UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi dell'11.XI.2018

1. Gli integrali richiesti valgono:

$$(a)\ \frac{1}{3}+\frac{\pi^2(1-e^{-3})}{24} \qquad (b)\ \frac{2}{3} \qquad (c)\ \frac{e^5-e^4-e+1}{2} \qquad (d)\ \frac{e^2+3e^{-2}}{4} \qquad (e)\ \frac{4}{15}.$$

2. (a) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}dx\int_0^{-2x}(1-xy)\,dy\left(\text{ oppure }\int_0^2 dy\int_{-1}^{-\frac{y}{2}}(1-xy)\,dx\right)=\frac{3}{2}.$$

(b) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^3 dx\int_{\frac{x}{3}-1}^{-\frac{2}{3}x+2}(2x-3y)\,dy=\frac{9}{2}\quad\text{oppure}$$
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}dy\int_0^{3y+3}(2x-3y)\,dx+\int_0^2 dy\int_0^{-\frac{3}{2}y+3}(2x-3y)\,dx=\frac{9}{2}.$$

(c) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}dx\int_{2x}^{-x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(x+y)\,dy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{0}\left(\cos\frac{3}{2}\pi x-1\right)\,dx=-\frac{4+6\pi}{3\pi^2}.$$

(d) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{\frac{x}{2}}(1+x)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\frac{x}{2}}(1+x)dy=8,\ \text{oppure}$$
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}dy\int_{-y}^{y+2}(1+x)dx+\int_0^2 dy\int_{2y}^{y+2}(1+x)dx=8.$$

(e) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_{-1}^{3-2y}(x-y)\,dx=\int_0^1(4y^2-10y+4)\,dy=\frac{1}{3}$$

(f) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-2}^{x+3}(y+x^2)\,dy=\int_{-1}^{0}(\frac{5}{2}+x+5x^2+2x^3)dx=\frac{19}{6}.$$

(g) Scrivendo Ω come insieme normale in coordinate cartesiane si trova:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(x+y)\,dy\left(\text{ oppure }\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(x+y)\,dx\right)=\frac{16}{3}.$$

oppure, più rapidamente, usando le coordinate polari:

$$\int_0^2 d\rho\int_0^\pi \rho^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,d\theta=\int_0^2 2\rho^2\,d\rho=\frac{16}{3}$$

(h) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_1^4 dx\int_0^{1/x}(2x+3xy)dy=6+3\ln 2.$$

(i) $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{2}dx\int_0^{1+x^2}(x-y)dy=-\frac{51}{20}.$$

(j) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x-y)\,dy + \int_0^1 dx \int_x^1 (y-x)\,dy = \frac{11}{60}.$

(k) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} \frac{x^2}{(y+1)^2}\,dy$

$\displaystyle = \int_{-1}^3 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2} + 1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = 6 - \arctan 3 - \frac{\pi}{4} - 2\ln 5.$

(l) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 dx \int_{x^2+3}^{4x} \frac{x}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{8}{5}(9\sqrt{3}-1) - \frac{16}{3}(3\sqrt{3}-1).$

3. Per trovare il baricentro vanno calcolati tre integrali su Ω (talvolta alcuni possono essere dedotti da proprietà di simmetria); indichiamo l'impostazione solo nel caso del calcolo dell'area. Usiamo la notazione $|\Omega|$ per l'area di Ω e $(\bar{x},\bar{y})$ per il baricentro.

(a) $\displaystyle |\Omega| = \int_0^1 dx \int_{x^2-x}^0 dy = \frac{1}{6}, \qquad (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\right).$

(b) $\displaystyle |\Omega| = \int_{-2}^2 dy \int_{2y^2}^{y^2+4} dx = \frac{32}{3}, \qquad (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{16}{5}, 0\right).$

(c) $\displaystyle |\Omega| = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{\sqrt{5-x^2}} dy = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 2\ln 2, \qquad (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{1}{3|\Omega|}, \frac{1}{3|\Omega|}\right).$

(ricordiamo che $\displaystyle\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-x^2} + \frac{\sqrt{a}}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}$).

(d) Ω è la differenza di due semicerchi di raggio 2 e di raggio 1. Ricordando la formula per l'area del cerchio, troviamo dapprima

$$|\Omega| = \frac{1}{2}(4\pi) - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

La coordinata $\bar{x}$ è nulla per simmetria. Per calcolare $\bar{y}$ possiamo scrivere Ω come dominio normale, al modo seguente

$$\bar{y} = \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{-1}\left(\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy - \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right) = \frac{28}{9\pi},$$

oppure, più rapidamente, usando le coordinate polari,

$$\bar{y} = \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi d\theta \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\theta\,d\rho = \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi \frac{7}{3}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{28}{9\pi}.$$

4. Risolviamo gli integrali passando in coordinate polari. In tutti gli esercizi considerati, è possibile invertire l'ordine di integrazione tra ρ e θ senza sostanziali differenze nella lunghezza del calcolo.

(a) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^2 2\rho^2(\cos\theta + \sin\theta)\,d\rho = \frac{32}{3}.$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^3\cos^2\theta - \rho^2\cos\theta)\,d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}.$

NB è sbagliato mettere come estremi $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$ oppure $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta$.

(c) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 (1-\rho^2\cos\theta\sin\theta)\rho\,d\rho = \frac{9}{4}\pi - \frac{81}{8}.$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)d\theta = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1).$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (2\rho^2+\rho\sin\theta)\rho d\rho = 65\pi.$

(f) Usando coordinate polari centrate in $(1,1)$, cioè $x = 1+\cos\theta$, $y = 1+\sin\theta$, si ottiene

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2+\rho(\cos\theta+\sin\theta))\rho\,d\rho = 2\pi.$$

(g) Usiamo coordinate polari centrate in (x_0,y_0), cioè $x = x_0+\rho\cos\theta$, $y = y_0+\rho\sin\theta$:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (x_0+\rho\cos\theta-y_0-\rho\sin\theta)\rho d\rho = \pi(x_0-y_0)$$

5. Osserviamo che T e S non hanno punti interni in comune, quindi possiamo calcolare separatamente i due contributi. Usando coordinate cartesiane per T e polari per S, troviamo

$$\iint_T (2-xy)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{y}{2}} (2-xy)\,dx = \frac{9}{2},$$

$$\iint_S (2-xy)\,dx\,dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_0^1 [2-\rho\cos\theta(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta+1)]\rho\,d\rho = \pi + \frac{2}{3}$$

e concludiamo che l'integrale richiesto vale $\displaystyle\frac{9}{2}+\pi+\frac{2}{3} = \pi+\frac{31}{6}.$

6. Abbiamo $m(T\cup S) = m(T)+m(S) = 2+2\pi$. Si ha $\bar{x}=0$ perché la figura è simmetrica rispetto all'asse y. Per quanto riguarda l'altra coordinata, calcoliamo

$$\iint_T y\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} y\,dx = \int_0^1 4y^2 dy = \frac{4}{3}.$$

$$\iint_S y\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^2 (1+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\rho\,d\rho = \int_0^\pi \left(2+\frac{8}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta = 2\pi + \frac{16}{3},$$

da cui segue

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{3}+2\pi+\frac{16}{3}}{2+2\pi} = \frac{10+3\pi}{3(1+\pi)}.$$

7. Abbiamo $m(T \cup S) = m(T) + m(S) = 6 + \pi$. Inoltre

$$\iint_T x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{3-x} x\,dy = \int_{-1}^{1} x(3-x)\,dx = -\frac{2}{3}.$$

$$\iint_T y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{3-x} y\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{(3-x)^2}{2}\,dx = \frac{28}{3}.$$

$$\iint_S x\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta\,d\rho = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{2}{3}\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = \frac{4}{3},$$

$$\iint_S y\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (3 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\rho\,d\rho = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(3 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta = 3\pi + \frac{4}{3},$$

da cui segue

$$\bar{y} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}{6+\pi} = \frac{2}{3(6+\pi)}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{28}{3} + 3\pi + \frac{4}{3}}{6+\pi} = \frac{32 + 9\pi}{3(6+\pi)}.$$

8. (a) Scriviamo Ω come differenza di un settore circolare e di un triangolo:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho - \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{3}y}^{\sqrt{3}y} (x^2+y^2)\,dx = \frac{8}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

(b) Scriviamo Ω come differenza di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(0,-1)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left[\rho^2\cos^2\theta + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta - 1)^2\right]\rho\,d\rho - \int_{-1}^{0} dy \int_{-y-1}^{y+1} (x^2+y^2)\,dy \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right] d\theta - \int_{-1}^{0} \left[\frac{2}{3}(y+1)^3 + 2y^2(y+1)\right] dy \\
&= \pi - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \pi - 3.
\end{aligned}$$

(c) Scriviamo Ω come differenza di un quarto di cerchio e di un triangolo:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \rho d\rho - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^2\,dy = \frac{\pi}{8}$$

(d) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(0,1)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^3(1+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2\rho^2(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta) + \rho) d\rho \\
&\quad + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3}(y-1)}^{\sqrt{3}(1-y)} (x+y)^2\,dx = 8\pi + \frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{6}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

(e) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(-1,0)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1)\rho\,d\rho + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 (x^2+y^2)\,dy \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cos\theta\right) d\theta + \int_{-1}^0 -\frac{4}{3}x^3\,dx = \frac{2}{3} + \frac{9}{8}\pi + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

9. Negli esercizi di questo gruppo, la descrizione del dominio in coordinate polari centrate in $(0,0)$ è meno facile che negli esercizi precedenti, e richiede che una delle due coordinate abbia estremi variabili in funzione dell'altra. In alcuni casi, altre scelte potrebbero apparire a prima vista più naturali (ad es. in (i) le coordinate cartesiane, in (iii) le coordinate polari traslate, ecc.), però la scelta delle coordinate centrate in $(0,0)$ semplifica la forma della funzione integranda e porta a calcoli più rapidi.

(a)

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{1/\cos\theta} \frac{(\rho\cos\theta)^2}{\rho^3}\rho\,d\rho = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta d\theta = \sqrt{2}.$$

(b) Conviene dividere il dominio in due parti, sopra e sotto la retta $y = x$, trovando

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos\theta} d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^{1/\operatorname{sen}\theta} d\rho = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\pi}{2}.$$

(notare che la funzione integranda si semplifica con lo jacobiano delle coordinate polari).

(c)

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2\,d\rho = \frac{32}{9}.$$

(d) Conviene dividere il dominio in due parti, sopra e sotto la retta $y = x$. Troviamo

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\rho \\ &= \int_0^{\pi/4} 4\cos\theta\operatorname{sen}^5\theta d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\cos^5\theta\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(e) Essendo $f = 1$, l'integrale in questo caso coincide con l'area di Ω. Poiché Ω è simmetrico rispetto all'asse x, possiamo limitarci a considerare la metà con $y \geq 0$ e moltiplicare per due. In coordinate polari, tale insieme corrisponde a

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \rho \leq \min\{\,1, 2\cos\theta\,\}.$$

Osservando che

$$\min\{\,1, 2\cos\theta\,\} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta \leq \pi/3 \\ 2\cos\theta & \text{se } \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2, \end{cases}$$

troviamo

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= 2\int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho + 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\,d\rho \\
&= \frac{\pi}{3} + 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

10. Indichiamo con $(\bar{x}, \bar{y})$ le coordinate del baricentro di Ω e con $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ le coordinate del baricentro di Ω_i, per $i = 1, 2$. Cerchiamo di scrivere $\bar{x}$ in termini di $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ usando la definizione e la proprietà additiva degli integrali.

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\iint_\Omega x\,dxdy}{m(\Omega)} = \frac{\iint_{\Omega_1} x\,dxdy + \iint_{\Omega_2} x\,dxdy}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} \\
&= \frac{\iint_{\Omega_1} x\,dxdy}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} + \frac{\iint_{\Omega_2} x\,dxdy}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} \\
&= \frac{m(\Omega_1)}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} \frac{\iint_{\Omega_1} x\,dxdy}{m(\Omega_1)} + \frac{m(\Omega_2)}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} \frac{\iint_{\Omega_2} x\,dxdy}{m(\Omega_2)} \\
&= \frac{m(\Omega_1)}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} \bar{x}_1 + \frac{m(\Omega_2)}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)} \bar{x}_2.
\end{aligned}
$$

Se poniamo

$$
t = \frac{m(\Omega_2)}{m(\Omega_1) + m(\Omega_2)},
$$

l'uguaglianza si può scrivere come

$$
\bar{x} = (1-t)\bar{x}_1 + t\bar{x}_2.
$$

Con un calcolo analogo si trova che $\bar{y} = (1-t)\bar{y}_1 + t\bar{y}_2$, per lo stesso valore di t. Ricordando l'equazione del segmento che unisce due punti, e osservando che il t definito sopra soddisfa $0 < t < 1$, concludiamo che $(\bar{x}, \bar{y})$ appartiene al segmento che unisce $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$.