UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 7.XII.2019

1. Tutte le serie proposte sono riconducibili alla serie geometrica. Si trova

(a) $\frac{3}{2}$	(b) $\frac{4}{15}$	(c) diverge	(d) $-\frac{1}{5}$
(e) $\frac{4}{1-e^{-3}}$	(f) $-\frac{9}{7}$	(g) diverge	(h) $\frac{8}{5}$

2. La serie converge per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$, cioè gli $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

3. Nelle risposte, indichiamo con a_n il termine generico della serie e usiamo il simbolo $a_m \approx b_n$ per indicare l'equivalenza asintotica, cioè la proprietà che $a_n/b_n \to 1$ per $n \to \infty$.

(a) NO, è una serie del tipo $\sum 1/n^\alpha$ con $\alpha \leq 1$.

(b) SÌ, si ha $a_n \approx 1/n^2$, e una serie del tipo $\sum 1/n^\alpha$ con $\alpha > 1$ è convergente.

(c) SÌ, ad es. si osserva che $\sqrt[n]{a_n} \to 0$ e si applica il criterio della radice.

(d) SÌ, si ha $a_n \approx 1/n^2$.

(e) NO, si ha $a_n \approx 1/\sqrt{n}$.

(f) NO, si ha $a_n \approx 1/\sqrt{2}n$.

(g) SÌ, converge assolutamente perché si ha

$$|a_n| \leq \frac{n}{n^3+n-1} \approx \frac{1}{n^2}.$$

(h) SÌ, la serie soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz.

(i) NO, non è soddisfatta la condizione necessaria $a_n \to 0$.

(j) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$, quindi si applica il criterio del rapporto.

(k) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$, quindi si applica il criterio del rapporto.

(l) SÌ, si ha $a_n \approx (5/6)^n$ e si usano i risultati sulla serie geometrica.

(m) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/e < 1$, e si applica il criterio del rapporto.

(n) NO, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to +\infty$, e si applica il criterio del rapporto.

(o) SÌ, vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$, e si applica il criterio del rapporto.

(p) NO, con gli sviluppi di Taylor si trova $a_n \approx 1/n$.

(q) SÌ, la serie soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz (la monotonia vale a partire da $n = 25$).

(r) SÌ, con gli sviluppi di Taylor si trova $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{6}\,n^{3/2}}$.

4. (a) Vale $a_n \approx \frac{1}{6^\alpha n^{3\alpha}}$, quindi la serie converge per $\alpha > 1/3$.

(b) Vale $a_n \approx \frac{1}{2n \ln^\alpha n}$, quindi la serie converge per $\alpha > 1$. (Ricordiamo che una serie del tipo $\sum \frac{1}{n^\beta \ln^\alpha n}$ converge se e solo se $\beta > 1$ oppure $\beta = 1$ e $\alpha > 1$).

(c) Ricordiamo che $\ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) \approx \cos x - 1 \approx -\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$. Quindi $a_n \approx -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, e la serie converge per $\alpha > 1/2$.

(d) Vale $a_n \approx \dfrac{1}{n^{-1+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\ln n}}$, quindi la serie converge per $-1 + \frac{\alpha}{2} > 1$, cioè $\alpha > 4$.

(e) Con opportuni sviluppi di Taylor si trovano i risultati seguenti. Se $\alpha > 1/2$ allora $a_n \approx -\frac{1}{2n}$, e la serie non converge. Se $\alpha < 1/2$ allora $a_n \approx \frac{1}{2n^{2\alpha}}$, e di nuovo la serie non converge. Se $\alpha = 1/2$, si trova $a_n \approx -\frac{1}{6n^2}$, e la serie converge.

(f) Se $\alpha \leq 2$, i termini della serie non vanno a zero e la serie non converge. Se $\alpha > 2$, la serie converge per il criterio di Leibniz. Si osservi che la successione $|a_n|$ non è necessariamente decrescente per tutti gli n, ma lo è per n sufficientemente grande (precisamente, se $n^\alpha > 2(\alpha - 2)^{-1}$) e questo basta per applicare il criterio.

(g) Se $\alpha \leq 1$ allora $a_n \approx \dfrac{\alpha - 1}{\sqrt{n}}$ e la serie non converge. Se $\alpha = 1$, allora $a_n \approx \dfrac{1}{6n^{3/2}}$ e la serie converge.

(h) Si trova

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{\alpha}{2e}.$$

Il testo chiede di studiare $\alpha > 0$, e il criterio del rapporto dice che la serie converge quando $0 < \alpha < 2e$ e diverge quando $\alpha > 2e$.

Nel caso $\alpha = 2e$ il criterio del rapporto non dà una risposta immediata. Tuttavia, si può adattare a questo caso la dimostrazione del criterio nel caso di un limite maggiore di 1, ragionando come segue. E' noto dal corso di Analisi I che la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende al numero e dal basso, essendo monotona crescente. Questo implica che $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\alpha}{2e} = 1$ cioè $a_{n+1} > a_n$. Come nella dimostrazione del criterio del rapporto, concludiamo che a_n, essendo positiva e crescente, non tende a zero, e quindi anche nel caso $\alpha = 2e$ la serie non converge.

(i) Se $\alpha = 1$ allora $a_n = \dfrac{1}{2n}$ e la serie non converge. Se $\alpha \neq 1$, allora $a_n \approx \dfrac{1}{n^\beta}$ con $\beta = \max \alpha, 2 - \alpha$, cioè $\beta = \alpha$ se $\alpha > 1$, risp. $\beta = 2 - \alpha$ se $\alpha > 1$. In entrambi i casi si ha $\beta > 1$, quindi la serie converge se e solo se $\alpha \neq 1$. (l) Vale $a_n \approx \frac{1}{n^{3-\alpha}}$, quindi la serie converge per $\alpha < 2$.

(m) Posto $a_n = \sqrt{4n^6 + n^\alpha} - 2n^3$, abbiamo

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{4n^6 + n^\alpha} + 2n^3} \approx \begin{cases} n^{\alpha/2} & \text{se } \alpha > 6 \\ \frac{n^3}{\sqrt{5}+2} & \text{se } \alpha = 6 \\ \frac{1}{4n^{3-\alpha}} & \text{se } \alpha < 6. \end{cases}$$

Per tutti gli $\alpha \geq 3$, il termine a_n non tende a zero e quindi la serie non converge. Per $\alpha < 3$ possiamo utilizzare il criterio di Leibniz, a patto di verificare che a_n è descrescente. Posto

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\sqrt{4x^6 + x^\alpha} + 2x^3} = \frac{1}{\sqrt{4x^{6-2\alpha} + x^{-\alpha}} + 2x^{3-\alpha}},$$

abbiamo

$$f'(x) = -\frac{(4x^{6-2\alpha}+x^{-\alpha})^{-1/2}[2(6-2\alpha)x^{5-2\alpha}-(\alpha/2)x^{-1-\alpha}]+2(3-\alpha)x^{2-\alpha}}{\left(\sqrt{4x^{6-2\alpha}+x^{-\alpha}}+2x^{3-\alpha}\right)^2}.$$

Poiché ci interessa il caso $\alpha < 3$, vale sicuramente $6-2\alpha > 0$ e $5-2\alpha > -1-\alpha$, da cui segue che $2(6-2\alpha)x^{5-2\alpha}-(\alpha/2)x^{-1-\alpha} > 0$ per x abbastanza grande. Essendo anche $2(3-\alpha)x^{2-\alpha} > 0$, deduciamo che $f'(x) < 0$ per x abbastanza grande. Ne segue che a_n è decrescente per n abbastanza grande. Per il criterio di Leibniz, concludiamo che la serie converge per $\alpha < 3$.

(n) Posto $a_n = \frac{n^4+n^{2\alpha}}{n^{\alpha+3}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{3-\alpha}}$, abbiamo che $a_n \to 0$ se e solo se si ha simultaneamente $\alpha-1 > 0$ e $3-\alpha > 0$, cioè $1 < \alpha < 3$. Per questi valori di α, è anche evidente che a_n è decrescente. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

(o) Si tratta di una serie geometrica di base $\frac{1}{\alpha-1}$, che quindi converge se e solo se $-1 < \frac{1}{\alpha-1} < 1$, cioè se e solo se $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Poiché il testo si limita a chiedere gli $\alpha > 0$, la risposta è che la serie converge per gli $\alpha > 2$.

(p) Posto $a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{5-\alpha}}$, abbiamo che $a_n \to 0$ se e solo se si ha simultaneamente $\alpha-1 > 0$ e $5-\alpha > 0$, cioè $1 < \alpha < 5$. Per questi valori di α, è anche evidente che a_n è decrescente. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

(q) Vale $a_n \approx \frac{1}{n^{2\alpha}}$, quindi la serie converge per $\alpha < \frac{1}{2}$.

5. Ricordiamo le proprietà, note dal corso di Analisi I, che $\ln(1+x) < x$ per ogni $x > 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.
(a) La positività di a_n è ovvia. Il termine b_n contiene un addendo di segno alterno, ma per la disuguaglianza ricordata sopra prevale il termine col logaritmo e la somma è positiva anche per n dispari.
(b) Le successioni sono evidentemente infinitesime. Abbiamo inoltre

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{n} \to 1 \qquad \text{per } n \to \infty$$

per il limite notevole ricordato sopra.
(c) Poichè a_n è chiaramente infinitesima e decrescente, la serie $\sum(-1)^n a_n$ converge per il criterio di Leibniz. L'altra serie invece si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

Poiché il primo addendo è una serie convergente, mentre il secondo è la serie armonica che diverge a $+\infty$, anche la serie $\sum(-1)^n b_n$ diverge a ∞.
(d) Il criterio del confronto asintotico non si applica alle serie del punto (c) perché non sono a termini positivi.
(e) Il criterio di Leibniz non si applica perché la successione b_n non è monotona decrescente, neanche supponendo n sufficientemente grande. Infatti, si ha

$$b_{n+1} - b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2+n)} - \dfrac{1}{\ln(1+n)} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} < 0 & \text{per } n \text{ pari} \\[2ex] \dfrac{1}{\ln(2+n)} - \dfrac{1}{\ln(1+n)} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} > 0 & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$