UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 19.XI.2022

1. Per ciascuno dei casi seguenti, si denoti con Γ l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione data e si dica quali tra i punti P_1, P_2, P_3 appartengono a Γ. Per i punti che appartengono, si dica se sono regolari (cioè se il teorema di Dini garantisce la locale esplicitabilità rispetto a una delle due variabili) e in caso affermativo si calcoli l'equazione cartesiana della retta tangente a Γ nel punto.

   (a) $x^4 - 3x^2 - y^2 - 2yx + 1 = 0$; $\quad P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (0, 1)$.

   (b) $e^x(y^2 - x - 2) = 0$; $\quad P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (2, 2)$.

   (c) $x^2 + e^{xy} - (x - y)^2 = 1$; $\quad P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$.

   (d) $2x^5 + 3xy^2 = 14$; $\quad P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (1, -2)$.

2. Per ciascuno dei casi seguenti, dire se l'insieme Γ dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione data è una curva regolare e, in caso contrario, determinare i punti non regolari di Γ:

   (a) $x^4 - y^2 = 1$;

   (b) $x^4 - y^2 = 0$;

   (c) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$;

   (d) $y^4 + x^2 + 4x = 4$.

3. Per ciascuno dei casi seguenti, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ sulla curva assegnata.

   (a) $f(x, y) = y - x^2$ sulla curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3$ sulla curva di equazione $x^4 + y^4 = 1$.

   (c) $f(x, y) = y^2 - 3x$ sulla curva di equazione $x^2 + 9y^2 = 1$.

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8y$ sulla curva di equazione $x^2 + 4x + y^2 = 1$.

   (e) $f(x, y) = (x - 1)^2 - 6y$ sulla curva di equazione $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

   (f) $f(x, y) = 1 + x^4(2 - y) + y^2$ sulla curva di equazione $2x^4 + y^2 = 48$.

4. Al variare del parametro $a \geq 0$, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y + ax^2$ sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

5. Per ciascuno dei casi seguenti, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione f sull'insieme Ω.

   (a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.
   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.
   (c) $f(x, y) = x - 2y$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \le 1\}$.
   (d) $f(x, y) = x - x^2 - y^4$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 2y^4 \le 9\}$.
   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

6. Fissato $R > 0$, sia $C_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$ il cerchio di centro l'origine e raggio R. Determinare il massimo e minimo assoluto su C_R della funzione $f(x, y) = 4x - x^2 - 3y - y^2$.

7. Sia $f(x, y) = x(x+3)+y^2-4(y+1)$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 4$.

   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.
   (c) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4, x \le 1\}$.

8. Sia $f(x, y) = y^2 - x$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$.

   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 - 4x \le 0\}$.
   (c) Trovare massimo e min assoluto di f su $C = \{(x, y) : x^2+2y^2-4x \le 0,\ x \ge 2\}$.

9. Nei seguenti casi, trovare il massimo e minimo assoluto della funzione f sull'insieme C.

   (a) $f(x, y) = x^2 - 8x + 3y^2$, $\quad C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 9,\ y \le -x\}$.
   (b) $f(x, y) = y$, $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4, y \ge -x\}$.
   (c) $f(x, y) = x + y$, $C = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \le 16, y \le 1\}$.
   (d) $f(x, y) = 2x^2 + y^3 - 3$, $\quad C = \{(x, y) : x^2 + \frac{y^6}{4} \le 1,\ y \ge -1\}$.
   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $\quad C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 1\}$.
   (f) $f(x, y) = xy$, $\quad C = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \le 4,\ y \le 1\}$.
   (g) $f(x, y) = 3x + y$, $C = \{(x, y) : x^2 - 1 \le y \le 2(1 - x^2)\}$.
   (h) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y$, $C = \{(x, y) : x^2 \le y \le 3\}$.
   (i) $f(x, y) = 3x + 4y$, $C = \{(x, y) : x + y \le 4, xy \ge 1, x \ge 0\}$.

Vedere anche i §1D, 1E del libro di Marcellini-Sbordone, e il §2.3 del libro di Salsa-Squellati