UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 12.XII.2019

1. Il limite puntuale delle f_n è la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Per studiare la convergenza uniforme, calcoliamo

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1, \qquad \forall n.$$

Poiché tale quantità non tende a zero, la convergenza non è uniforme. Ciò si può dedurre anche dal fatto che le f_n sono continue, ma la f non lo è.

Per ogni fissato $a \in (0,1)$, abbiamo invece

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

e quindi la convergenza è uniforme su $[0,a]$.

2. Nel caso (a), f_n converge puntualmente a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Poiché le f_n sono continue mentre f è discontinua, la convergenza non può essere uniforme. Questo si vede anche dalla definizione, si trova infatti che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x>0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sulle semirette del tipo $(-\infty, -a]$ o $[a, +\infty)$, con $a > 0$. Si ha infatti

$$\sup_{[a,\infty)} |f_n - f| = |f_n(a) - f(a)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(na) \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Nel caso (b), $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) \equiv 1$. La convergenza non è uniforme, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} \; 1 - e^{-\frac{x^2}{n}} = \lim_{x\to\infty} 1 - e^{-\frac{x^2}{n}} = 1, \qquad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sugli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$, perché

$$\sup_{-[a,a]} |f_n - f| = 1 - e^{-\frac{a^2}{n}} \to 0 \;\text{ per }\; n \to \infty.$$

Nel caso (c), $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$. La convergenza non è uniforme, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(-n) = 1, \qquad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sulle semirette del tipo $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. Infatti, per n abbastanza grande ($n > -a$) allora f_n è decrescente su $[a, +\infty)$ e quindi

$$\sup_{[a,+\infty)} |f_n - f| = \sup_{[a,+\infty)} f_n = f_n(a) = \frac{1}{(a+n)^2 + 1} \to 0 \;\text{ per }\; n \to \infty.$$

Nel caso (d), $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = x^2$. La convergenza non è uniforme, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = +\infty, \qquad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sugli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$. Infatti

$$\sup_{[-a,a]} |f_n - f| = \sup_{[-a,a]} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{a}{n} \to 0 \;\text{ per }\; n \to \infty.$$

3. Il denominatore contiene una potenza di n maggiore del numeratore, quindi $f_n(x)$ tende puntualmente a $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, dobbiamo studiare

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{n^2 x}{x^2 + n^4}.$$

Dallo studio della derivata, si trova che la quantità è crescente per $x \in [0, n^2]$ e decrescente in $[n^2, +\infty)$. Il sup è quindi raggiunto nel punto $x = n^2$, dove l'espressione vale $1/2$ per ogni n. Troviamo quindi che il sup non tende a zero, e che la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$.

Se ripetiamo lo stesso studio su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, il comportamento cambia a seconda che il punto di massimo $x = n^2$ appartenga o no al sottoinsieme. Fissato un qualunque $a > 0$, è importante osservare che $n^2 > a$ per n abbastanza grande, cioè per gli n rilevanti quando prendiamo il limite per $n \to \infty$. Per tali n, uno studio della derivata analogo al caso precedente mostra che la differenza $|f_n(x) - f(x)|$ è una funzione crescente nell'insieme $[0, a]$, mentre nell'insieme $[a, \infty)$ è prima crescente e poi decrescente, assumendo il massimo in $x = n^2$. Di conseguenza

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} \frac{n^2 x}{x^2 + n^4} = \frac{n^2 a}{a^2 + n^4} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{n^2 x}{x^2 + n^4} = \frac{n^4}{n^4 + n^4} = \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } n \text{ grande..}$$

Concludiamo che la convergenza è uniforme su $[0, a]$, mentre non lo è su $[a, \infty)$.

4. Studiamo la convergenza puntuale. Se $x \neq 0$, il termine $n^2 x^2$ al denominatore prevale, e $f_n(x) \to 0$. Se invece $x = 0$, l'espressione diventa $f_n(0) = n/(1 + n)$, che tende a 1. La funzione limite è quindi

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Poiché il limite è discontinuo per $x = 0$, deduciamo subito che a convergenza non può essere uniforme su tutto $\mathbb{R}$, né sui sottoinsiemi del tipo $[-a, a]$. In alternativa, si può usare la definizione trovando che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = \frac{n}{n+1},$$

che tende a 1, anziché a zero, per $n \to \infty$.

Su insiemi del tipo $[a, \infty)$, con $a > 0$, si trova invece che $f_n - f = f_n$ è positiva e decrescente e quindi

$$\sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,\infty)} f_n(x) = f_n(a) \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Concludiamo che la convergenza è uniforme su $[a, \infty)$.

5. Nel caso (a), $f_n(x)$ converge a $f(x) = |x|$ e si ha

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \sup_{x\geq 0} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

quindi la convergenza è uniforme, ma la funzione linite non è derivabile per $x = 0$.

Nel caso (b), $|f_n(x)| \leq 1/n$ per ogni x quindi f_n converge a $f(x) \equiv 0$ uniformemente. D'altra parte $f_n'(x) = \cos nx$ che in generale non ha limite per $n \to \infty$. Gli unici valori di x per cui il limite esiste sono $x = 2k\pi$, con k intero: per tali x si ha però $f_n'(x) = 1$ per ogni n, mentre la funzione limite f ha derivata prima nulla ovunque.

Nel caso (c), $f_n(x)$ converge a $f(x) \equiv 0$ e si ha

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x \geq 0} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2\sqrt{e}} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

quindi la convergenza è uniforme. D'altra parte, si verifica che $f_n'(x) \to 0$ se $x \neq 0$, ma $f_n'(0) = 1$ per ogni n, quindi non converge a $f'(0) = 0$.

6. (a) La successione converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$ se $\alpha < 4$, mentre per $\alpha = 4$ converge a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x^3}, & x > 0. \end{cases}$$

Se $\alpha > 4$, la successione non ha un limite puntuale finito.

(b) Si ha

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^{\alpha-2}}{2} \arctan n^2 \longrightarrow \begin{cases} 0, & \alpha < 2 \\ \frac{\pi}{4}, & \alpha = 2 \\ +\infty, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Quindi il limite coincide con l'integrale di f se $\alpha < 2$ (sono entrambi zero) e se $\alpha = 4$ (sono entrambi infiniti).

(c) Se $\alpha = 4$ il limite puntuale è una funzione illimitata, mentre le f_n sono limitate. Quindi $\sup |f_n - f| = +\infty$ per ogni n e la convergenza non è uniforme. Se $\alpha < 4$ si ha

$$\sup_{[0,+\infty)} |f_n - f| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}n}\right) = \frac{3^{3/4}}{4} n^{\alpha-1},$$

quindi il limite è uniforme se e solo se $\alpha < 1$.

(d) Se $\alpha = 4$, si ha

$$\sup_{[1,+\infty)} |f_n - f| = \sup_{[1,+\infty)} \frac{1}{x^3(1 + n^4x^4)} = \frac{1}{1 + n^4} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

quindi la convergenza è uniforme. Se $\alpha < 4$, la funzione f_n è decrescente su $[1, \infty)$ per n abbastanza grande e pertanto

$$\sup_{[1,+\infty)} |f_n - f| = \sup_{[1,+\infty)} f_n = f_n(1) = \frac{n^\alpha}{1 + n^4} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

quindi la convergenza è uniforme anche in questi casi.

7. Sia $x \in \mathbb{R}$ fissato qualunque (escludendo il caso banale $x = 0$). Scrivendo lo sviluppo di McLaurin di $\operatorname{sen} x$ con resto di Lagrange, si ottiene

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

dove ξ è un opportuno valore compreso tra 0 e x. Ne segue che

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty,$$

cioè la serie data converge a $\operatorname{sen} x$.

8. (a) per $x \in [5, 9)$, (b) per $x \in [0, 1)$, (c) per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

9. Diamo il valore del raggio di convergenza R e il criterio suggerito a seconda dei casi:

   (a) $R = e^{-3}$, criterio del rapporto,
   (b) $R = 2$, criterio della radice,
   (c) $R = e/4$, criterio del rapporto,
   (d) $R = 4/3$, criterio del rapporto,
   (e) $R = 1/2$, criterio della radice,
   (f) $R = +\infty$, criterio della radice.