

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi dell'1.XII.2018

1. Le curve hanno tutte parametrizzazioni di classe C^∞ . Per studiare la regolarità calcoliamo $\gamma'(t)$ e verifichiamo se si può annullare.

(a) $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$, non nullo per ogni t , curva regolare.

(b) $\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$, si annulla per $t = 0, \pi/2, \pi, (3/2)\pi, 2\pi$, curva regolare a tratti.

(c) $\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, non nullo per ogni t , curva regolare.

(Nota: piuttosto che studiare l'annullamento simultaneo di $x'(t)$ e $y'(t)$, può convenire in questo caso calcolare $\|\gamma'(t)\|$; si trova che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t$ e quindi $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t .)

(d) $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$, si annulla per $t = 0$, curva regolare a tratti.

(e) $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, non nullo per ogni t , curva regolare.

2. (a) $L(\gamma) = 2\pi R$ (b) $L(\gamma) = 6$ (c) $L(\gamma) = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$ (d) $L(\gamma) = \frac{2}{27} \left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right)$
(e) $L(\gamma) = 2\sqrt{2}\pi$.

3. Nota: esistono diversi modi equivalenti di parametrizzare la retta tangente alla curva. Noi prendiamo come equazioni parametriche quelle date da

$$x = x_0 + x'(t_0)t, \quad y = y_0 + y'(t_0)t.$$

L'equazione cartesiana della retta tangente invece si ricava dalla formula

$$y'(t_0)(x - x_0) = x'(t_0)(y - y_0).$$

- (a) P_1 corrisponde a $t = 0$, la retta tangente ha equazione parametrica $x = 0, y = 2t$ ed equazione cartesiana $x = 0$ (coincide con l'asse y).

P_2 non appartiene alla curva,

$P_3 = \gamma(\pi/4)$, la retta tangente ha eq. par. $x = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}t, y = \sqrt{2} + \sqrt{2}t$ ed eq. cart. $x + y = 2\sqrt{2} - 2$.

- (b) P_1 non appartiene alla curva,

$P_2 = \gamma(\pi/6)$, la retta tangente ha equaz. param. $x = \sqrt{3} - t, y = 1 + 2\sqrt{3}t$ ed eq. cart. $2\sqrt{3}x + y = 7$,

P_3 non appartiene alla curva.

- (c) $P_1 = \gamma(1)$, la retta tangente ha eq. par. $x = 4t, y = t$ ed eq. cart. $x - 4y = 0$,

P_2 non appartiene alla curva,

$P_3 = \gamma(-1)$, la retta tangente ha eq. par. $x = -4t, y = -2 + t$ ed eq. cart. $x + 4y = -8$.

4. Al variare di $t \in [0, 2\pi]$, le uguaglianze $\cos t = 0, \sin 2t = 0$ sono soddisfatte simultaneamente per $t = \pi/2$ o $t = 3\pi/2$. Quindi la curva passa due volte per l'origine. I vettori velocità corrispondenti sono $\gamma'(\pi/2) = (-1, -2)$ e $\gamma'(3\pi/2) = (1, -2)$; essi non sono paralleli, quindi le rette tangenti non coincidono. Le equazioni (ad es. cartesiane) delle rette tangenti sono rispettivamente $y = 2x$ e $y = -2x$.

5. (a) $\int_{\gamma} (x^2 y + y^3) ds = \int_0^{\pi} 16 \sin t dt = 32.$
- (b) $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} e^{3t} \sqrt{10} dt = \frac{\sqrt{10}}{3} (e^{6\pi} - 1).$
- (c) $\int_{\gamma} xy ds = \int_0^{\pi/2} 6 \cos t \sin t \sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = -\frac{3}{5} \int_9^4 \sqrt{u} du = \frac{38}{5}.$
- (d) $\int_{\gamma} y(x - 2y^4) ds = - \int_0^2 t^5 \sqrt{16t^6 + 1} dt = -\frac{1}{144} (1025^{3/2} - 1).$
- (e) $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{2}{3} \left((1 + \pi^2)^{3/2} - 1 \right).$
- (f) $\int_{\gamma} \sqrt{1 - y} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 4\sqrt{2}.$
- (g) $\int_{\gamma} (xy - 2y + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (9 \cos t \sin t - 6 \sin t + 4t^2) \sqrt{13} dt = \frac{32}{3} \sqrt{13} \pi^3.$
- (h) $\int_{\gamma} \left(\frac{2}{3}x + 4z \right) ds = \int_0^1 (2t + 4t^3) 3\sqrt{1 + t^2 + t^4} dt = 2(3\sqrt{3} - 1).$
- (i) $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds = \int_0^1 (e^{2t} + e^{-2t}) \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} dt = \int_0^1 (e^{2t} + e^{-2t})(e^t + e^{-t}) dt$
 $= \frac{e^3}{3} + e - \frac{1}{e} - \frac{1}{3e^3}.$

6. Si ha da un lato

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle,$$

dall'altro $\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 = 0$ perché l'espressione è costante. Ne segue che $\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0$.

7. La parametrizzazione è di classe C^1 per ipotesi; inoltre un calcolo diretto mostra che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\rho(t)^2 + \rho'(t)^2}$, che è strettamente positivo per l'ipotesi $\rho(t) > 0$.

8. Un'ellisse di semiassi a, b è parametrizzato da $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Consideriamo il caso $a > b$ (l'altro è analogo). Allora

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt < \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a,$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt > \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} b dt = 2\pi b,$$

quindi $2\pi b < L(\gamma) < 2\pi a$.

9. Il cambio di parametro tra (a) e (b) è dato da $h(t) = -t/4$, mentre quello tra (a) e (c) è $h(t) = \arcsin(t/4)$. Nelle tre parametrizzazioni il punto $(\sqrt{3}, 2)$ corrisponde rispettivamente al valore del parametro $t_0 = \pi/6$, $t_0 = -2\pi/3$, $t_0 = 2$ e i vettori velocità sono $(-1, 2\sqrt{3})$, $(1/4, -\sqrt{3}/2)$, $(-1/2\sqrt{3}, 1)$ che sono paralleli.

10. (a) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \frac{52}{3}$, $\int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 16$;
 (b) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$;
 (c) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi + \frac{8}{3}\pi^3$, $\int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \frac{8}{3}\pi^3$.

Nei casi (a) e (c), otteniamo diversi valori dell'integrale su due curve con gli stessi estremi, quindi i campi non possono essere conservativi (alla stessa conclusione si può arrivare, più rapidamente, verificando che i campi non sono irrotazionali).

Nel caso (b) si ottiene lo stesso valore, e quindi non si può dedurre nulla sulla conservatività del campo, cioè il calcolo dei due integrali non permette di trarre conclusioni. D'altra parte, si può osservare che il campo non è irrotazionale e quindi sicuramente non è conservativo. Questo esempio mostra che anche un campo non conservativo può avere lo stesso integrale su particolari coppie di curve con gli stessi estremi.

11. (a) $\mathbf{F}$ è conservativo e un suo potenziale è $U(x, y) = x^2 \sin y$.
 (b) $\mathbf{F}$ non è conservativo.
 (c) $\mathbf{F}$ è conservativo e un suo potenziale è $U(x, y) = xe^{-y} + y^2$.
 (d) $\mathbf{F}$ non è conservativo.
 (e) $\mathbf{F}$ non è conservativo.
 (f) $\mathbf{F}$ è conservativo e un suo potenziale è $U(x, y, z) = -\cos(x - y) - y^2z + 3z$.
12. (a) $a = -\frac{1}{2}$, $U(x, y) = -\frac{x}{2} \cos(y^2)$, l'integrale vale $-\frac{1}{2}$.
 (b) $a = 2$, $U(x, y) = y \arctg(x^2)$, l'integrale vale 0.
 (c) $\mathbf{F}$ non è conservativo per nessun valore di a .
 (d) $a = \frac{1}{2}$, $U(x, y) = \frac{1}{2}e^{2x^2+y} + x^2e^{y^2}$, l'integrale vale $\frac{e^2+1}{2}$.
13. (a) Poniamo $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, dove $\mathbf{G} = (2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y})$ e $\mathbf{H} = (y, 2x + y)$. In questo modo $\mathbf{G}$ è conservativo e ha come potenziale $U(x, y) = e^{x^2y}$. Otteniamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = (1 - e) + \frac{11}{6} = \frac{17}{6} - e,$$

dove il primo integrale è calcolato usando il potenziale e il secondo con la definizione.

NB è possibile definire i campi $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ in altri modi, ad es. $\mathbf{G} = (2xye^{x^2y} + y, x^2e^{x^2y} + x + y)$ e $\mathbf{H} = (0, x)$; i conti sono simili.

- (b) Posto $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, dove $\mathbf{G} = (2x \cos[\pi(x^2 - y^2)], -2y \cos[\pi(x^2 - y^2)])$ e $\mathbf{H} = (0, x^2)$, si ha che $\mathbf{G} = \nabla U$ dove $U(x, y) = \frac{1}{\pi} \sin[\pi(x^2 - y^2)]$ e pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = 0 + \frac{8}{15} = \frac{8}{15}.$$

14. Il campo è conservativo per $a = 2$ e in questo caso un suo potenziale è

$$U(x, y) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin(4\pi y) + y^2(x + 1)$$

e l'integrale su γ vale $U(-1, 0) - U(0, 1) = -1$. Per rispondere a (c) conviene utilizzare un metodo simile a quello dell'esercizio precedente. Indichiamo con $\mathbf{F}_*$ il campo corrispondente al caso $a = 2$ appena studiato; allora, per un a generico, si ha $\mathbf{F} = \mathbf{F}_* + (a - 2)y(x + 1)\hat{j}$. Essendo

$\mathbf{F}_*$ conservativo, il suo integrale su ζ coincide con quello su γ appena calcolato. Usando la parametrizzazione $\zeta(t) = (-t, 1-t)$, con $t \in [0, 1]$, troviamo quindi

$$\int_{\zeta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\zeta} \mathbf{F}_* \cdot d\mathbf{x} + \int_{\zeta} (a-2)y(x+1)dy = -1 + (a-2) \int_0^1 -(1-t)^2 dt = -\frac{1+a}{3}.$$

15. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo per $a = -1$.
 (b) Indichiamo con $\mathbf{F}_*$ il campo nel caso $a = 1$. Un potenziale di $\mathbf{F}_*$ è

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (e^{2xy} + e^{2y}) - xy$$

pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = U(-2, 2) - U(0, 0) = \frac{1}{2} (e^{-8} + e^4) + 3.$$

- (c) Ponendo $\mathbf{F} = \mathbf{F}_* + (a+1)x\hat{j}$ troviamo

$$\begin{aligned} \int_{\zeta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\zeta} \mathbf{F}_* \cdot d\mathbf{x} + (a+1) \int_{\zeta} x dy \\ &= U(-2, 2) - U(0, 0) + (a+1) \int_0^1 (-2t) 2 dt = \frac{1}{2} (e^{-8} + e^4) - 2a + 1. \end{aligned}$$

16. (a) Il punto è $\gamma(\frac{3}{4}\pi) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. La retta tangente ha equazione $x = -t$, $y = (1-t)/\sqrt{2}$.
 (b) L'integrale vale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2} \cos t \sin t \sqrt{2 \sin^2 t + \cos^2 t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{1+u} du = \frac{\sqrt{2}-4}{3}.$$

- (c) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2)y^4 + e^x y$$

pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = U(1 - \sqrt{2}, 0) - U(1, -1) = -\frac{3}{2} + e.$$

17. (a) Si ha $\|\gamma'(t)\|^2 = \sqrt{4+9t^4}$, che per $t \in [0, 1]$ è compreso tra 2 e $\sqrt{13}$. La lunghezza della curva è si stima dal basso e dall'alto con l'integrale tra 0 e 1 di queste due costanti, che è uguale alle costanti stesse 2 e $\sqrt{13}$ rispettivamente.
 (b) L'integrale vale

$$\int_0^1 -4t^3 \sqrt{4+9t^4} dt = \frac{2}{27} \left(8 - 13^{\frac{3}{2}} \right).$$

- (c) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x, y) = 2e^{x^2-3y} + y^{10}$$

pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = U(2, 1) - U(0, 0) = 2e - 1.$$

18. Entrambi i campi sono irrotazionali, ma sono definiti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che non è un insieme semplicemente connesso. Pertanto i criteri generali non danno informazioni ed entrambi i casi sono dubbi. Per giungere alla risposta ricorriamo a ulteriori considerazioni. Nel caso del campo (a), se calcoliamo l'integrale lungo una circonferenza centrata in $(0,0)$ usando la definizione, troviamo facilmente che il risultato è 2π . Il campo quindi non è conservativo, perché altrimenti il suo integrale su ogni curva chiusa sarebbe nullo.

Nel caso del campo (b), se si applica uno dei metodi noti per il calcolo del potenziale, si trova come candidato la funzione $U = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Si verifica che U è definita nello stesso insieme di $\mathbf{F}$ e che ha come derivate parziali le componenti di $\mathbf{F}$ (tale verifica è necessaria perché non sappiamo a priori che il campo è conservativo). Quindi U è un potenziale di $\mathbf{F}$, e $\mathbf{F}$ è conservativo.

In alternativa, si può calcolare l'integrale del campo (b) lungo una circonferenza centrata in $(0,0)$; usando la definizione, si trova che vale zero. Si può allora applicare un risultato visto nel corso, che dice che un campo irrotazionale, definito su tutto il piano tranne un punto, che ha integrale nullo su una circonferenza che gira intorno al punto, è conservativo.

19. (a) Il campo è irrazionale per ogni a , ma il dominio non consente di trarre direttamente informazioni. Scriviamo allora $\mathbf{F} = \mathbf{G} + a\mathbf{H}$, dove

$$\mathbf{G} = (ye^{2xy}, e^{2y} + xe^{2xy}), \quad \mathbf{H} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Entrambi gli addendi sono separatamente irrotazionali. Il campo $\mathbf{G}$ è definito ovunque, quindi è anche conservativo. Il campo $\mathbf{H}$ è invece il noto esempio di campo irrotazionale ma non conservativo (visto a lezione, o nell'esercizio 18 (a)). Da questo deduciamo che $\mathbf{F}$ è conservativo se e solo se il termine con $\mathbf{H}$ non compare, cioè se $a = 0$.

(b) Per $a = 0$, si ha $\mathbf{F} = \mathbf{G}$. Si trova che $\mathbf{G}$ ha per potenziale $U(x, y) = \frac{1}{2}(e^{2xy} + e^{2y})$ pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = U(-1, 0) - U(0, 1) = \frac{1}{2}(1 - e^2).$$

(c) La curva ζ è un'ellisse che racchiude l'origine al suo interno. Per risultati noti, l'integrale di $\mathbf{G}$ su ζ vale zero, mentre quello di $\mathbf{H}$ è uguale a quello calcolato su una circonferenza centrata nell'origine, che vale 2π . L'integrale di $\mathbf{F}$ vale quindi $2\pi a$.

20. Applicando il teorema di Stokes nel piano troviamo

$$(a) \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F} \, dxdy = \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^{-2x} (-6x + 2) \, dy = \int_{-2}^0 (9x^2 - 3x) \, dx = 30.$$

$$(b) \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F} \, dxdy = \int_0^2 d\rho \int_{-\pi}^0 -8(2 + \rho \cos \theta) \rho \, d\theta = \int_0^2 (-16\pi) \rho \, d\rho = -32\pi.$$

$$(c) \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F} \, dxdy = \int_2^3 d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} (-6\rho \cos \theta + 2) \rho \, d\theta = \int_2^3 (6\rho^2 + \pi\rho) \, d\rho = 38 + \frac{5}{2}\pi.$$

21. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo per $\alpha = 1$. Se indichiamo con $\mathbf{F}_*$ il campo nel caso $\alpha = 1$, un potenziale di $\mathbf{F}_*$ è

$$U(x, y) = xy + \frac{1}{2\pi} \cos[\pi(x^2 - 2y)].$$

(b) Ponendo $\mathbf{F} = \mathbf{F}_* + (\alpha - 1)x\hat{j}$ troviamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\zeta} \mathbf{F}_* \cdot d\mathbf{x} + (\alpha - 1) \int_{\gamma} x \, dy \\ &= U(1, -1) - U(0, 0) + (\alpha - 1) \int_0^1 (t^{14} + t^6 - t^2)(-2t) \, dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{7}{2}(\alpha - 1). \end{aligned}$$

(c) Presa una qualunque curva chiusa semplice ζ , si ha che $\zeta = \partial\Omega$ con Ω la regione racchiusa da ζ . Poiché il campo è definito ovunque, si può applicare il teorema di Stokes trovando, per $\alpha \neq 1$,

$$\int_{\zeta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dxdy = \int \int_{\Omega} (\alpha - 1) \, dxdy = (\alpha - 1)m(\Omega) \neq 0,$$

dove $m(\Omega)$ indica la misura di Ω . Abbiamo calcolato nell'ipotesi che ζ corrisponda all'orientazione positiva di $\partial\Omega$, in caso contrario compare un segno meno che non cambia la conclusione.

22. Dato $R > 0$, indichiamo con γ_R la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Presi due raggi qualunque $R_2 > R_1 > 0$, indichiamo con Ω la corona circolare compresa tra γ_{R_1} e γ_{R_2} . Poiché $(0,0) \notin \Omega$, $\mathbf{F}$ è definito su tutto Ω e possiamo applicare il teorema di Stokes. Per percorrere il bordo di Ω con orientazione positiva bisogna seguire la circonferenza esterna in senso antiorario e quella interna in senso orario. Troviamo quindi

$$\int \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dxdy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_{R_2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma_{R_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

Poiché per ipotesi il campo è irrotazionale, il primo membro è nullo e quindi $\int_{\gamma_{R_2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_{R_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$. Questo vale per qualunque coppia di raggi R_1, R_2 , e pertanto abbiamo mostrato che l'integrale è lo stesso qualunque sia il raggio.

Sia ora γ è una qualunque curva chiusa semplice che gira intorno all'origine in senso antiorario. Scegliamo $R > 0$ sufficientemente piccolo in modo che la circonferenza γ_R sia tutta contenuta nella regione racchiusa da γ , e indichiamo con Ω la regione delimitata dall'esterno da γ e dall'interno da γ_R . Applicando il teorema di Stokes all'insieme Ω e ragionando come nella prima parte dell'esercizio, si trova che l'integrale di $\mathbf{F}$ su γ è uguale a quello su γ_R .

23. Sappiamo che i campi conservativi hanno integrale nullo sulle curve chiuse, ma questo non aiuta perché un campo conservativo sarebbe anche irrotazionale, mentre l'esercizio chiede di trovarne uno non irrotazionale. Ricordiamo allora il teorema di Stokes, che ci dice che, dato un campo $\mathbf{F}$ e una curva chiusa γ , e indicata con Ω la regione racchiusa da γ , si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dxdy$$

(a patto che $\mathbf{F}$ sia definito in tutto Ω). Per risolvere l'esercizio, basta quindi

(i) trovare una funzione $f(x, y)$ che non sia identicamente nulla, ma che abbia integrale nullo su un opportuno insieme Ω

(ii) trovare un campo $\mathbf{F}$ che abbia per rotore la funzione f trovata in (i).

Questo si può fare in infiniti modi. Per il punto (i) ci si può aiutare con considerazioni di simmetria, si può prendere ad esempio come Ω un cerchio centrato nell'origine e come funzione $f(x, y) = x$. Per il punto (ii) si può scegliere ad esempio $\mathbf{F} = (-xy, 0)$. Tale campo quindi non è irrotazionale, e ha integrale nullo su γ , dove γ è una qualunque circonferenza centrata nell'origine.

24. (a) **VERO** E' stato enunciato a lezione (e segue da un calcolo diretto con un cambio di variabile nell'integrale).
 (b) **FALSO** La lunghezza di una curva è positiva qualunque sia il verso.
 (c) **VERO** Per definizione, l'integrale è dato da una funzione strettamente positiva del parametro t , quindi è positivo.

- (d) **VERO** E' stato dimostrato a lezione
- (e) **FALSO** Un controesempio è quello dell'esercizio 18 (a)
- (f) **VERO** E' un noto corollario della scrittura dell'integrale come differenza di potenziale agli estremi.
- (g) **FALSO** Un controesempio è stato visto nella risposta all'esercizio 18 (a). La proprietà sarebbe vera se si aggiungesse l'ipotesi che γ sia il bordo di un insieme interamente contenuto del dominio di $\mathbf{F}$, o che il dominio di $\mathbf{F}$ sia semplicemente connesso.
- (h) **FALSO** L'integrale è non nullo su almeno una curva chiusa, ma non necessariamente su tutte le curve. Vedere a riguardo l'esercizio 23.
- (i) **VERO** Se un campo non è irrotazionale, allora non è conservativo e quindi (per un teorema enunciato a lezione) non può avere lo stesso integrale su tutte le coppie di curve con gli stessi estremi.
- (j) **FALSO** Se si prende una qualunque funzione f definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, di classe C^1 e si pone $\mathbf{F} = \nabla f$, si ottiene un campo $\mathbf{F}$ definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e conservativo. (cf. anche il campo dell'esercizio 18(b)).
- (k) **VERO** Le ipotesi dicono che $\mathbf{F}$ è irrotazionale e definito ovunque. Per i teoremi visti nel corso, un tale campo è conservativo e il suo integrale su una qualunque curva chiusa è nullo.