UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) ai quesiti degli esercizi del 16.I.2019

1. (a) $y(x) = 3 \cos 2x - 2 \sin 2x$.

(b) $y(x) = e^{-x} - e^{-2x}$.

(c) $y(x) = -2e^{-x} \sin x$.

(d) $y(x) = -\frac{e^{-2x} + 2e^x}{3}$.

(e) $y(x) = (2 - 5x)e^{3x}$.

2. (a) $y(x) = 3 - 2 \cos 2x - \sin 2x$.

(b) $y(x) = \frac{e^{-2x} - 1 + 2x}{4}$.

(c) $y(x) = 3(x \cos x - \sin x)$.

(d) $y(x) = (e^x + e^{-x}) \cos x$.

3. (a) $\bar{y}(x) = -\frac{\sin x + 3 \cos x}{10}$.

(b) $\bar{y}(x) = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{10}$.

(c) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

(d) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$.

4. Usando il secondo dei metodi suggeriti, si trova l'integrale particolare

$$y(x) = -\frac{A}{2\omega} x \cos \omega x.$$

Col metodo della variazione delle costanti si arriva alla stessa funzione, più eventuali ulteriori addendi multipli di $\sin \omega x$ e $\cos \omega x$ che sono soluzioni dell'omogenea.

5. (a) $y(x) = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3} e^{2x}$.

(b) $y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-2x} + 2x^2 - 3x$.

(c) $y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{e^x}{5} + x - 2$.

(d) $y(x) = e^{2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{2e^{4x} - x}{4}$.

6. (a) $y(x) = -e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x) + 3x + 2$
 (b) $y(x) = \frac{e^{3x}(-3 \cos x + 12 \sin x) + x - 3}{2}$
 (c) $y(x) = (1 - x)e^{-2x} + 2e^{2x}$
 (d) $y(x) = e^{-3x}(-\cos x + 3 \sin x + 1)$.

7. Il problema possiede soluzioni diverse da quella nulla se e solo se $a = 1, 4, 9, 16, \dots$ (il quadrato di un numero intero); in questi casi le funzioni della forma $y(x) = c \sin \sqrt{ax}$ con $c \in \mathbb{R}$ sono tutte soluzioni del problema.

8. Ricordando l'esercizio 4 troviamo che, per ogni ω , l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = \left(c_1 - \frac{x}{\pi\omega} \right) \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

Tali funzioni soddisfano

$$y(0) = c_1, \quad y(\pi) = \left(c_1 - \frac{1}{\omega} \right) \cos \omega\pi + c_2 \sin \omega\pi.$$

Osserviamo che $\sin \omega\pi = 0$ se e solo se ω è intero. Usando questa proprietà, si trova che se ω **non** è intero allora la soluzione è unica in ciascuno dei tre casi (in generale, $y(0)$ e $y(\pi)$ si possono prescrivere a piacimento). Se invece ω è intero, la costante c_2 non gioca nessun ruolo, e quindi si avrà o nessuna o infinite soluzioni. Più precisamente, se ω è intero, (a) non ha soluzione, (b) ha infinite soluzioni per $\omega = 1$ e nessuna per gli altri valori, mentre (c) ha infinite soluzioni per $\omega = 3$ e nessuna per gli altri valori.

9. (a) per $k > 0$, (b) per ogni k , (c) per $k > 1$.
10. Si trova che se $k > 0$ allora le radici dell'equazione caratteristica sono o reali negative, o complesse con parte reale negativa. In entrambi i casi, le soluzioni dell'omogenea tendono a zero per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, un integrale particolare della non omogenea è dato da $\bar{y}(x) = (1 + k + 4)^{-1} e^x$, che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto, ogni soluzione dell'equazione completa è somma di una soluzione che tende a zero e di una che va a $+\infty$, e quindi tende a $+\infty$. Invece, la differenza di due soluzioni è una soluzione dell'omogenea e quindi tende a zero.
11. Sono sottospazi gli insiemi descritti in (a), (c), (e), (h), (i) e (j); non sono sottospazi gli insiemi degli altri casi.
12. Le funzioni sono indipendenti nei casi (a) e (c), mentre nel caso (b) si ha $y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0$.
13. w non è soluzione, z lo è.
14. Se $y_1, \dots, y_n$ non fossero linearmente indipendenti per qualche n , allora esisterebbe un polinomio della forma $c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$ identicamente nullo, ma con coefficienti non tutti nulli. Ciò è impossibile perché contraddice la proprietà ricordata nel testo. Si deduce anche che lo spazio $C^\infty(\mathbb{R})$ ha dimensione infinita, perché altrimenti non sarebbe possibile trovare un numero di funzioni linearmente indipendenti superiore alla dimensione.