UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 30.XI.2019

1. (NB si ricorda che l'equazione del piano passante per un punto (x_0, y_0, z_0) perpendicolare a un vettore (v_1, v_2, v_3) è data da $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.)

   Il punto corrisponde a $(u, v) = (1, -2)$ e il piano tangente ha equazione $4x - 2y + z = 4$. Indicato con U il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, l'area vale

$$\iint_U \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\, dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{13}{3}\pi.$$

2. Il punto corrisponde a $(u, v) = (0, -2)$ e il piano tangente ha equazione $2y + z = -1$. Indicato con U il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$, l'area vale

$$\iint_U \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{14}{3}\pi.$$

3. Si ha $||\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v|| = r(R + \cos u)$, quindi l'area vale

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + \cos u)\, dudv = 4\pi^2 rR.$$

4. Il punto corrisponde a $(u, v) = (2, \pi/2)$ e il piano tangente ha equazione $x + z = \pi$. L'integrale di $f(x, y) = x + y$ vale

$$\int_0^3 du \int_0^{\pi} u(\cos v + \operatorname{sen} v)\sqrt{4 + u^2}\, du = \int_0^3 2u\sqrt{4 + u^2}\, du = \frac{2}{3}(13^{\frac{3}{2}} - 8).$$

5. Il punto corrisponde a $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/4)$ e il piano tangente ha equazione $y + z = 2\sqrt{2}$. L'area vale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} 4 \sin\phi\, d\phi = 16\pi.$$

   La semisfera corrisponde a $\phi \in [0, \pi/2]$. L'integrale di $f(x, y, z) = z$ sulla semisfera vale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (2\cos\phi)(4\sin\phi) d\phi = 8\pi.$$

   Il flusso vale

$$\iint \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (2\cos^2\phi)(4\sin\phi)\, d\phi = \frac{16}{3}\pi.$$

6. L'area del cono vale
$$\int_0^{2\pi} du \int_0^1 \sqrt{5}v\, dv = \sqrt{5}\pi.$$
L'integrale di $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ vale
$$\int_0^{2\pi} du \int_0^1 (v^2 + 2v)\sqrt{5}v\, dv = \frac{11}{6}\sqrt{5}\pi.$$
Il flusso vale
$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_0^1 (2v(\cos^2 u + \sin^2 u) - v)\, dv = \pi.$$

7. L'area vale
$$\int_0^{2\pi} du \int_{-1}^1 2\, dv = 8\pi.$$
L'integrale di funzione vale
$$\int_0^{2\pi} du \int_{-1}^1 (4 + v^2) 2\, dv = \frac{104}{3}\pi.$$
mentre il flusso di $\mathbf{F}$ è nullo, in quanto si trova che $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = 0$ su tutti i punti di Σ.

8. Il punto corrisponde a $(u,v) = (\frac{5}{6}\pi, -1)$ e il piano tangente ha equazione $-\sqrt{3}x + y + 2z = 8$. Il flusso vale
$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_{-2}^2 (3 + v^2)(6 - 2v)\, dv = 208\pi.$$

9. Una superficie Σ come nelle ipotesi si può parametrizzare ponendo
$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u, v, f(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$
Essendo f di classe C^1, anche $\boldsymbol{\sigma}$ lo è. Inoltre
$$\boldsymbol{\sigma}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \boldsymbol{\sigma}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$
pertanto $\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v$ è non nullo, qualunque sia la funzione f. (NB Gli esercizi 1,2 riguardavano superfici di questo tipo).

10. Applicando il teorema della divergenza, e tenendo presente che gli integrali di x e di z sulla sfera sono nulli per simmetria, troviamo
    (a) $\displaystyle\iint_{\Sigma_R} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{V_R} \operatorname{div} \mathbf{F} \; dxdydz = \iiint_{V_R} 0 \; dxdydz = 0.$
    (b) $\displaystyle\iint_{\Sigma_R} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{V_R} \operatorname{div} \mathbf{F} \; dxdydz = \iiint_{V_R} (2x+1)\, dxdydz = 1 \cdot \operatorname{vol}(V_R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$
    (c) $\displaystyle\iint_{\Sigma_R} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{V_R} \operatorname{div} \mathbf{F} \; dxdydz = \iiint_{V_R} (2z-3) dxdydz = -3 \cdot \operatorname{vol}(V_R) = -4\pi R^3.$

11. Osserviamo che $\partial V = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dove Σ_1 e Σ_2 indicano rispettivamente la base inferiore e superiore di V. La normale uscente da V su Σ_1 e Σ_2 è data rispettivamente da $-\hat{\mathrm{k}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$. Il teorema della divergenza implica allora

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\; dxdydz = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma - \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle\, d\sigma.$$

In tutti e tre i casi da considerare, si verifica che $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Abbiamo quindi

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle\, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle\, d\sigma.$$

Nel calcolare gli integrali a secondo membro, va tenuto presente che $z = 0$ su Σ_1 e $z = 10$ su Σ_2, e che Σ_1 e Σ_2 hanno area pari a 4π, essendo cerchi di raggio 2. Troviamo nei tre casi

(a) $\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} 0\; d\sigma - \iint_{\Sigma_2} (10^2 - 10^2)\; d\sigma = 0$

(b) $\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iint_{\Sigma_1} 0\; d\sigma - \iint_{\Sigma_2} 10\; dS = -10\, \text{area}(\Sigma_2) = -40\pi$

(c) $\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle dS = \iint_{\Sigma_1} -5\; d\sigma - \iint_{\Sigma_2} 5\; dS = -5\, \text{area}(\Sigma_1) - 5\, \text{area}(\Sigma_2) = -40\pi$

12. Per il calcolo utilizzeremo il teorema della divergenza. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(0,0,0)$ e raggio 2, e con Ω^* la parte di Ω con $-1 \leq z \leq 1$. Allora $\partial\Omega = \Sigma$, mentre $\partial\Omega^* = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove Σ_1 e Σ_2 sono i dischi con $x^2 + y^2 \leq 2^2 - 1^1 = 3$ contenuti nei piani $z = -1$ e $z = 1$ rispettivamente. Osserviamo che la normale esterna su Σ_1 e Σ_2 è data rispettivamente da $-\hat{k}$ e da $\hat{k}$. Pertanto si avrà

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz.$$

$$\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \iiint_{\Omega^*} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz + \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle\, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle\, d\sigma.$$

Per il calcolo degli integrali tripli, osserviamo che le sezioni orizzontali Ω_z della sfera sono cerchi di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{4 - z^2}$.

(a) Abbiamo $\operatorname{div} \mathbf{F} = 4y + 2z - 3z^2$. Osserviamo che per simmetria l'integrale di $4y + 2z$ è nullo sia su Ω che su Ω_0, quindi basterà integrare il termine $-3z^2$.

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \int_{-2}^{2} dz \iint_{\Omega_z} (-3z^2)\, dxdy = \int_{-2}^{2} (-3z^2)\pi(4 - z^2) = -\frac{128}{5}\pi.$$

Per il calcolo del flusso attraverso Σ_0, osserviamo che $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle = F_3 = z^2 - z^3 - z$ quindi è costante sia su Σ_1 che su Σ_2 e vale rispettivamente 3 e -1. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma &= \int_{-1}^{1} dz \iint_{\Omega_z} (-3z^2)\, dxdy + \iint_{\Sigma_1} 3\, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} (-1)\, d\sigma \\ &= -\frac{34}{5}\pi + 3\, \text{area}\,(\Sigma_1) + \text{area}\,(\Sigma_2) = -\frac{34}{5}\pi + 9\pi + 3\pi = \frac{26}{5}\pi. \end{aligned}$$

(b) In questo caso abbiamo $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$, pertanto

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = 3\, \text{vol}\,(\Omega) = 32\pi.$$

Inoltre $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle = x^2y^2 - 1$ su Σ_1, mentre $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle = x^2y^2 + 1$ su Σ_2. L'integrale di x^2y^2 su Σ_1 e su Σ_2 non è difficile da calcolare, ma poiché dà lo stesso valore sui due dischi (che hanno una z diversa ma sono uguali per quanto riguarda le x e le y) e va preso con segno opposto, dà contributo nullo al risultato finale. Possiamo quindi trascurare questi termini e trovare

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma &= \int_{-1}^{1} dz \iint_{\Omega_z} 3 \, dxdy + \iint_{\Sigma_1} (x^2y^2 - 1) \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} (x^2y^2 + 1) \, d\sigma \\ &= 3 \int_{-1}^{1} \pi(4 - z^2) \, dz - \operatorname{area}(\Sigma_1) - \operatorname{area}(\Sigma_2) = 22\pi - 3\pi - 3\pi = 16\pi.\end{aligned}$$

13. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2, e chiamiamo stavolta Ω^* la parte di Ω con $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Allora $\partial\Omega = \Sigma$, mentre $\partial\Omega^* = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove Σ_1 e Σ_2 sono semicerchi di raggio 2 contenuti rispettivamente nei piani $x = 0$ e $y = 0$. La normale esterna su Σ_1 e Σ_2 è data rispettivamente da $-\hat{\imath}$ e da $-\hat{\jmath}$. Pertanto si avrà

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz.$$

$$\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega^*} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz + \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\imath} \rangle \, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\jmath} \rangle \, d\sigma.$$

(a) Abbiamo $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x - 2z + 2$. Osserviamo che per simmetria $2x$ ha integrale nullo su Ω (ma non su Ω^*) e che $2z$ ha integrale nullo sia su Ω che Ω^*. Pertanto

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} 2 \, dxdydz = 2\operatorname{vol}(\Omega) = \frac{64}{3}\pi.$$

Osserviamo che su Σ_1 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\imath} \rangle = F_1 = x^2 - 2xy = 0$ perché $x = 0$ su Σ_1. Su Σ_2 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\jmath} \rangle = F_2 = 1 + y^2 = 1$ perché $y = 0$ su Σ_2. Pertanto

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma &= \iiint_{\Omega^*} (2 + 2x) \, dxdydz + \iint_{\Sigma_1} 0 \, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} 1 \, d\sigma \\ &= 2\operatorname{vol}(\Omega^*) + \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 (2\rho \cos\theta \sin\phi)(\rho^2 \sin\phi) d\rho \; + \operatorname{area}(\Sigma_2) \\ &= \frac{16}{3}\pi + 4\pi + 2\pi = \frac{34}{3}\pi.\end{aligned}$$

(b) Abbiamo $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2yz + 2z + 1$. Come prima, $2x$ ha integrale nullo su Ω, ma non su Ω^*. Invece $2yz + 2z$ ha integrale nullo sia su Ω che Ω^*, perché cambia segno se cambia segno z, mentre Ω e Ω^* sono simmetrici rispetto al piano $z = 0$. Pertanto

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} 1 \, dxdydz = \operatorname{vol}(\Omega) = \frac{32}{3}\pi.$$

Su Σ_1 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\imath} \rangle = F_1 = x^2 + \sin z = \sin z$ che ha integrale nullo su Σ_1 per simmetria. Su Σ_2 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\jmath} \rangle = F_2 = y^2z - 2 = -2$. Pertanto

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma &= \iiint_{\Omega^*} (2x + 1) \, dxdydz + \iint_{\Sigma_1} \sin z \, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (-2) \, d\sigma \\ &= 4\pi + \frac{8}{3}\pi - 4\pi = \frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

14. (a) Calcoliamo il flusso usiamo la definizione. Scegliamo come verso della normale quello che punta all'esterno del cilindro, che è anche quello del vettore normale dato dalla parametrizzazione $\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v = (2\cos u, 2\,\mathrm{sen}\,u, 0)$. Troviamo

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = (\,x - y\,,\, x + y + 1\,,\, -2(1 + z)\,), \qquad \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v \rangle = 4(1 + \,\mathrm{sen}\,u),$$

quindi il flusso vale

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_0^3 4(1 + \,\mathrm{sen}\,u)\, dv = 24\pi.$$

Usiamo ora il teorema di Stokes. Il bordo $\partial\Sigma$ è costituito dalle due circonferenze ad altezza $z = 0$ e $z = 3$, da percorrere rispettivamente in senso antiorario e orario, precisamente $\partial\Sigma = \gamma_0 \cup (-\gamma_3)$ dove:

$$\gamma_0(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 0), \qquad \gamma_3(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 3).$$

Troviamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \int_0^{2\pi} [2(\,\mathrm{sen}\,t + \cos t)(-2\sin t) + 2(\,\mathrm{sen}\,t - \cos t)(2\cos t) + 0]dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} [8(\,\mathrm{sen}\,t + \cos t)(-2\sin t) + 8(\,\mathrm{sen}\,t - \cos t)(2\cos t) + 0]dt \\ &= -8\pi + 32\pi = 24\pi, \end{aligned}$$

lo stesso risultato trovato prima.

(b) Calcoliamo il flusso usiamo la definizione. Si ha che $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = z\hat{\imath} + (1 - x)\hat{\mathrm{k}}$. Parametrizziamo Σ in coordinate polari $x = \cos\theta\sin\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\phi$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/2]$. Troviamo

$$\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}_\theta \times \boldsymbol{\sigma}_\phi \rangle = -\sin\phi\cos\phi.$$

Scegliamo come verso della normale quello che punta verso l'esterno (in direzione opposta all'origine). Osservando che $\boldsymbol{\sigma}_\theta \times \boldsymbol{\sigma}_\phi$ punta nel verso opposto a quello scelto, troviamo

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\, d\phi = \pi.$$

Usiamo ora il teorema di Stokes. Il bordo $\partial\Sigma$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano $z = 0$, percorsa in verso antiorario, che può essere parametrizzata come $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, con $t \in [0, 2\pi]$. Troviamo

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} [(\cos t \sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 0]dt = \pi.$$

(c) Calcoliamo il flusso usiamo la definizione. Scegliamo come verso della normale quello che punta all'esterno del cono, che è anche quello del vettore normale dato dalla parametrizzazione $\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v = (2 - v)(\cos u, \,\mathrm{sen}\,u, 1)$. Troviamo

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = (\,xz\,,\, -yz\,,\, 2\,), \qquad \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v \rangle = (2 - v)^2 v(\cos^2 u - \,\mathrm{sen}^2 u) + 2(2 - v),$$

quindi il flusso vale

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_0^1 dv \int_0^{2\pi} [(2 - v)^2 v(\cos^2 u - \,\mathrm{sen}^2 u) + 2(2 - v)]\, du = 6\pi.$$

Usiamo ora il teorema di Stokes. Il bordo $\partial\Sigma$ si può scrivere come $\partial\Sigma = \gamma_0 \cup (-\gamma_1)$ dove:

$$\gamma_0(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 0), \qquad \gamma_1(t) = (\cos t,\, \mathrm{sen}\, t, 1).$$

Troviamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot \mathbf{dr} &= \int_0^{2\pi} [(-2\,\mathrm{sen}\, t)(-2\sin t) + (2\cos t)(2\cos t) + 0]dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} [-(\,\mathrm{sen}\, t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 0]dt = 8\pi - 2\pi = 6\pi.\end{aligned}$$

15. (a) Come suggerito nel testo, calcoliamo il flusso di $\mathbf{F}$ utilizzando il teorema della diveregnza. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 2, in modo che $\partial\Omega = \Sigma$. Abbiamo $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 2z + x^3 + 2y^2$ e possiamo osservare che il termine x^3 ha integrale nullo su Ω per simmetria (non così il termine $2z$, poiché il centro della sfera ha coordinata $z = 1$). Utilizziamo l'integrazione per strati in coordinate cilindriche (più adatte soprattutto in vista del successivo punto (b)).

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}}\rangle\, d\sigma &= \iiint_\Omega (2z + 2y^2)\, dxdydz \\ &= \int_{-1}^{3} dz \int_0^{\sqrt{4-(z-1)^2}} d\rho \int_0^{2\pi} (2z + 2\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta)\rho\, d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^{3} \left(z(3+2z-z^2) + \frac{(3+2z-z^2)^2}{4} \right) dz = \frac{192}{5}\pi.\end{aligned}$$

Il flusso di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ è banalmente zero per il teorema di Stokes, in quanto Σ non ha bordo.

(b) Sia ora Ω_0 la parte di Ω con $z \geq 0$. Abbiamo $\partial\Omega_0 = \Sigma_0 \cup D_0$, dove D_0 è il cerchio di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$ nel piano $z = 0$. Su D_0 la normale esterna vale $-\hat{k}$ e quindi $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}}\rangle = -F_3 = -(x^3 + 2y^2)z \equiv 0$, perché $z \equiv 0$ su D_0. Troviamo quindi

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}}\rangle\, d\sigma &= \iiint_{\Omega_0} \mathrm{div}\, F\, dxdydz - \iint_{D_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}}\rangle\, d\sigma \\ &= \iiint_{\Omega_0} \mathrm{div}\, F\, dxdydz = \iiint_{\Omega_0} (2z + 2y^2)\, dxdydz \\ &= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{4-(z-1)^2}} d\rho \int_0^{2\pi} (2z + 2\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta)\rho\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^3 \left(z(3+2z-z^2) + \frac{(3+2z-z^2)^2}{4} \right) dz = \frac{373}{10}\pi.\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ col teorema di Stokes. Il bordo di Σ_0 si parametrizza in senso positivo al modo seguente:

$$\gamma(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Il flusso vale quindi

$$\int_0^{2\pi} \left(1 \cdot (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t) - \sqrt{3}\cos t \cdot \sqrt{3}\cos t + 0 \right) = -3\pi.$$

16. (a) Osserviamo che il termine x^3 ha integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (2z + x^3 + 2y^2)\, dxdydz &= \iiint_\Omega (2z + 2y^2)\, dxdydz \\
&= \int_0^1 dz \int_0^{2-2z} d\rho \int_0^{2\pi} (2z + 2\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta)\rho\, d\theta \\
&= \int_0^1 \pi \left(2z(2-2z)^2 + \frac{(2-2z)^4}{2} \right) dz = \frac{34}{15}\pi.
\end{aligned}$$

(b) Abbiamo $\partial\Omega = \Sigma \cup D_0$ dove D_0 è il cerchio di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 nel piano $z = 0$. Il teorema della divergenza ci dà quindi

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \iiint_{\Omega_0} \operatorname{div} F\, dxdydz - \iint_{D_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma$$

Osserviamo che $\operatorname{div} F = 2z + x^3 + 2y^2$, quindi l'integrale triplo coincide con quello calcolato in (a). Inoltre, osserviamo che su D_0 la normale esterna vale $-\hat{k}$ e quindi $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = -F_3 = -(x^3 + 2y^2)z - 1 \equiv -1$, perché $z \equiv 0$ su D_0. Ricordano che l'integrale della funzione 1 coincide con l'area di D_0, che vale 4π, concludiamo

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle\, d\sigma = \frac{34}{15}\pi - (-4\pi) = \frac{94}{15}\pi.$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ col teorema di Stokes. Il bordo di Σ_0 si parametrizza in senso positivo al modo seguente:

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Il flusso vale quindi

$$\int_0^{2\pi} (1 \cdot (-2\operatorname{sen} t) - 2\cos t \cdot 2\cos t + 0) = -4\pi.$$

17. Le identità seguono dalle definizioni con un calcolo diretto. Verifichiamo ad esempio la (b):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + \frac{\partial f}{\partial z} F_3 + f \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \\
&= \langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle + f \operatorname{div} \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

La (a) e la (c) si dimostrano con calcoli simili.

18. (a) Il gradiente di una funzione f è sempre irrotazionale, qualunque sia f. Verifichiamo se, nel caso della f assegnata, ∇f è anche solenoidale. Con un calcolo diretto, troviamo prima

$$\nabla f = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

e poi

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla f) &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&\quad + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&\quad + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0,
\end{aligned}
$$

quindi ∇f è anche solenoidale.

(b) Indicando con Σ_R la superficie sferica, su Σ_R si ha $x^2+y^2+z^2=R^2$ e pertanto $\nabla f = (\frac{x}{R^3}, \frac{y}{R^3}, \frac{z}{R^3})$. D'altra parte, su Σ_R si ha $\hat{\mathbf{n}} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$, perché il versore normale a una sfera centrata nell'origine ha le stesse componenti del punto a cui è applicato, normalizzate in modo da avere lunghezza uno. Deduciamo che, su Σ_R, vale

$$
\langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{x^2+y^2+z^2}{R^4} = \frac{1}{R^2}.
$$

Il flusso vale pertanto

$$
\iint_{\Sigma_R} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS = \frac{\operatorname{area}(\Sigma_R)}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.
$$

(c) Se un tale campo esistesse, il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \nabla f$ attraverso una qualunque superficie chiusa sarebbe nullo per il teorema di Stokes. Ma ciò è contraddetto dal risultato del punto precedente.

(d) La superficie in questione è il bordo di Ω, la sfera piena di centro $(2,0,0)$ e raggio 1. Osserviamo che Ω non contiene l'origine, e quindi f è definita su tutto Ω. Essendo la divergenza di ∂f identicamente nulla, il flusso di ∇f attraverso $\partial\Omega$ è nullo per il teorema della divergenza.

(e) In questo caso l'origine è interna alla sfera, quindi l'argomentazione del punto precedente va modificata. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(2,0,0)$ e raggio 10 privata della sfera piena di centro l'origine e raggio 1. In questo modo Ω non contiene l'origine e f è definita su tutto Ω. Il bordo di Ω è costituito dalla superficie sferica nel testo dell'esercizio (che indichiamo con Σ) e dalla superficie Σ_1, caso particolare di quelle considerate nel punto (b). La normale uscente da Ω coincide con quella uscente da Σ e con quella entrante in Σ_1. Applicando il teorema della divergenza a ∇f su Ω, ricordando che ∇f ha divergenza nulla, e facendo attenzione al verso delle normali, troviamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \iiint_\Omega \Delta f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS \\
&= \iint_\Sigma \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS - \iint_{\Sigma_1} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS = \iint_\Sigma \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS - 4\pi.
\end{aligned}
$$

Ne segue che il flusso cercato vale 4π.

(f) Se Ω non contiene $(0,0,0)$, si ragiona come in (d). Se Ω contiene $(0,0,0)$, si adatta il ragionamento di (e), rimuovendo da Ω una sfera piena di centro $(0,0,0)$ e raggio $R > 0$ sufficientemente piccolo da non intersecare Σ. Si applica poi il teorema della divergenza alla regione così ottenuta, trovando che il flusso attraverso Σ coincide con quello attraverso Σ_R, cioè vale 4π.