

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 30.XI.2019

1. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (u, v, 2uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Verificare che il punto $(1, -2, -4)$ appartiene a Σ e trovare l'equazione del piano tangente a Σ in tale punto.
- (b) Calcolare l'area della porzione di Σ corrispondente ai valori dei parametri (u, v) nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$.

2. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = \left(u, v, 1 + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Verificare che il punto $(0, -2, 3)$ appartiene a Σ e trovare l'equazione del piano tangente a Σ in tale punto.
- (b) Calcolare l'area della porzione di Σ corrispondente ai valori dei parametri (u, v) nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$.

3. Dati $R > r > 0$, calcolare l'area della superficie Σ (toro), di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u) \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

4. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v) \quad (u, v) \in [0, 3] \times [0, \pi].$$

- (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(0, 2, \pi)$.
- (b) Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = x + y$ su Σ .

5. Si consideri la sfera $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\sigma(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$.

- (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- (b) Calcolare l'area di Σ .
- (c) Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = z$ sulla semisfera ottenuta intersecando Σ col semispazio $z \geq 0$.
- (d) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (0, 0, z)$ attraverso la semisfera del punto precedente, orientata in modo che la normale punti verso l'esterno della sfera.

6. Si consideri la porzione di cono $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 2v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1].$$

- (a) Calcolare l'area di Σ .
- (b) Calcolare l'integrale su Σ della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.
- (c) Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

attraverso Σ , secondo l'orientazione indotta della parametrizzazione.

7. Si consideri la porzione di cilindro $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$$

dove $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-1, 1]$

- (a) Calcolare l'area di Σ .
- (b) Calcolare l'integrale $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$.
- (c) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (y, -x, z^2)$ attraverso Σ orientata in modo che la normale punti verso l'esterno del cilindro.

8. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = ((3 + v^2) \cos u, (3 + v^2) \sin u, v + 1), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-2, 2].$$

- (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $P = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$.
- (b) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\mathbf{F} = 2x \hat{i} + 2y \hat{j} + z \hat{k}$$

prendendo come orientazione positiva quella data dalla parametrizzazione.

9. Sia Σ il grafico di una funzione $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e f di classe C^1 . Mostrare che Σ si può rappresentare come una superficie parametrica regolare.

10. Sia $V_R \subset \mathbb{R}^3$ la sfera (piena) di raggio R centrata in $(0, 0, 0)$ e sia $\Sigma_R = \partial V_R$ la superficie sferica. Si definisca come normale positiva su Σ_R quella uscente da V_R . Per ciascuno dei casi seguenti, calcolare il flusso del campo vettoriale \mathbf{F} attraverso Σ_R .

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \hat{i} + (y^2 + x^2) \hat{j} + 2(x - z)y \hat{k}$.
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \sin y) \hat{i} + (y + 2) \hat{j} + (xy + 2) \hat{k}$.
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y \hat{i} + (2 - e^y) \hat{j} + (z^2 - 3z) \hat{k}$.

(Suggerimento: applicare il teorema della divergenza)

11. Sia V il cilindro (pieno) avente per asse l'asse z , con sezione circolare di raggio 2 e avente altezza 10 (contenuto nella striscia $z \in [0, 10]$). Si indichi con Σ la superficie laterale di V . Si scelga come normale positiva su Σ quella che punta verso l'esterno del cilindro. Per ciascuno dei casi seguenti, calcolare il flusso del campo vettoriale \mathbf{F} attraverso Σ .

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 10x \hat{i} + (x^2 - 2yz) \hat{j} + (z^2 - 10z) \hat{k}$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = -x \hat{i} + x^2 \hat{j} + z \hat{k}$.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \hat{i} + (x - y) \hat{j} + (z - 5) \hat{k}$.

(Suggerimento: Applicare il teorema della divergenza a \mathbf{F} su V e sottrarre il contributo della faccia inferiore e superiore di ∂V , che non appartengono a Σ .)

12. Sia Σ la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 e sia Σ_0 la parte di Σ con $-1 \leq z \leq 1$. Per ciascuno dei casi seguenti, si calcoli il flusso di \mathbf{F} attraverso Σ e quello attraverso Σ_0 (prendendo come orientazione della normale quella uscente dalla sfera).

(a) $\mathbf{F} = x(1 + 2y) \hat{i} + y^2 \hat{j} + (z^2 - z^3 - z) \hat{k}$.

(b) $\mathbf{F} = (2x + e^y) \hat{i} + \sin x \hat{j} + (x^2 y^2 + z) \hat{k}$.

13. Sia Σ la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 e sia Σ_0 il quarto di Σ con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Per ciascuno dei casi seguenti, si calcoli il flusso di \mathbf{F} attraverso Σ e quello attraverso Σ_0 (prendendo come orientazione della normale quella uscente dalla sfera).

(a) $\mathbf{F} = (x^2 - 2xy) \hat{i} + (1 + y^2) \hat{j} + (e^x - z^2 + 2z) \hat{k}$.

(b) $\mathbf{F} = (x^2 + \sin z) \hat{i} + (y^2 z - 2) \hat{j} + (z^2 + z + 1) \hat{k}$.

14. In ciascuno dei casi seguenti, calcolare il flusso del rotore del campo \mathbf{F} attraverso la superficie Σ , con orientazione scelta a piacere. Effettuare il calcolo sia usando la definizione che usando il teorema di Stokes e verificare che i risultati ottenuti sono uguali.

(a) Σ è il cilindro di equazione

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

e $\mathbf{F} = (1 + z)(y + x) \hat{i} + (1 + z)(y - x) \hat{j} + x \hat{k}$.

(b) Σ è la metà della superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 che si trova nel semispazio $z \geq 0$ e $\mathbf{F} = xy \hat{i} + x \hat{j} + yz \hat{k}$.

(c) Σ il tronco di cono di equazione

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = ((2 - v) \cos u, (2 - v) \sin u, v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

e $\mathbf{F} = -y \hat{i} + x \hat{j} + xyz \hat{k}$.

15. Sia Σ la superficie sferica di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 2, e sia inoltre

$$\mathbf{F} = (1 + xz)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (x^3 + 2y^2)z\mathbf{k}.$$

- (a) Calcolare il flusso di \mathbf{F} e di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso Σ , prendendo come normale positiva quella uscente dalla sfera.
- (b) Sia Σ_0 è la parte di Σ che si trova nel semispazio $z \geq 0$. Calcolare il flusso di \mathbf{F} e di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso Σ_0 , prendendo come normale positiva la stessa di Σ .

(sugg. utilizzare i teoremi della divergenza e di Stokes).

16. (a) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il cono (pieno) avente per base il cerchio di centro l'origine e raggio 2 nel piano $z = 0$, e per vertice il punto $(0, 0, 1)$. Calcolare l'integrale triplo su Ω della funzione $f(x, y, z) = 2z + x^3 + 2y^2$.
- (b) Sia Σ la superficie laterale del cono Ω (cioè il bordo di Ω privato del cerchio di base), orientato prendendo come normale quella uscente da Ω . Calcolare il flusso attraverso Σ di \mathbf{F} e di $\text{rot } \mathbf{F}$, dove

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1 + xz)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + [(x^3 + 2y^2)z + 1]\mathbf{k}.$$

(sugg. utilizzare il risultato del punto (a), i teoremi della divergenza e di Stokes).

17. Data una funzione f e un campo vettoriale \mathbf{F} , mostrare che

- (a) $\nabla(f^2) = 2f\nabla f$
- (b) $\text{div}(f\mathbf{F}) = \langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle + f \text{div } \mathbf{F}$
- (c) $\text{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \text{rot } \mathbf{F}$.

18. Sia

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

- (a) Dire se il campo ∇f è irrotazionale e/o solenoidale.
- (b) Fissato $R > 0$, calcolare il flusso di ∇f attraverso la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1.
- (c) Dire se esiste un campo \mathbf{G} definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tale che $\text{rot } \mathbf{G} = \nabla f$.
- (d) Dire quanto vale il flusso di ∇f uscente dalla superficie sferica di centro $(2, 0, 0)$ e raggio 1.
- (e) Dire quanto vale il flusso di ∇f uscente dalla superficie sferica di centro $(2, 0, 0)$ e raggio 10.
- (f) In generale, sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa tale che $(0, 0, 0) \notin \Sigma$ e sia Ω la regione racchiusa da Σ (cioè Ω è l'insieme limitato con $\Sigma = \partial\Omega$). Mostrare che il flusso di ∇f uscente da Σ vale 0 se $(0, 0, 0) \notin \Omega$, mentre vale 4π se $(0, 0, 0) \in \Omega$.
(NB questa proprietà è legata al *teorema di Gauss* in elettromagnetismo)

Vedere anche ad es. i §5D, 5E, 6D del libro di Marcellini-Sbordone (vol.2 parte seconda) e i §3.1, 4.3 del libro di Salsa-Squellati.