UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi dell'1.XII.2018

1. Il tetraedro Ω può essere descritto come insieme normale rispetto all'asse z, al modo seguente

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1 - x - y\},$$

dove abbiamo indicato con T il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$ nel piano. T a sua volta si può scrivere come

$$T = \{(x, y) \ : \ x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

(a) Calcoliamo dapprima il volume:

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega dx\,dy\,dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(oppure si può usare la nota proprietà che il volume di un tetraedro è dato dall'area della base per l'altezza diviso tre). Pertanto

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 6 \iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz \\ &= 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1 - x - y)\,dy = 3 \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Con un calcolo analogo si trova che anche le coordinate $\bar{y}$ e $\bar{z}$ valgono $1/4$ (come si può dedurre anche dalla simmetria del dominio).

(b) Troviamo

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y + z)\right) dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right) dy = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \left(1 - \sin\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{4}{\pi^2}(\pi - 2).$$

2. Per tutti gli insiemi proposti θ varia in $[0, 2\pi]$, mentre ρ, z variano come segue:

(a) (i) $z \in [-R, R], \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in [-\sqrt{R^2 - \rho^2}, \sqrt{R^2 - \rho^2}]$

(b) (i) $z \in [0, R], \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in [0, \sqrt{R^2 - \rho^2}]$

(c) (i) e (ii): $z \in [0, h], \rho \in [0, R]$

(d) (i) $z \in [0, h], \rho \in \left[0, R - \frac{R}{h}z\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[0, h - \frac{h}{R}\rho\right]$.

(e) (i) $z \in [0, h], \rho \in \left[0, \frac{R}{h}z\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[\frac{h}{R}\rho, h\right]$.

3. Integrando in coordinate cilindriche, in uno dei due modi descritti sopra, si trova:

   (i) Il volume vale rispettivamente (b) $\frac{2}{3}\pi R^3$, (c) $\pi R^2 h$, (d) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

   (ii) Il baricentro ha coordinate rispettivamente (b) $(0,0,\frac{3}{8}R)$, (c) $(0,0,\frac{h}{2})$, (d) $(0,0,\frac{1}{4}h)$.

   (iii) Il momento d'inerzia vale rispettivamente (b) $\frac{4}{15}\pi R^5$, (c) $\frac{\pi}{2}R^4 h$, (d) $\frac{\pi}{10}R^4 h$.

4. In tutti i casi ρ varia in $[0,1]$, mentre θ e ϕ hanno le seguenti limitazioni.

   (a) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi]$
   (b) $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [\pi/2, \pi]$
   (c) $\theta \in [-\pi/2, 0]$, $\phi \in [0,\pi]$
   (d) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi/2]$
   (e) $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi/2]$.

   NB sono corrette anche le risposte ottenute aggiungendo a entrambi gli estremi un multiplo intero di 2π; tutte le altre sono sbagliate (ad es., se la risposta giusta è $\theta \in [-\pi/2, 0]$, va ugualmente bene $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$, mentre risposte quali $\theta \in [0, 3\pi/2]$, o $\theta \in [3\pi/2, 0]$ o ancora $\theta \in [-\pi/2, 2\pi]$ sono sbagliate); l'unica eccezione è naturalmente il caso di $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $[0, 2\pi]$ può essere sostituito da un qualunque altro intervallo della stessa ampiezza.

5. Conviene usare le coordinate sferiche, rispetto alle quali il dominio corrisponde a $\rho \in [0,3], \theta \in [0,\pi/2], \phi \in [0,\pi/2]$. Pertanto la massa è data da

$$\iiint_\Omega (1+x+y)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} (1+\rho\sin\phi(\cos\theta+\sin\theta))(\rho^2\sin\phi)\,d\theta$$
$$= \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\rho^2\sin\phi + 2\rho^3\sin^2\phi\right) d\phi$$
$$= \int_0^3 \left(\frac{\pi}{2}\rho^2 + \frac{\pi}{2}\rho^3\right) d\rho = \frac{117}{8}\pi.$$

6. Indichiamo con δ la densità (costante) del cilindro e con h la sua altezza (che non sono note, ma si vedrà che il loro valore non influirà sul risultato finale). Si trova che la massa del cilindro vale $25\pi\delta h$ e il momento d'inerzia $\frac{625}{2}\pi\delta h$. D'altra parte sappiamo che la massa vale 4, quindi $\pi\delta h = 4/25$, da cui si deduce che il momento d'inerzia vale 50.

7. In tutti gli esempi proposti, è sottinteso che l'angolo θ varia in tutto $[0, 2\pi]$. In alcuni casi, occorre dividere il dominio in due parti in cui gli estremi hanno espressioni diverse.

   (i) (a) $0 \le z \le \frac{R}{\sqrt{1+a^2}}$, $\quad 0 \le \rho \le az$, $\quad$ unito a $\quad \frac{R}{\sqrt{1+a^2}} \le z \le R$, $\quad 0 \le \rho \le \sqrt{R^2 - z^2}$.
   (b) $0 \le \rho \le \frac{aR}{\sqrt{1+a^2}}$, $\quad \frac{\rho}{a} \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}$.
   (c) $0 \le \phi \le \operatorname{arctg} a$, $\quad 0 \le \rho \le R$.

   (ii) (a) $0 \le z \le \frac{R}{\sqrt{1+a^2}}$, $\quad az \le \rho \le \sqrt{R^2 - z^2}$,
   (b) $0 \le \rho \le \frac{aR}{\sqrt{1+a^2}}$, $\quad 0 \le z \le \frac{\rho}{a}$, $\quad$ unito a $\quad \frac{Ra}{\sqrt{1+a^2}} \le \rho \le R$, $\quad 0 \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}$.
   (c) $\operatorname{arctg} a \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le \rho \le R$.

(iii) (a) $-\sqrt{R^2-r^2} \le z \le \sqrt{R^2-r^2}, \quad r \le \rho \le \sqrt{R^2-z^2}.$

(b) $r \le \rho \le R, \qquad -\sqrt{R^2-\rho^2} \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}.$

(c) $\operatorname{arcsen}\frac{r}{R} \le \phi \le \pi - \operatorname{arcsen}\frac{r}{R}, \quad \frac{r}{\operatorname{sen}\phi} \le \rho \le R.$

(iv) (a) $0 \le z \le \sqrt{R^2-r^2}, \quad 0 \le \rho \le r,$ unito a $\sqrt{R^2-r^2} \le z \le R, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{R^2-z^2}.$

(b) $0 \le \rho \le r, \qquad 0 \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}.$

(c) $0 \le \phi \le \operatorname{arcsen}\frac{r}{R}, \quad 0 \le \rho \le R,$ unito a $\operatorname{arcsen}\frac{r}{R} \le \phi \le \pi/2, \quad 0 \le \rho \le \frac{r}{\operatorname{sen}\phi}.$

(v) (a) $r \le z \le R, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{R^2-z^2}.$

(b) $0 \le \rho \le \sqrt{R^2-r^2}, \qquad r \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}.$

(c) $0 \le \phi \le \arccos\frac{r}{R}, \quad \frac{r}{\cos\phi} \le \rho \le R.$

(vi) (a) $0 \le z \le \frac{R}{2}, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{2Rz-z^2},$ unito a $\frac{R}{2} \le z \le R, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{R^2-z^2}.$

(b) $0 \le \rho \le \frac{\sqrt{3}}{2}R, \qquad R-\sqrt{R^2-\rho^2} \le z \le \sqrt{R^2-\rho^2}.$

(c) $0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, \quad 0 \le \rho \le R,$ unito a $\frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 2R\cos\phi.$

(vii) (a) $0 \le z \le \frac{2R}{a^2+1}, \quad 0 \le \rho \le az,$ unito a $\frac{2R}{a^2+1} \le z \le 2R, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{2Rz-z^2}.$

(b) $0 \le \rho \le \frac{2aR}{a^2+1}, \qquad \frac{\rho}{a} \le z \le R+\sqrt{R^2-\rho^2}.$

(c) $0 \le \phi \le \operatorname{arctg} a, \quad 0 \le \rho \le 2R\cos\phi.$

8. I volumi si possono calcolare utilizzando le coordinate sferiche oppure quelle cilindriche, come descritto sotto. In alcuni casi è conveniente dividere il dominio in due parti uguali e limitarsi a studiarne una, moltiplicando il volume ottenuto per due.

(i) $m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/4} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)$, oppure

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1).$$

(ii) $m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{2}{3}\pi$, oppure

$$m(\Omega) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \int_{\sqrt{3}z}^{\sqrt{1-z^2}} \rho \, d\rho = \frac{2}{3}\pi.$$

(iii) $m(\Omega) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\phi \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}}^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho = 4\sqrt{3}\pi$, oppure

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho = 4\sqrt{3}\pi.$$

(iv) $m(\Omega) = 2\int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho$

$= \frac{16}{3}\pi(2-\sqrt{2}) + \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi(4-\sqrt{2})$, oppure

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{8}{3}\pi(4-\sqrt{2}).$$

(v) $m(\Omega) = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-\frac{1}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho$

$= 8\pi + \pi = 9\pi$, oppure

$$m(\Omega) = \int_{-1}^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho d\rho = \int_{-1}^2 \pi(4-z^2)dz = 9\pi,$$

o ancora, usando coord. sferiche per una parte e cilindriche per l'altra:

$$m(\Omega) = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-\sqrt{3}z} \rho d\rho = 8\pi + \pi = 9\pi.$$

(vi) In coordinate sferiche centrate in $(0,0,1)$ troviamo

$$m(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{1}{\cos\phi}}^{\sqrt{2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

oppure, in coordinate cilindriche,

$$m(\Omega) = \int_{1-\sqrt{2}}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z-1)^2}} \rho d\rho = \int_{1-\sqrt{2}}^0 \pi[2-(z-1)^2] \, dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

o ancora, scrivendo Ω come differenza di un settore sferico e di un cono, e usando coordinate sferiche per il primo e cilindriche per il secondo:

$$m(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho - \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} \rho \, d\rho = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\pi - \frac{\pi}{3}.$$

(vii) $m(\Omega) = \int_0^{\pi/3} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5}{12}\pi$, oppure

$$m(\Omega) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \rho \, d\rho = \frac{5}{12}\pi.$$

(viii) $m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} d\phi \int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho = \frac{14}{3}\pi$, oppure

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\sqrt{3}\rho}^{2+\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{14}{3}\pi.$$

9. Possiamo integrare per strati, osservando che lo strato di altezza z è dato da $\Omega_z = C(\sqrt{4-z^2})$ (cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{4-z^2}$) per $z \in [-1,0]$. Quindi la massa di Ω si può calcolare al modo seguente

$$\iiint_\Omega (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^0 dz \int_{C(\sqrt{4-z^2})} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy$$

$$= \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (1+\rho^2+z^2)\rho \, d\rho = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(-z^4-2z^2+24) \, d\theta = \frac{347}{30}\pi.$$

Oppure si può scrivere Ω come unione di un settore sferico Ω_1 e in un cono Ω_2, usando coordinate sferiche su Ω_1

$$\iiint_{\Omega_1} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (1+\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta = \frac{136}{15}\pi,$$

e cilindriche su Ω_2

$$\iiint_{\Omega_2} (1+x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{0} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\sqrt{3}z}} (1+\rho^2+z^2)\rho\,d\rho = \frac{5}{2}\pi.$$

Sommndo i contributi, si ottiene il risultato di $\frac{347}{30}\pi$ già ottenuto con l'altro metodo.

10. Si tratta di un solido di rotazione intorno all'asse z, quindi le coordinate x e y del baricentro sono zero per simmetria. Possiamo procedere in vari modi (come nel caso dell'esercizio 8-(vi), in cui si considera un solido molto simile). Usando ad esempio le coordinate cilindriche, troviamo che il volume vale

$$m(\Omega) = \int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} \rho d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi[2-(z+1)^2]\,dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

mentre l'integrale di z vale

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} z\rho d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi z[2-(z+1)^2]\,dz = \frac{\pi}{3}\left(\frac{23}{4}-4\sqrt{2}\right).$$

Quindi la coordinata z del baricentro vale

$$\bar{z} = \frac{\frac{23}{4}-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-5} = \frac{3}{4(4\sqrt{2}-5)} - 1.$$

11. In coordinate sferiche il dominio è descritto dalle limitazioni $\rho \in [0,2], \theta \in [0,2\pi], \phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pertanto il momento d'inerzia è dato da

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2\phi)(\rho^2 \sin\phi)\,d\phi \\ = &\int_0^2 \rho^4\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{2}}{12} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

oppure in coordinate cilindriche

$$\int_0^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (16-8z^2)\,dz = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

12. Osserviamo che Ω_0 è simmetrico rispetto ai piani $x=0$ e $y=0$ (ma non rispetto a $z=0$). Pertanto funzioni dispari rispetto a x e/o rispetto a y hanno integrale nullo. Funzioni positive (risp. negative) su tutto Ω_0 hanno invece sicuramente integrale positivo (risp. negativo). Per brevità, nelle risposte chiamiamo "positive su Ω_0" anche funzioni che valgono zero su un sottoinsieme di misura nulla e sono strettamente positive sul resto di Ω_0 (es. la funzione x). Troviamo nei vari casi
(i) Ha integrale positivo, pari al volume di Ω_0.
(ii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(iii) Ha integrale positivo (perché z è positiva su Ω_0).
(iv) Ha integrale positivo (perché y^2 è positiva su Ω_0).

(v) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(vi) Ha integrale positivo, perché $x^2 z$ è positiva su Ω_0.
(vii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(viii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a y).
(ix) Ha integrale positivo, perché xy è compreso tra -1 e 1 su Ω_0, e il coseno di una quantità tra -1 e 1 è positivo.
(x) La funzione non è dispari né rispetto a x né rispetto a y; tuttavia soddisfa $f(-x,-y) = -f(x,y)$, cioè cambia segno rispetto alla trasformazione $(x,y) \to (-x,-y)$. Poiché Ω_0 è invariante rispetto a questa trasformazione, cioè vale $(x,y,z) \in \Omega$ se e solo se $(-x,-y,z) \in \Omega$, si ha che l'integrale è nullo.
(xi) Il termine x^3 è dispari e quindi dà contributo nullo all'integrale. Il termine $z^3 - z$ è invece negativo per $z \in [0,1]$, come avviene nei punti di Ω_0. L'integrale di f quindi è negativo.
(xii) La funzione non è dispari né rispetto a x né rispetto a y; tuttavia soddisfa $f(y,x) = -f(x,y)$, cioè cambia segno rispetto alla trasformazione $(x,y) \to (y,x)$. Poiché Ω_0 è invariante rispetto a questa trasformazione, cioè $(x,y,z) \in \Omega$ se e solo se $(y,x,z) \in \Omega$, l'integrale è nullo.

13. Osserviamo che il dominio è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati, in particolare rispetto a $x = 0$ e a $z = 0$, quindi i termini x e z^3 hanno integrale nullo perché funzioni dispari. E' sufficiente quindi integrare il solo termine y^2. E' possibile integrare per strati:

$$\iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2-z^2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}\left[(2-z^2)^2 - 1\right] dz = \frac{14}{15}\pi.$$

In alternativa, è possibile scrivere il dominio come $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ dove Ω_1 si scrive in coordinate sferiche come
$$\Omega_1 = \left\{(\rho,\theta,\phi) \ : \ 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3}{4}\pi\right\}$$
mentre Ω_2 si scrive in coordinate cilindriche come
$$\Omega_2 = \left\{(\rho,\theta,z) \ : \ -1 \le z \le \sqrt{1},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ |z| \le \rho \le 1\right\}.$$

Gli integrali valgono rispettivamente

$$\iiint_{\Omega_1} y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\,d\rho$$
$$= \frac{4}{5}\sqrt{2}\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{sen}^3\phi\,d\phi = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\iiint_{\Omega_2} y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|z|}^{1} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}(1 - z^4)\,dz = \frac{2}{5}\pi.$$

Sottraendo i due risultati si trova il valore dell'integrale su Ω.

14. Il termine x ha integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate sferiche,

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\
= &\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho \\
= &\frac{32}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (\pi \operatorname{sen}^2\phi + 2\pi\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\, d\phi = \frac{104}{15}\pi.
\end{aligned}$$

15. I termini xe^y e z^3 hanno integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate cilindriche,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\, d\rho$$
$$= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4}\left[(4-z^2)^2 - 9\right] dz = \frac{34}{15}\pi.$$