minimo segue dall'esercizio precedente. Il minimo può essere cercato col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trova che è assunto per $(x, y) = (-1/2, -1/4)$ e vale $5/16$.

13. (a) $\max f = 9$, $\min f = 0$;
   (b) $\max f = 9$, $\min f = 0$.

14. (a) $\max f = 2$, $\min f = 0$;
   (b) $\max f = \frac{1}{2}$, $\min f = -\frac{1}{2}$.