UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi dell'11.I.2019

1. In ciascuno dei tre casi la funzione possiede una primitiva, data rispettivamente da

$$(a)\ \ F(z)=\frac{4z^3}{3}, \qquad (b)\ \ F(z)=-\frac{1}{z}, \qquad (c)\ \ F(z)=\frac{e^{\pi z}}{\pi}.$$

L'integrale è quindi uguale a $F(z_1)-F(z_0)$, dove $z_0=\phi(0)=1$ e $z_1=\phi(1)=1+i$. Si trova

$$(a)\ \ \frac{4}{3}(2i-3), \qquad (b)\ \ \frac{1+i}{2} \qquad (c)\ \ F(z)=-\frac{2e^{\pi}}{\pi}.$$

2. (a) Le singolarità di f sono $z_k=\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)$ per $k=0,1,2,3,4,5$. I corrispondenti residui valgono

$$\mathrm{Res}\, f(z_k)=\frac{1}{6z_k^5}=\frac{z_k}{6z_k^6}=-\frac{z_k}{6},$$

perché $z_k^6=-1$ per ogni k. Applicando il teorema dei residui si trova che

$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i(\,\mathrm{Res}\, f(z_0)+\,\mathrm{Res}\, f(z_1)+\,\mathrm{Res}\, f(z_2))=\frac{2}{3}\pi.$$

(b) Singolarità $z_k=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$ per $k=0,1,2,3$.

Residui: $\mathrm{Res}\, f(z_k)=\frac{1}{4z_k}$. Integrale $\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i(\,\mathrm{Res}\, f(z_0)+\,\mathrm{Res}\, f(z_1))=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(c) Singolarità $z_1=i$, $z_2=-i$. Residui: $\mathrm{Res}\, f(i)=i/2$, $\mathrm{Res}\, f(-i)=-i/2$.

Integrale $\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\, f(i)=-\pi$.

3. (a) Singolarità: $z_k=2k\pi i$ per k intero. Residui: $\mathrm{Res}\, f(z_k)=-4k^2\pi^2+1$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=2\pi i\ \mathrm{Res}\, f(z_0)=2\pi i$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=2\pi i\ [\,\mathrm{Res}\, f(0)+\,\mathrm{Res}\, f(2\pi i)+\,\mathrm{Res}\, f(-2\pi i)]=2\pi i(3-8\pi^2)$$

(b) Singolarità: $z_k=(\pi+2k\pi)i$ per k intero. Residui: $\mathrm{Res}\, f(z_k)=-z_k$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=0$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=2\pi i\ [\,\mathrm{Res}\, f(\pi i)+\,\mathrm{Res}\, f(3\pi i)+\,\mathrm{Res}\, f(-\pi i)+\,\mathrm{Res}\, f(-3\pi i)]=0.$$

(c) Singolarità: $z_k = (-\pi/2 + 2k\pi)i$ per k intero. Residui: $\operatorname{Res} f(z_k) = 2iz_k$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 i$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res} f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res} f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 6\pi^2 i.$$

4. (a) Singolarità $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Residui: $\operatorname{Res} f(i) = \operatorname{Res} f(-i) = \dfrac{1}{4}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$.

Integrale $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,[\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i)] = \pi\left(e - \frac{1}{e}\right) i.$

(b) Singolarità $z_1 = \pi$, $z_2 = -\pi$. Residui: $\operatorname{Res} f(\pm\pi) = \pm\dfrac{1}{2\pi}$.

Integrale $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

5. Le singolarità della funzione sono $z_0 = 2$, $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ e i residui valgono rispettivamente $\operatorname{Res} f(z_k) = \dfrac{1}{3z_k^2} = \dfrac{z_k}{24}$. Per $0 < R < \sqrt{3}$ la curva γ_R non racchiude singolarità e l'integrale vale zero. Per $\sqrt{3} < R < 3$, la curva racchiude z_1 e z_2 e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{z_1}{24} + \frac{z_2}{24}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Per $R > 3$ tutte le singolarità sono racchiuse e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{z_0}{24} + \frac{z_1}{24} + \frac{z_2}{24}\right) = 0.$$

Per $R = \sqrt{3}, R = 3$ la curva non è contenuta nel dominio della funzione.

6. Le singolarità della funzione sono i valori di z tali che $e^{\pi z} = i$, cioè i numeri complessi della forma

$$z_k = \left(\frac{1}{2} + 2k\right) i, \qquad k \text{ intero},$$

e i rispettivi residui valgono

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{z_k^2}{\pi e^{\pi z_k}} = \frac{z_k^2}{\pi i}.$$

Per $R = 2$, le singolarità racchiuse sono z_0 e z_{-1} e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{z_0^2}{\pi i} + \frac{z_{-1}^2}{\pi i}\right) = -5.$$

Al tendere di $R \to +\infty$ la curva racchiude sempre più singolarità e si trova

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=-K}^{K} \frac{z_k^2}{\pi i}.$$

La serie non converge, perché il termine generico non va a zero, quindi neanche l'integrale possiede limite finito.

7. (a) Poniamo $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ per z complesso. Allora abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\eta_R} f(z)\,dz,$$

dove η_R è il segmento $[-R, R]$ sull'asse reale. Indichiamo inoltre con ζ_R la semicirconferenza $\zeta_R(t) = Re^{it}$, per $t \in [0,\pi]$ e poniamo $\gamma_R = \eta_R \cup \zeta_R$. Allora γ_R è una curva chiusa orientata positivamente e l'integrale di f su di essa si calcola col teorema dei residui. Per $R > 1$, le singolarità di f racchiuse da γ sono

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

e i residui corrispondenti sono $\operatorname{Res} f(z_k) = -\frac{z_k}{4}$. Si ha quindi, per ogni $R > 1$:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\eta_R} f(z)\,dz + \int_{\zeta_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Infine, per stimare l'integrale su ζ_R, osserviamo che se $z \in \zeta_R$ con $R > 1$, allora $|z^4+1| \geq |z^4| - 1 = R^4 - 1$, quindi $|f(z)| \leq \frac{1}{R^4-1}$. Ne segue che

$$\int_{\zeta_R} f(z)\,dz \leq L(\zeta_R) \max_{z\in\zeta_R} |f(z)| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^4-1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } R \to +\infty.$$

Concludiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\eta_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Posto $f(z) = \frac{z^4}{z^6+1}$, le singolarità di f sono le z_k dell'esercizio 2(a). I residui in questo caso valgono

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{z_k^4}{6z_k^5} = \frac{1}{6z_k} = \frac{\bar{z}_k}{6|z_k|^2} = \frac{\bar{z}_k}{6}.$$

Seguendo lo stesso procedimento dell'esercizio precedente, si trova

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z_0) + \operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2) \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

(c) Se si pone $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2+1}$ il procedimento precedente non si applica facilmente, perché $f(z)$ non tende a zero su ζ_R al tendere di $R \to +\infty$. Poniamo allora $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}$. In questo modo, con le notazioni di (a), troviamo

$$\int_{\eta_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos \pi x + i \operatorname{sen} \pi x}{x^2+1}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos \pi x}{x^2+1}\,dx,$$

perché il contributo del seno è nullo per simmetria. Anche in questo caso quindi otteniamo l'integrale richiesto studiando il limite per $R \to +\infty$. Dalla definizione di esponenziale si ottiene che $|e^{i\pi z}| \leq 1$ per ogni z con parte immaginaria positiva. Troviamo quindi

$$\int_{\zeta_R} f(z)\,dz \leq L(\zeta_R) \max_{z\in\zeta_R} |f(z)| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^2-1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } R \to +\infty,$$

da cui si conclude

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = 2\pi i \frac{e^{-\pi}}{2i} = \pi e^{-\pi}.$$

8. Le singolarità di $f(z)$ sono:

$$z_0 = 1 + i, \qquad z_1 = -1 + i, \qquad z_2 = -1 - i, \qquad z_3 = 1 - i.$$

Indicata con γ la circonferenza del punto (a) si trova

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i[\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] = -\frac{\pi}{4} i e^{-\pi}.$$

Per rispondere al punto (b), come suggerito dal testo, seguiamo un procedimento simile a quello dell'esercizio precedente ma considerando segmenti lungo l'asse immaginario anziché reale. Indichiamo quindi con η_R il segmento di estremi $-iR$ e iR. Lungo l'asse immaginario si ha

$$z = iy, \qquad dz = idy, \qquad f(z) = \frac{e^{i\pi y}}{(iy)^4 + 4} = \frac{\cos \pi y + i \operatorname{sen} \pi y}{y^4 + 4},$$

e quindi

$$\int_{\eta_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos \pi y + i \operatorname{sen} \pi y}{y^4 + 4}\, i\, dy = \int_{-R}^{R} \frac{i \cos \pi y}{y^4 + 4}\, dy,$$

perché il contributo del seno è nullo per simmetria. Consideriamo inoltre la semicirconferenza $\zeta_R(t) = Re^{it}$, stavolta con $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ e poniamo $\gamma_R = \eta_R \cup \zeta_R$. I punti di ζ_R hanno parte reale negativa o nulla, quindi $|e^{\pi z}| \leq 1$ lungo la curva. Con calcoli simili all'esercizio precedente, si trova quindi che l'integrale di $f(z)$ lungo ζ_R tende a 0 per $R \to +\infty$. Concludiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2 + 4}\, dx &= \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{i} \int_{\eta_R} f(z)\, dz = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{i} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \\ &= 2\pi[\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] = -\frac{\pi}{4} e^{-\pi}. \end{aligned}$$