UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 12.XII.2019

1. Si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1].$$
Mostrare che f_n converge puntualmente a una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ma che la convergenza non è uniforme. Mostrare che invece la convergenza è uniforme sugli insiemi del tipo $[0,a]$ con $0 < a < 1$.

2. Per ciascuna delle seguenti successioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che f_n converge puntualmente a una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ma che la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$. Descrivere sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ su cui invece la convergenza è uniforme.
   (a) $f_n(x) = \arctan nx$.
   (b) $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$.
   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2+1}$.
   (d) $f_n(x) = x^2 - \dfrac{x}{n}$.

3. Si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{x^2 + n^4}, \qquad x \in [0, +\infty).$$
   (a) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su tutto il dominio.
   (b) Studiare la convergenza uniforme di f_n sui sottoinsiemi del tipo $[0,a]$ e su quelli del tipo $[a, +\infty)$, con $a > 0$.

4. Si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n + n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su tutto il dominio.
   (b) Studiare la convergenza uniforme di f_n sui sottoinsiemi del tipo $[-a,a]$ e su quelli del tipo $[a, +\infty)$, con $a > 0$.

5. Per ciascuna delle seguenti successioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che f_n converge uniformemente a una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostrare inoltre che, nonostante le f_n siano derivabili e la convergenza sia uniforme, la funzione limite f non è derivabile ovunque, oppure lo è ma le f_n' non convergono a f'.

   (a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$,

   (b) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$,

   (c) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$.

6. Per un fissato $\alpha > 0$, si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + n^4x^4}, \qquad x \in [0, \infty).$$

   (a) Dire per quali $\alpha > 0$ la successione converge puntualmente in $[0, \infty)$.

   (b) Dire per quali α tra quelli trovati in (a) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

   dove f è il limite puntuale di f_n.

   (c) Dire per quali $\alpha > 0$ la successione converge uniformemente in $[0, \infty)$.

   (d) Dire per quali $\alpha > 0$ la successione converge uniformemente in $[1, \infty)$.

7. Mostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x.$$

8. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le serie seguenti.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{2n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3x^{2n}}{n!}.$$

9. Trovare il raggio di convergenza delle serie seguenti

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{4n}\, n!}{n^n}\, x^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^n x^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n^n}\, x^n$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 3^{3n}}{4^n + n^2}\, x^n \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n x^n \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n\, x^n.$$

Vedere anche ad es. il cap. 6 del **primo** volume, parte seconda di Marcellini-Sbordone, i paragrafi 1C, 1D del secondo vol., parte prima di Marcellini-Sbordone, il cap. 7 del libro di Salsa-Squellati, e gli esercizi nella parte delle serie di Fourier del libro di Bertsch-Dal Passo-Giacomelli