UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 18.XII.2019

1. Le affermazioni sull'ortogonalità si verificano facilmente usando la definizione e calcolando i relativi integrali. Le norme delle funzioni valgono rispettivamente $||f|| = \sqrt{2\pi}$, $||g|| = \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{3/2}$, $||h|| = \sqrt{\frac{2}{5}}\pi^{5/2}$.

   Per trovare un polinomio $p(x)$ con le proprietà richieste, possiamo scrivere $p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$, imporre le condizioni di ortogonalità e dedurne un sistema di due equazioni soddisfatto da c_1, c_2, c_3 (che ha infinite soluzioni, perché $p(x)$ è definito a meno di multipli). Più rapidamente, usando le proprietà di f, g, h trovate prima, deduciamo che sottraendo da h la sua componente parallela a f, cioè

$$h - \left\langle h, \frac{f}{||f||} \right\rangle \frac{f}{||f||} = x^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

   otteniamo un polinomio con le proprietà desiderate: è infatti ortogonale a f per costruzione, e ortogonale a g perché combinazione di funzioni ortogonali a g.

2. (a) La serie è $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ dispari}} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, o equivalentemente $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$.

   (b) In base ai risultati generali sulla convergenza delle serie di Fourier, possiamo dire che la serie converge a -1 se $x \in (-\pi, 0)$, a 1 se $x \in (0, \pi)$, a 0 se $x = -\pi, 0, \pi$.

   (c) Segue da (b) ponendo $x = \pi/2$.

   (d) Segue da un calcolo diretto.

3. (a) La serie di Fourier di f è $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$, quella di g è $\displaystyle\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

   (b) La serie di Fourier di f converge a 0 per $x = -\pi, \pi$ e in tutti gli altri punti converge a x. La serie di g converge a $|x|$ per tutti gli $x \in [-\pi, \pi]$.

   (c) Nei due casi si trova rispettivamente

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

che possiamo scrivere anche come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4. La serie di Fourier di f è $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos nx}{n^2}$, e converge a $f(x)$ per tutti gli $x \in [-\pi, \pi]$ (anche gli estremi) perché f è continua e soddisfa $f(\pi) = -f(-\pi)$.
La convergenza uniforme segue dal criterio di convergenza totale, in quanto si ha

$$\sup_{[-\pi,\pi]} \left| (-1)^n \frac{4\cos nx}{n^2} \right| = \frac{4}{n^2}$$

e la serie $\sum \frac{4}{n^2}$ è convergente.
Uguagliando la serie calcolata in $x = \pi$ al valore di $f(x)$ in tale punto, otteniamo le prima delle due uguaglianze richieste, mentre la seconda segue dall'identità di Parseval.

5. (a) La serie è $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$. Osserviamo che il prolungamento dispari della funzione coincide con la $f(x)$ dell'esercizio 2 e quindi si ritrova lo stesso risultato.
   (b) La serie è $-4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2nx}{2n}$.
   (c) La serie è $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^3}$.