

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) ai quesiti degli esercizi del 12.X.2018

1. (a) Ω è aperto, $\partial\Omega = \{0, 1, 2\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$, $\overline{\Omega} = [0, 1] \cup [2, +\infty)$.
(b) Ω né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \{0, 1\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = (0, 1)$, $\overline{\Omega} = [0, 1]$.
(c) Ω è chiuso, $\partial\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = (0, 1) \cup (3, \infty)$, $\overline{\Omega} = \Omega$.
(d) Ω né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \overline{\Omega} = \Omega \cup \{0\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.
(e) Ω né aperto né chiuso, $\overset{\circ}{\Omega} = (0, 1) \times (0, 1)$, $\overline{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$,
 $\partial\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ o } y = 1\} \cup \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ o } x = 1\}$, cioè
 $\partial\Omega$ è l'unione dei quattro lati del quadrato.
(f) Ω è chiuso, $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (1, 3], y = 0\}$,
 $\overset{\circ}{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $\overline{\Omega} = \Omega$.
(g) Ω né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \overline{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.
(h) Ω né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \overline{\Omega} = \Omega \cup \{(x, y) : x = 0, y \in [-1, 1]\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.
2. Se $x_0 \notin \Omega$ è di frontiera per Ω , ogni suo intorno sferico contiene punti di Ω , che quindi sono diversi da x_0 stesso perché x_0 non appartiene a Ω . Quindi è soddisfatta la proprietà che definisce i punti di accumulazione.
Viceversa, se $x_0 \notin \Omega$ è di accumulazione per Ω , ogni suo intorno sferico contiene punti di Ω (per definizione di punti di accumulazione) e non di Ω (x_0 stesso) quindi è soddisfatta la proprietà di punto di frontiera.
3. La dimostrazione è analoga al caso unidimensionale. La funzione f è continua sull'insieme chiuso e limitato D , quindi assume massimo e minimo su D . Se la funzione è costante su D , allora banalmente ogni punto $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ soddisfa la tesi. Se la funzione non è costante su D , allora almeno uno tra il massimo e il minimo sarà diverso dal valore costante assunto su ∂D , e quindi sarà raggiunto in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{D}$. In tale punto la f ha gradiente nullo per il teorema di Fermat, essendo un punto di massimo/minimo assunto nell'interno di D .
4. La funzione f è continua sull'insieme chiuso e limitato D , quindi assume massimo e minimo su D . Dalle ipotesi sul segno di f segue che il minimo è zero, ed è assunto su tutti i punti di frontiera, mentre il massimo è positivo ed è assunto in uno o più punti interni a D , che quindi devono essere critici per f . Poiché per ipotesi non ci sono punti critici interni di f interni a D oltre a x_0 , l'unica possibilità è che il massimo di f su D cada in x_0 . Essendo x_0 interno a D , esiste un intorno $B_d(x_0)$ contenuto in D , pertanto vale

$$f(x) \leq \max_D f = f(x_0), \quad \forall x \in B_d(x_0),$$

cioè x_0 è un punto di massimo relativo per f .

5. Piano tangente: $z = \frac{1}{4}(13x - 5y - 7)$; la derivata direzionale vale $3/4$.
6. Iperpiano tangente: $w = -x + 3y - 9z + 14$; la derivata direzionale vale 15 .
7. Per $(x, y) \neq (0, 0)$ la funzione è di classe C^∞ e le sue derivate parziali prime si calcolano nel modo usuale, trovando:

$$f_x = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad f_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nel punto $(0, 0)$ invece, studiando il limite del rapporto incrementale, si trova

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Un calcolo analogo mostra che anche $f_y(0, 0)$ esiste e vale zero.

Studiando il limite di $f(x, y)$ su una retta per l'origine $y = ax$, si trova

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax) = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Poiché il limite è diverso da zero per tutte le rette con $a \neq 0$, concludiamo che la funzione non è continua.

La non continuità implica la non differenziabilità. Pertanto f_x e f_y non possono essere continue in $(0, 0)$, altrimenti ci sarebbe una contraddizione col teorema del differenziale totale. Ciò si verifica anche direttamente, studiando il limite sulle rette, ad es.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(a^2 - 1)}{x(1 + a^2)^2} = \pm\infty.$$

8. Presa una qualunque direzione $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, si trova

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(at, bt) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^3 bt}{a^6 t^4 + b^2} = 0.$$

D'altra parte, studiando il limite lungo la curva $y = ax^3$, troviamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^3) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0),$$

quindi f non è continua.

9. La funzione di una variabile $\alpha \rightarrow \sqrt{\alpha}$ è continua per $\alpha \in [0, +\infty)$ e derivabile per $\alpha \in (0, +\infty)$. Poiché $x^2 + y^2 \geq 0$ per ogni (x, y) ed è nullo solo per $(x, y) = (0, 0)$, deduciamo che $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ e derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$ tranne eventualmente $(0, 0)$. Uno studio diretto del rapporto incrementale mostra che le derivate parziali di f in $(0, 0)$ non esistono.

Osserviamo che $f(x, y)$ coincide con $\|(x, y)\|$, la norma del vettore (x, y) . Allora, presi due punti qualunque $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ troviamo, usando la disuguaglianza triangolare soddisfatta dalla norma dei vettori:

$$\begin{aligned} f(tv_1 + (1-t)v_2) &= \|tv_1 + (1-t)v_2\| \leq \|tv_1\| + \|(1-t)v_2\| \\ &= t\|v_1\| + (1-t)\|v_2\| = tf(v_1) + (1-t)f(v_2), \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza richiesta per la convessità.

10. Una funzione convessa di classe C^1 soddisfa, per ogni x, y , la disuguaglianza

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Pertanto, se x è un punto critico, vale $f(y) \geq f(x)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, cioè x è un punto di minimo assoluto.

11. Ricordiamo che il determinante e la traccia sono rispettivamente il prodotto e la somma degli autovalori dell'hessiano. Se $n > 2$, è possibile trovare n numeri che abbiano somma e prodotto positivo, ma che non siano tutti positivi. Un semplice esempio, con $n = 3$, sono i numeri $-1, -1, 3$. Basta quindi costruire una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia un punto critico con hessiano avente questi numeri come autovalori: ad esempio la funzione $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 + 3z^2)$ nel punto $(0, 0, 0)$.
12. (a) Usando la definizione si vede facilmente che, se ϕ è crescente, un punto di massimo locale per f è di massimo locale anche per g , e lo stesso vale per i minimi locali. Se invece ϕ è decrescente, un punto di massimo per f diventa di minimo per g , e viceversa. Se la monotonia di ϕ non è stretta, l'implicazione inversa potrebbe non valere.
- (b) Le note regole di derivazione per funzioni di una variabile implicano

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Quindi, nei punti in cui $\nabla f(x, y) = 0$, si ha anche $\nabla g(x, y) = 0$. Il viceversa può non valere: se in un punto si ha $\nabla f(x, y) \neq 0$ ma $\phi'(f(x, y)) = 0$ allora $\nabla g(x, y) = 0$, quindi il punto è critico per g ma non per f . Se ϕ' non si annulla mai, ciò non si può verificare, e quindi f e g hanno gli stessi punti critici.

13. (a) $(0, \frac{1}{2})$ sella.
 (b) $(0, 0)$ sella, $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ minimo.
 (c) $(0, 0)$ minimo, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sella, $(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sella.
 (d) $(0, 0)$ sella.
 (e) $(0, 0)$ sella, $(0, -1)$ sella, $(-1, 0)$ sella, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ massimo.
 (f) $(2, 0)$ massimo.
 (g) $(0, 0)$ sella, $(2, 0)$ minimo, $(-2, 0)$ minimo.

- (h) $(4, 2)$ minimo
- (i) $(1, 1, 1)$ massimo
- (j) $(1, 1, -\frac{1}{2})$ sella
- (k) $(0, 0, 0)$ sella, $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ sella, $(-1, -1, 1/\sqrt{2})$ sella.

14. La restrizione di f su una retta generica soddisfa $f(at, bt) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$. Per $t = 0$ questa quantità ha derivata prima nulla e derivata seconda pari a b^2 ; quindi, se $b \neq 0$, ha un minimo. Per $b = 0$, la funzione vale a^4t^4 , che ha anch'essa un minimo per $t = 0$. Quindi la funzione ha un minimo su ogni retta.

D'altra parte, è facile studiare il segno di f . La funzione si annulla lungo le due parabole $y = 2x^2$ e $y = x^2$ (in particolare, nell'origine). E' positiva al di sopra della parabola $y = 2x^2$ e al di sotto della parabola $y = x^2$, mentre è negativa nella regione tra le due parabole. Pertanto, ogni intorno dell'origine contiene sia punti con f positiva che punti con f negativa. Ne segue che $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo.

15. Per tutte le funzioni proposte, si verifica che l'origine è un punto critico con hessiano a determinante nullo, e quindi le derivate non danno informazioni per concludere. Studiando il comportamento della funzione con altri metodi (es. restrizioni lungo le rette, studio diretto del segno dell'incremento) si trovano i risultati seguenti.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) massimo assoluto, non stretto | (b) né massimo né minimo |
| (c) né massimo né minimo | (d) minimo relativo (non assoluto), non stretto |
| (e) massimo assoluto, non stretto | (f) né massimo né minimo |
| (g) né massimo né minimo | (h) massimo relativo, non stretto |
| (i) minimo assoluto, stretto | (l) massimo assoluto, stretto in un intorno |
| (m) né massimo né minimo | (n) minimo assoluto, non stretto |
| (o) né massimo né minimo | (p) né massimo né minimo |
| (q) massimo relativo, non stretto | (r) né massimo né minimo. |

16. (a) $(0, 0)$ min, $(4, \sqrt{2})$ né max né min, $(4, -\sqrt{2})$ né max né min.
 (b) $(0, 0)$ né max né min, $(\frac{3}{4}, 0)$ min, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ max, $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{8}})$ max, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ né max né min, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ né max né min.
 (c) $(0, 0)$ né max né min, $(0, 2)$ max, $(\sqrt{3}, 3)$ né max né min, $(-\sqrt{3}, 3)$ né max né min.
 (d) $(0, 0)$ min, $(1, \frac{1}{2})$ né max né min, $(-1, \frac{1}{2})$ né max né min.

17. (a) Se $a \neq 0$, l'unico punto critico è $(0, 1)$, ed è un minimo quando $a > 0$ mentre non è né massimo né minimo quando $a < 0$. Se $a = 0$, tutti i punti della retta $x + y = 1$ sono critici, e sono tutti di minimo (assoluto) per f .
 (b) Se $a > 0$ ci sono tre punti critici: $(0, \frac{a}{2})$ di minimo, $(-\sqrt{a}, a)$ e $(\sqrt{a}, a)$ né di massimo né di minimo. Se $a \leq 0$ c'è un unico punto, $(0, \frac{a}{2})$, che non è né di massimo né di minimo.
 (c) Se $-1 < a < 1$ ci sono quattro punti critici: $(a, \sqrt{1-a^2})$ e $(a, -\sqrt{1-a^2})$ entrambi né di massimo né di minimo, $(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, 0)$ di massimo, $(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}, 0)$ di minimo. Se $a \geq 1$,

ci sono due punti: $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ di massimo e $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ né di massimo né di minimo.

Se $a \leq -1$, ci sono ancora due punti, stavolta $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ non è né di massimo né di minimo mentre $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ è di minimo.

(d) Se $a > 0$, ci sono tre punti critici: $(0, 0)$ di massimo e $(\pm 2\sqrt{a}, a)$ di sella. Se $a < 0$ o se $a = 0$ l'unico punto critico è $(0, 0)$ e non è né di massimo né di minimo.

(e) Se $a \neq 0$ ci sono quattro punti critici: $(0, 0)$, $(3a, 0)$, $(0, 3a)$, (a, a) . I primi tre sono di sella, il quarto è di minimo se $a > 0$, di massimo se $a < 0$. Se $a = 0$ l'unico punto critico è l'origine, che non è né massimo né minimo.

18. (a) Per $\lambda = 2$ il punto è di minimo, per gli altri λ non è critico.
(b) P_1 è di minimo, P_2 non è critico, P_3 non è né di massimo né di minimo.
(c) L'origine è di sella per f , non è critico per g , è di massimo per h .
(d) Il punto $(0, 1)$ è di massimo per f , non è critico per g , è di minimo per h .