UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 18.XII.2019

1. Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $[-\pi, \pi]$ a $\mathbb{R}$ e si consideri il prodotto scalare su X definito da $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Verificare che $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ sono ortogonali tra loro, mentre $h(x) = x^2$ è ortogonale a g ma non a f. Calcolare la norma di f, g, h. Trovare un polinomio $p(x)$ di secondo grado che sia ortogonale sia a f che a g.

2. Sia $f(x) = -1$ per $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = 1$ per $x \in [0, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$.
   (a) Si calcoli la serie di Fourier associata a f
   (b) Si dica quanto vale la somma della serie, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.
   (c) Come applicazione del punto precedente, si dimostri che vale
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$
   (d) Utilizzando l'identità di Parseval, si dimostri che vale
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Si considerino le funzioni f, g definite rispettivamente come $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodiche di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Per ciascuna delle due funzioni:
   (a) Si calcoli la serie di Fourier associata alla funzione.
   (b) Si dica quanto vale la somma della serie, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.
   (c) Si scriva l'identità di Parseval per la serie.

4. Sia $f(x) = x^2$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Si calcoli la serie di Fourier associata a f. Si dimostri che la serie converge uniformemente. Si dimostri che valgono le uguaglianze
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. Per ciascuna delle seguenti funzioni, trovare lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $(0, \pi)$
   $$(a) \quad f(x) = 1 \qquad (b)\ f(x) = 2x - \pi \qquad (c)\ f(x) = x(\pi - x).$$