

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 24.X.2018

- Il punto P_1 non appartiene a Γ . Il punto P_2 appartiene, ma non è regolare. Il punto P_3 appartiene, si può applicare il teor. di Dini e la retta tangente ha equazione $x + y = 1$.
 - Solo P_3 appartiene a Γ ; è regolare e la retta tangente ha equazione $-x + 4y = 6$.
 - I punti P_1, P_2 appartengono a Γ . P_1 non è regolare, mentre P_2 lo è e la retta tangente ha equazione $y = 0$.
 - I punti P_2 e P_3 appartengono alla curva e sono entrambi regolari; le rette tangenti sono rispettivamente $11x + 6y = 23$ e $11x - 6y = 23$.
- Posto $F(x, y) = x^4 - y^2$, si ha che $\nabla F(x, y) = (0, 0)$ solo per $(x, y) = (0, 0)$, che non appartiene a Γ . Quindi γ è regolare.
 - F è la stessa di (a), ma stavolta $(0, 0)$ appartiene a Γ . Quindi nel punto $(0, 0)$ non è assicurata l'esistenza della tangente e la curva non è regolare.
 - Posto $F(x, y) = x^2 - 4x + 4y^2$, si ha che ∇F si annulla solo per $(x, y) = (2, 0)$. Poiché tale punto non appartiene alla curva, la curva è regolare.
 - Posto $F(x, y) = y^4 + x^2 + 4x$, si ha che ∇F si annulla solo per $(x, y) = (-2, 0)$. Poiché tale punto non appartiene alla curva, la curva è regolare.
- $\max f = 1, \min f = -\frac{5}{4}$;
 - $\max f = \sqrt[4]{2}, \min f = -\sqrt[4]{2}$;
 - $\max f = 3, \min f = -3$;
 - $\max f = 29, \min f = -11$;
 - $\max f = 58, \min f = -6$.
- Poiché per ipotesi C non è limitato, esistono punti di C con distanza arbitrariamente grande dall'origine; essendo $f(x, y)$ il quadrato della distanza dall'origine, deduciamo che $\sup f = +\infty$. Per mostrare che esiste il minimo di f , ci riconduciamo al caso di un insieme compatto col procedimento seguente. Fissato $R > 0$, poniamo $C_R = C \cap \overline{B_R}$, dove $\overline{B_R}$ è la sfera chiusa di centro l'origine e raggio R . Se R è scelto abbastanza grande, C_R è non vuoto; inoltre C_R è limitato ed è chiuso, in quanto intersezione di due insiemi chiusi. Quindi f possiede minimo su C_R per il teorema di Weierstrass. Poiché si ha $f \leq R^2$ su C_R , mentre $f(x, y) > R^2$ se $(x, y) \in C \setminus C_R$, deduciamo che il minimo di f su C_R è un minimo anche rispetto a tutto l'insieme C .

5. Ponendo ad esempio $(x_n, y_n) = (n, n^2 - n - 1)$, si ha che $(x_n, y_n) \in \Gamma$ e che $f(x_n, y_n) \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$, quindi $\sup_{\Gamma} f = +\infty$. L'esistenza del minimo segue dall'esercizio precedente. Il minimo può essere cercato col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trova che è assunto per $(x, y) = (-1/2, -1/4)$ e vale $5/16$.
6. (a) $\max f = 4, \min f = 0$;
 (b) $\max f = 4, \min f = -4$;
 (c) $\max f = \sqrt{2}, \min f = -\sqrt{2}$;
 (d) $\max f = \frac{1}{4}, \min f = -12$;
 (e) $\max f = 1, \min f = 0$ (NB f è costante sul bordo del cerchio, quindi tutti i punti del bordo sono punti critici vincolati).
7. (a) Il punto $(0, 0)$ è di minimo locale per f ;
 (b) $\max_C f = 113, \min_C f = -15$.
8. Se $R \leq 5/2$, allora $\max f = -R^2 + 5R, \min f = -R^2 - 5R$. Se $R \geq 5/2$, allora $\max f = 25/4, \min f = -R^2 - 5R$.
9. (a) $\max_{\Gamma} f = 10, \min_{\Gamma} f = -10$
 (b) $\max_K f = 10, \min_K f = -10$
 (c) $\max_C f = 3 + 4\sqrt{3}, \min_C f = -10$.
10. (a) $\max_{\Gamma} f = 1/2, \min_{\Gamma} f = -4$
 (b) $\max_K f = 1/2, \min_K f = -4$
 (c) $\max_C f = 0, \min_C f = -4$.
11. (a) $\max f = -1/2, \min f = -4$
 (b) $\max f = 6, \min f = 3/4$
 (c) $\max f = 1, \min f = -1$
 (d) $\max f = 3, \min f = 18 - 12\sqrt{2}$
 (e) $\max f = 2, \min f = -\sqrt{2}$;
 (f) $\max f = 2\sqrt{5}, \min f = -2\sqrt{5}$;
 (g) $\max f = 0, \min f = -4$;
 (h) $\max f = 14 + \sqrt{3}, \min f = 4\sqrt{3}$.
12. (a) $\max f = 9, \min f = 0$;
 (b) $\max f = 9, \min f = 0$.
13. (a) $\max f = 2, \min f = 0$;
 (b) $\max f = \frac{1}{2}, \min f = -\frac{1}{2}$.