

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 29.XII.2018

1. Tutte le serie proposte sono riconducibili alla serie geometrica. Si trova

- | | | | |
|--------------------------|--------------------|-------------|--------------------|
| (a) $\frac{3}{2}$ | (b) $\frac{4}{15}$ | (c) diverge | (d) $-\frac{1}{5}$ |
| (e) $\frac{4}{1-e^{-3}}$ | (f) $-\frac{9}{7}$ | (g) diverge | (h) $\frac{8}{5}$ |

2. La serie converge per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\left| \frac{x}{x+1} \right| < 1$, cioè gli $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$.

3. Nelle risposte, indichiamo con a_n il termine generico della serie e usiamo il simbolo $a_n \approx b_n$ per indicare l'equivalenza asintotica, cioè la proprietà che $a_n/b_n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$.

- (a) NO, è una serie del tipo $\sum 1/n^\alpha$ con $\alpha \leq 1$.
- (b) SÌ, si ha $a_n \approx 1/n^2$, e una serie del tipo $\sum 1/n^\alpha$ con $\alpha > 1$ è convergente.
- (c) SÌ, ad es. si osserva che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$ e si applica il criterio della radice.
- (d) SÌ, si ha $a_n \approx 1/n^2$.
- (e) NO, si ha $a_n \approx 1/\sqrt{n}$.
- (f) NO, si ha $a_n \approx 1/\sqrt{2}n$.
- (g) SÌ, converge assolutamente perché si ha

$$|a_n| \leq \frac{n}{n^3 + n - 1} \approx \frac{1}{n^2}.$$

- (h) SÌ, la serie soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz.
- (i) NO, non è soddisfatta la condizione necessaria $a_n \rightarrow 0$.
- (j) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$, quindi si applica il criterio del rapporto.
- (k) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, quindi si applica il criterio del rapporto.
- (l) SÌ, si ha $a_n \approx (5/6)^n$ e si usano i risultati sulla serie geometrica.
- (m) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1/e < 1$, e si applica il criterio del rapporto.
- (n) NO, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$, e si applica il criterio del rapporto.
- (o) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$, e si applica il criterio del rapporto.
- (p) NO, con gli sviluppi di Taylor si trova $a_n \approx 1/n$.
- (q) SÌ, la serie soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz (la monotonia vale a partire da $n = 25$).
- (r) SÌ, con gli sviluppi di Taylor si trova $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{6}n^{3/2}}$.

4. (a) Vale $a_n \approx \frac{1}{6^\alpha n^{3\alpha}}$, quindi la serie converge per $\alpha > 1/3$.
- (b) Vale $a_n \approx \frac{1}{2n \ln^\alpha n}$, quindi la serie converge per $\alpha > 1$. (Ricordiamo che una serie del tipo $\sum \frac{1}{n^\beta \ln^\alpha n}$ converge se e solo se $\beta > 1$ oppure $\beta = 1$ e $\alpha > 1$).
- (c) Ricordiamo che $\ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) \approx \cos x - 1 \approx -\frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$. Quindi $a_n \approx -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, e la serie converge per $\alpha > 1/2$.
- (d) Vale $a_n \approx \frac{1}{n^{-1+\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\ln n}}$, quindi la serie converge per $-1 + \frac{\alpha}{2} > 1$, cioè $\alpha > 4$.
- (e) Con opportuni sviluppi di Taylor si trovano i risultati seguenti. Se $\alpha > 1/2$ allora $a_n \approx -\frac{1}{2n}$, e la serie non converge. Se $\alpha < 1/2$ allora $a_n \approx \frac{1}{2n^{2\alpha}}$, e di nuovo la serie non converge. Se $\alpha = 1/2$, si trova $a_n \approx -\frac{1}{6n^2}$, e la serie converge.
- (f) Se $\alpha \leq 2$, i termini della serie non vanno a zero e la serie non converge. Se $\alpha > 2$, la serie converge per il criterio di Leibniz. Si osservi che la successione $|a_n|$ non è necessariamente decrescente per tutti gli n , ma lo è per n sufficientemente grande (precisamente, se $n^\alpha > 2(\alpha - 2)^{-1}$) e questo basta per applicare il criterio.
- (g) Se $\alpha \leq 1$ allora $a_n \approx \frac{\alpha - 1}{\sqrt{n}}$ e la serie non converge. Se $\alpha = 1$, allora $a_n \approx \frac{1}{6n^{3/2}}$ e la serie converge.
- (h) Si trova

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{\alpha}{2e}.$$

Il testo chiede di studiare $\alpha > 0$, e il criterio del rapporto dice che la serie converge quando $0 < \alpha < 2e$ e diverge quando $\alpha > 2e$.

Nel caso $\alpha = 2e$ il criterio del rapporto non dà una risposta immediata. Tuttavia, si può adattare a questo caso la dimostrazione del criterio nel caso di un limite maggiore di 1, ragionando come segue. E' noto dal corso di Analisi I che la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende al numero e dal basso, essendo monotona crescente. Questo implica che $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\alpha}{2e} = 1$ cioè $a_{n+1} > a_n$. Come nella dimostrazione del criterio del rapporto, concludiamo che a_n , essendo positiva e crescente, non tende a zero, e quindi anche nel caso $\alpha = 2e$ la serie non converge.

- (i) Se $\alpha = 1$ allora $a_n = \frac{1}{2n}$ e la serie non converge. Se $\alpha \neq 1$, allora $a_n \approx \frac{1}{n^\beta}$ con $\beta = \max\{\alpha, 2 - \alpha\}$, cioè $\beta = \alpha$ se $\alpha > 1$, risp. $\beta = 2 - \alpha$ se $\alpha < 1$. In entrambi i casi si ha $\beta > 1$, quindi la serie converge se e solo se $\alpha \neq 1$. (l) Vale $a_n \approx \frac{1}{n^{3-\alpha}}$, quindi la serie converge per $\alpha < 2$.
- (m) Posto $a_n = \sqrt{4n^6 + n^\alpha} - 2n^3$, abbiamo

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{4n^6 + n^\alpha} + 2n^3} \approx \begin{cases} n^{\alpha/2} & \text{se } \alpha > 6 \\ \frac{n^3}{\sqrt{5}+2} & \text{se } \alpha = 6 \\ \frac{1}{4n^{3-\alpha}} & \text{se } \alpha < 6. \end{cases}$$

Per tutti gli $\alpha \geq 3$, il termine a_n non tende a zero e quindi la serie non converge. Per $\alpha < 3$ possiamo utilizzare il criterio di Leibniz, a patto di verificare che a_n è decrescente. Posto

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\sqrt{4x^6 + x^\alpha} + 2x^3} = \frac{1}{\sqrt{4x^{6-2\alpha} + x^{-\alpha}} + 2x^{3-\alpha}},$$

abbiamo

$$f'(x) = - \frac{(4x^{6-2\alpha} + x^{-\alpha})^{-1/2} [2(6-2\alpha)x^{5-2\alpha} - (\alpha/2)x^{-1-\alpha}] + 2(3-\alpha)x^{2-\alpha}}{\left(\sqrt{4x^{6-2\alpha} + x^{-\alpha}} + 2x^{3-\alpha}\right)^2}.$$

Poiché ci interessa il caso $\alpha < 3$, vale sicuramente $6 - 2\alpha > 0$ e $5 - 2\alpha > -1 - \alpha$, da cui segue che $2(6 - 2\alpha)x^{5-2\alpha} - (\alpha/2)x^{-1-\alpha} > 0$ per x abbastanza grande. Essendo anche $2(3 - \alpha)x^{2-\alpha} > 0$, deduciamo che $f'(x) < 0$ per x abbastanza grande. Ne segue che a_n è decrescente per n abbastanza grande. Per il criterio di Leibniz, concludiamo che la serie converge per $\alpha < 3$.

(n) Posto $a_n = \frac{n^4 + n^{2\alpha}}{n^{\alpha+3}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{3-\alpha}}$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$ se e solo se si ha simultaneamente $\alpha - 1 > 0$ e $3 - \alpha > 0$, cioè $1 < \alpha < 3$. Per questi valori di α , è anche evidente che a_n è decrescente. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

(o) Si tratta di una serie geometrica di base $\frac{1}{\alpha-1}$, che quindi converge se e solo se $-1 < \frac{1}{\alpha-1} < 1$, cioè se e solo se $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Poiché il testo si limita a chiedere gli $\alpha > 0$, la risposta è che la serie converge per gli $\alpha > 2$.

(p) Posto $a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{5-\alpha}}$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$ se e solo se si ha simultaneamente $\alpha - 1 > 0$ e $5 - \alpha > 0$, cioè $1 < \alpha < 5$. Per questi valori di α , è anche evidente che a_n è decrescente. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

(q) Vale $a_n \approx \frac{1}{n^{2\alpha}}$, quindi la serie converge per $\alpha < \frac{1}{2}$.

5. Il numeratore $1 + 2 \cdot (-1)^n$ vale 3 se n è pari, vale -1 se n è dispari, mentre il denominatore è positivo, quindi la serie è a segno alternato. Il numeratore è limitato, mentre il denominatore va a infinito, quindi i termini tendono a zero. Per studiare la convergenza della serie, poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1 + 2 \cdot (-1)^k}{k}, \quad S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad S''_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Allora S_n è la ridotta n -sima della serie richiesta, cioè la convergenza della serie equivale all'esistenza del limite finito di S_n per $n \rightarrow \infty$. D'altra parte, S'_n è la ridotta n -sima della serie armonica, che diverge, quindi $S'_n \rightarrow +\infty$. Invece S''_n è la ridotta n -sima della serie $2 \sum \frac{(-1)^n}{n}$, che converge per il criterio di Leibniz, quindi S''_n tende a un limite finito per $n \rightarrow \infty$. Poiché $S_n = S'_n + S''_n$, concludiamo che $S_n \rightarrow +\infty$ e quindi la serie proposta è divergente. Il criterio di Leibniz non si applica perché il modulo dei termini della serie non è monotono decrescente (neanche supponendo n sufficientemente grande).